# ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ВЛАЖНОСТИ ПРИ ИНФИЛЬТРАЦИИ В ОДНОРОДНУЮ ПОЧВУ

Н. В. Хуснутдинова (Новосибирск)

Исследуется уравнение нестационарной одномерной инфильтрации, представляющее собой квазилинейное параболическое уравнение второго порядка. Исследуется асимптотика при больших временах решения задачи о формировании профиля влагонасыщенности при инфильтрации с поверхности. Доказывается существование предельного профиля, распространяющегося с постоянной скоростью и приводятся оценки для скорости приближения к нему с ростом времени для неограниченного по мощности грунта. Оценена также скорость приближения к стационарному (однородному) распределению для ограниченного грунта.

При инфильтрации в однородную почву влажность $u\,(t,\ x)$ почвы, зависящая от времени $t$ и глубины $x$ залегания пласта от поверхности земли (ось $X$ направлена вертикально вниз), удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial K(u)}{\partial x} \tag{1}$$

$$D(u)>0,\quad K(u)>0,\quad D'(u)>0,\quad K'(u)>0,\quad K''(u)\geqslant\mu>0 \text{ при } (u\geqslant u_0>0)$$

Если учесть первоначальное распределение влаги в почве и инфильтрацию на поверхности земли, получим граничное условие

$$u\,(t,\ 0)=u_1\quad (t>0),\qquad u\,(0,\ x)=u_0\,(x)\quad (0\leqslant x<\infty) \tag{2}$$

$$u_0\leqslant u_0(x)\leqslant u_1\quad (\lim\ u_0(x)=u_0) \text{ при } x\to+\infty)$$

Здесь $u_1=1$ — влажность, соответствующая полному насыщению почвы на поверхности земли.

Если в почве на некоторой глубине $x=X$ залегают грунтовые воды, то соответствующее граничное условие примет вид

$$u\,(t,\ 0)=u_1,\ u\,(t,\ X)=u_1,\ u\,(0,\ x)=u_0\,(x) \tag{3}$$

$$0\leqslant x\leqslant X,\ u_0\leqslant u_0\,(x)\leqslant u_1$$

Большое практическое значение в вопросах орошения имеет задача вычисления предельного профиля влажности при инфильтрации в почву, т. е. исследование асимптотического поведения решений краевых задач (1), (2) и (1), (3) при неограниченном возрастании времени. Физическому и частично математическому исследованию этой задачи посвящен ряд работ зарубежных авторов [1-4]. В этих работах, в частности, содержится основанное на физических или интуитивных представлениях утверждение, что по истечении большого промежутка времени профиль влажности принимает некоторую постоянную форму, которая спускается затем без дальнейших изменений с некоторой постоянной скоростью. Исследование асимптотического поведения решений задачи Коши для уравнения (1) при $D\,(u)\equiv\text{const}$, встречающегося в газовой динамике, было приведено в работе А. М. Ильина и О. А. Олейник [5].

Ниже методы распространяются на случай $D\,(u)\not\equiv\text{const}$ в применении к краевым задачам (1), (2) и (1), (3) (задача Коши для рассматриваемого случая не имеет физического смысла).

Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничные функции удовлетворяют условиям теорем существования и единственности ограниченных вместе с производными решений краевых задач (1), (2) и (1), (3) (см. [6]).

Обозначим через $U\,(x-At+C)$ $(A>0)$ решение типа простой волны уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$U\,(-\infty)=u_1,\qquad U\,(+\infty)=u_0 \tag{4}$$

Интегрированием уравнения (1) при условии (4) получим

$$x - At + C = \int\limits_{u_2}^{U} \frac{D(u)\,du}{[K'[u_0 + \Theta(u - u_0)] - A](u - u_0)} \qquad (0 < \Theta(u) < 1) \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что при $u_0 < u_2 < u_1$, $K''(u) \geqslant \mu > 0$ решение типа простой волны, удовлетворяющее условию (4), существует, является монотонно убывающей функцией, так как

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{[K'[u_0 + \Theta(U - u_0)] - A](U - u_0)}{D(U)} < 0 \tag{6}$$

для любых конечных значений $x$ и $t$, и определяется с точностью до сдвига $C$ по вертикальной оси $X$, причем скорость $A$ параллельного смещения волны вычисляется по формуле

$$A = \frac{K(u_1) - K(u_0)}{u_1 - u_0}$$

*Теорема* 1. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1), (2). Если начальная функция $u_0(x)$ при всех $x \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству

$$u_0(x) - u_0 \leqslant M_1 e^{-\gamma_1 x}, \qquad \gamma_1 > \frac{|K'(u_0) - A|}{D(u_0)} \tag{7}$$

где $M_1$ — некоторая постоянная, то существуют такие постоянные $M > 0$, $C_0$, $\beta > 0$, не зависящие от решения $u(t,x)$, что выполняется неравенство

$$|u(t, x) - U(x - At + C_0)| \leqslant Me^{-\beta t} \tag{8}$$

*Доказательство*. Произведем замену переменных $t' = t$, $x' = x - At$ и возвратимся к старым обозначениям переменных $t$ и $x$. Тогда краевая задача (1), (2) приведется к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial K^\circ(u)}{\partial x} \tag{9}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (0 \leqslant x < \infty), \qquad u(t, -At) = u_1 \quad (t \geqslant 0) \tag{10}$$

$$K^\circ(u) = K(u) - Au + C^\circ$$

Постоянная $C^\circ$ выбрана так, чтобы $K^\circ(u_0) = K^\circ(u_1) = 0$. Решение задачи (9), (10) определено в области $P\{t \geqslant 0, -At \leqslant x < \infty\}$ с границей $\Gamma\{t \geqslant 0, x = -At\}$.

Решения типа простой волны $U(x - At + C)$ уравнения (1), удовлетворяющие условию (4), преобразуются в стационарные решения $U(x + C)$ уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[D(u)\frac{du}{dx}\right] = \frac{dK^\circ(u)}{dx} \tag{11}$$

удовлетворяющие условию (4)

Основной метод получения неравенства (8) заключается в использовании обобщенного принципа максимума в следующей его формулировке.

*Лемма*. Пусть функция $u(t, x)$ определена и непрерывна в области $P$

$$u(t, x) \geqslant 0 \text{ на } \Gamma; \quad u(t, x) \geqslant M(t)\,[1 + |x|]$$

где $M(t)$ — непрерывная функция. Если имеет место неравенство

$$L(u) = a(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(t, x)\frac{\partial u}{\partial t} + d(t, x)\,u \leqslant 0, \qquad (x, t) \in P$$

где $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$, $d(t, x)$ — ограниченные функции в $P$, причем $d(t, x) \leqslant 0$ и $c(t, x) \leqslant -k_0 < 0$, то $u(t, x) \geqslant 0$ в области $P$.

Лемма полностью аналогична лемме 1 работы [5].

При помощи этой леммы доказывается следующее известное свойство решений уравнения (9).

Если $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ — два решения уравнения (9) и $u_1(t, x)|_\Gamma \leqslant u_2(t, x)|_\Gamma$, то $u_1(t, x) \leqslant u_2(t, x)$ в области $P$. В частности, в силу этого свойства имеем

$$u_0 \leqslant u(t, x) \leqslant u_1 \tag{12}$$

Рассмотрим два решения типа простой волны $U_1(x + \lambda_1 t + C_1)$ и $U_2(x - \lambda_2 t - C_2)$, $(C_1, C_2 > 0)$ уравнения (9), удовлетворяющие соответственно условиям

$$U_1(-\infty) = u_1, \quad U_1(+\infty) = u_0 - \varepsilon; \quad U_2(-\infty) = u_1 + \varepsilon, \quad U_2(+\infty) = u_0$$

где скорости распространения волн $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = \frac{K^\circ(u_1) - K^\circ(u_0 - \varepsilon)}{u_1 - u_0 + \varepsilon}, \qquad \lambda_2 = \frac{K^\circ(u_1 + \varepsilon) - K^\circ(u_0)}{u_1 + \varepsilon - u_0}$$

$\varepsilon > 0$ будем считать настолько малым, что

$$\lambda_2 \leqslant D(u_0)\gamma_1 - K^{\circ\prime}(u_0), \quad \lambda_1 < A \tag{13}$$

Оценим разность $U_2(x - \lambda_2 t - C_2) - u_0$. Аналогично формуле (6), имеем

$$\frac{dU_2}{ds} = \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{[K^{\circ\prime}(u_0 + \Theta(U_2 - u_0)) - \lambda_2](U_2 - u_0)}{D(U_2)}$$

$$(0 < \Theta(U_2) < 1, \ s = x - \lambda_2 t - C_2)$$

Очевидно,

$$\frac{K^{\circ\prime}(u_0) - \lambda_2}{D(u_0)} \leqslant \frac{K^{\circ\prime}(u_0 + \Theta(U_2 - u_0)) - \lambda_2}{D(U_2)} < 0$$

Обозначим

$$\frac{K^{\circ\prime}(u_0) - \lambda_2}{D(u_0)} = -m_2 \quad (m_2 < \gamma_1)$$

Таким образом,

$$-m_2(U_2 - u_0) \leqslant \frac{dU_2}{ds} \leqslant 0, \qquad \text{или} \qquad -m_2 ds \leqslant d\ln(U_2 - u_0) \leqslant 0$$

Отсюда

$$U_2 - u_0 \leqslant e^{-m_2 s} < K_2 e^{-m_2(x - \lambda_2 t)} \tag{14}$$

Совершенно аналогично выводится неравенство

$$u_1 - U_1 \leqslant K_1 e^{m_1(x + \lambda_1 t)} \qquad \left(m_1 = \frac{K^{\circ\prime}(u_1) + \lambda_1}{D(u_0)}\right) \tag{15}$$

С увеличением постоянных $C_1$ и $C_2$ начальное значение решения $U_1(x + C_1)$ убывает, а $U_2(x - C_2)$ возрастает, причем, в силу неравенств (13), (14),

$$\frac{u_0(x) - u_0}{U_2(x - C_2) - u_0} \leqslant M_0 < \infty$$

т. е. начальная функция $u_0(x)$ сходится к постоянной $u_0$ не медленнее, чем $U_2(x - C_2)$. Поэтому постоянные $C_1$ и $C_2$ могут быть подобраны так, чтобы выполнялись неравенства

$$U_1(x + C_1) \leqslant u_0(x) \leqslant U_2(x - C_2) \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

но тогда

$$U_1(x + \lambda_1 t + C_1) \leqslant u(t, x) \leqslant U_2(x - \lambda_2 t - C_2) \qquad (x, t) \in P \tag{16}$$

Из неравенств (12), (16) можно получить следующие свойства решения $u(t, x)$ краевой задачи (9), (10).

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(t, x) = u_0$ при $t \in [0, T]$ ($T$ — любое конечное число)

(2) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $t \in [0, T]$

(3) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\partial u(t, -At)}{\partial x} = 0$

(4) **При любом конечном $t$ существует интеграл**

$$\int_x^\infty [u(t, x) - u_0]\, dx \leqslant \int_x^\infty [U_2(x - \lambda_2 t - C_2) - u_0]\, dx$$

Первое свойство непосредственно следует из неравенства (12), (16). Второе доказывается при помощи неравенств полностью аналогично лемме 3 работы [5]. Для доказательства третьего свойства из всех частей неравенств

$$U_1{}^0(x + \lambda_1 t + C_1) \leqslant u(t,x) \leqslant u_1$$

вычтем $u_1$. Используя неравенство (15), имеем

$$\left| \int_{-At}^x \frac{\partial u}{\partial x}\, dx \right| = |u(t, x) - u_1| \leqslant K_1 e^{m_1 (x+\lambda_1 t)}$$

Так как $|\partial^2 u / \partial x| < M = \mathrm{const}$, то из последнего неравенства рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве леммы 5 работы ][4], получим

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right| < K_0 e^{1/2\, m_1 (x+\lambda_1 t)} \tag{17}$$

Откуда имеем, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-At} \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

Утверждение (4) следует из неравенства (12) и существования (в силу оценки (14)) интеграла

$$\int_x^\infty [U_2(x - \lambda_2 t - C_2) - u_0]\, dx$$

При помощи свойств (1) — (4) решения задачи (9), (10) доказывается существование предела функции

$$J(t) = \int_{-At}^0 [u(t, x) - u_1]\, dx + \int_0^\infty [u(t, x) - u_0]\, dx$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[ \int_{-At}^0 [u(t, x) - u_1]\, dx + \int_0^\infty [u(t, x) - u_0]\, dx \right] = \int_{-At}^\infty \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\, dx =$$

$$= \int_{-At}^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - K^\circ(u) \right\} dx = D(u_1) \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-At}$$

Так как

$$K^\circ(u_0) = K^\circ[u(t, -At)] = K^\circ(u_1) = 0. \left| \frac{\partial}{\partial x} u(t, -At) \right| \leqslant K_0 e^{-m_1 (A-\lambda_1)t}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} J(t) = 0$$

Очевидно, функция

$$\frac{d}{dz} J\left( \frac{1-z}{z} \right) \qquad \text{при } z = \frac{1}{t+1} \in (0, 1] \qquad \left( \left. \frac{dJ}{dz} \right|_{z=0} = 0 \right)$$

непрерывна. Отсюда следует, в частности, существование

$$\lim_{t\to\infty} J(t) = \lim_{z\to 0} J\left( \frac{1-z}{z} \right) = B$$

Оценим также скорость сходимости функции $J(t)$ к константе $B$

$$|J(t)-B| = \left|J\left(\frac{1-z}{z}\right)-B\right| \leqslant \left|\frac{dJ}{dz}\right| z = \left|\frac{dJ}{dt}\right| \left|\frac{dt}{dz}\right| \frac{1}{(t+1)} = \left|\frac{dJ}{dt}\right| (t+1)$$

Итак,

$$|J(t)-B| \leqslant K_1 (t+1) e^{-m_1(A-\lambda_1)t} \tag{18}$$

Установим теперь равномерную по $t$ сходимость решения $u(t, x)$ к $u_0$ при $x \to +\infty$. Обозначим

$$\alpha = -\frac{\max|K^{\circ\prime}(u)|}{D(u_0)} \geqslant 0$$

выберем постоянную $M$ у функции

$$y(t, x) = \int_x^\infty \{Me^{-\alpha x} - [u(t, x) - u_0]\}\, dx$$

настолько большой, чтобы было $y(0, x) \geqslant 0$. Это возможно в силу неравенства $\gamma_1 > \alpha$. После интегрирования уравнения (9) в пределах от $x$ до $\infty$ получим

$$D(u)\frac{\partial u}{\partial x} - K^\circ(u) + \frac{\partial}{\partial t}\int_x^\infty u(t, x)\, dx = 0 \tag{19}$$

Пусть $v(x) = Me^{-\alpha x} + u_0$. Очевидно,

$$D(u)\frac{\partial v}{\partial x} - K^\circ(v) = -Me^{-\alpha x}[D\alpha + K^{\circ\prime}(\Theta)] \leqslant 0 \tag{20}$$

$$u_0 \leqslant \Theta \leqslant u_0 + Me^{-\alpha x}, \quad |K^{\circ\prime}(u_0)| > |K^{\circ\prime}(\Theta)|$$

Вычитая из неравенства (20) уравнение (19) и учитывая, что

$$-(v-u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_x^\infty (v(t, x) - u(t, x))\, dx\right) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

получим неравенство

$$D(u)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - K^{\circ\prime}(\Theta)\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t} \leqslant 0$$

Функция $y(t, x)$ удовлетворяет условиям леммы, следовательно,

$$\int_x^\infty [u(t, x) - u_0]\, dx \leqslant \frac{1}{\alpha} Me^{-\alpha x}$$

Отсюда следует равномерная по $t$ сходимость решения $u(t, x)$ к $u_0$ при $x \to +\infty$. Рассмотрим теперь функцию

$$z(t, x) = \int_x^\infty [u(t, x) - U(x + C_0)]\, dx$$

где $U(x + C_0)$ — стационарное решение уравнения (11), удовлетворяющее условию (4), с постоянной $C_0$, определяемой из условия

$$\int_{-\infty}^0 [U(x + C_0) - u_1]\, dx + \int_0^\infty [U(x + C_0) - u_0]\, dx = B$$

В силу монотонной зависимости решения $U(x + C_0)$ от постоянной $C$ такая постоянная $C_0$ найдется.

Докажем, что при $t \to \infty$ величина $|z(t, x)|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенства $|z(t, x)| < \varepsilon$ при $t \geqslant T$ и ограниченности производной по $x$ от подынтегральной функции следует оценка (см. [5])

$$|u(t, x) - U(x + C_0)| < K_0^\circ \sqrt{\varepsilon} \tag{21}$$

при $t \geqslant T$ с константой $K_0^\circ$, не зависящей от $t$.

Проинтегрируем каждое из тождеств

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D(u(t, x))\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial K^\circ[u(t, x)]}{\partial x} \equiv 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D(U(x + C_0))\frac{\partial U(x + C_0)}{\partial x}\right] - \frac{\partial U(x + C_0)}{\partial t} - \frac{\partial K^\circ[U(x + C_0)]}{\partial x} \equiv 0$$

в пределах от $x$ до $\infty$ и после этого вычтем из первого полученного тождества второе.

Учитывая, что

$$u - U = -\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty [u(t, x) - U(x + C_0)]\,dx$$

получим

$$D(u)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left[D'(\Theta_1)\frac{\partial U}{\partial x} - K^{\circ\prime}(\Theta_2)\right]\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial t} \equiv 0$$

где $\Theta_1$ и $\Theta_2$ — значения, средние между $u(t, x)$ и $U(x + C_0)$. Обозначим

$$D(u) = D,\ \left[D'(\Theta_1)\frac{\partial U}{\partial x} - K^{\circ\prime}(\Theta_2)\right] = B,\ L(y) = D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}$$

Выберем достаточно большое число $N$ так, чтобы при $|x| > N$ выполнялось неравенство $B < -\nu_0 < 0$ (это возможно в силу равномерной сходимости $u(t, x)$ к $u_0$). Тогда

$$L(e^{-\alpha \exp \lambda x}) = \alpha\lambda e^{-\alpha \exp \lambda x} e^{\lambda x}[\lambda D(\alpha \exp \lambda x - 1) + B] < 0$$

при $|x| \leqslant N$, $\alpha = k^{-1}\exp(-\lambda N)$ $(k \geqslant 1)$ и достаточно большом $\lambda$;

$$L(e^{-\alpha x}) = \alpha[\alpha D - B]e^{-\alpha x} < 0$$

при $x > N$ и достаточно большом $k$.

Очевидно, можно построить функцию $Q(x)$, непрерывную вместе с производной второго порядка, совпадающую с функцией $\varphi(x) \equiv \exp \lambda x$ при $x \geqslant N$, гладко переходящую в линейную $\varphi(x) \equiv x$ при $x > N$ и такую, чтобы

$$L(e^{-\alpha Q(x)}) \leqslant -\delta e^{-\alpha Q(x)} < 0$$

Функция

$$W(t, x) = M_1 e^{-\alpha Q(x) - \beta t} + \varepsilon \pm z(t, x)$$

при фиксированных $\alpha$ и $\beta$ и при достаточно большом $M_1$ неотрицательна на границе $\Gamma$ области $P$.

Действительно, при $x \geqslant N$ и $t \geqslant T$ имеем $|z(0, x)| < \varepsilon$ и, соответственно,

$$|z(t, -At)| = |I(t) - B| < \varepsilon$$

Поэтому при достаточно большом $M_1$

$$W(0, x) = M_1 e^{-\alpha Q(x)} + \varepsilon \pm z(0, x) \tag{22}$$

$$W(t, -At) = M_1 e^{-\alpha Q(-At) - \beta t} + \varepsilon \pm z(t, -At) \geqslant 0 \tag{23}$$

Кроме того,

$$L(W) = L(M_1 e^{-\alpha Q(x) - \beta t}) + (L \pm z + \varepsilon) < (-\delta + \beta)e^{-\alpha Q(x) - \beta t} < 0 \text{ при } \beta < \delta$$

Таким образом, функция $W(t, x)$ удовлетворяет условиям леммы, откуда следует

$$\left|\int\limits_x^\infty [u(t, x) - U(x + C_0)]\, dx\right| < M_1 e^{-\alpha Q(x) - \beta t} + \varepsilon \tag{24}$$

Если, учитывая неравенства (7) и (18), положить

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{k \exp \lambda N},\ \gamma_1\right\}$$

и $\beta \leqslant \delta$ выбрать настолько малым, чтобы $\alpha A - \beta > -m_1(A - \lambda_1)$, то в неравенствах (22), (23), (24) величину $\varepsilon$ можно положить равной нулю.

Учитывая оценку (21), получим

$$|u(t, x) - U(x + C_0)| < M e^{-{}^1/_2 \alpha Q(x) - {}^1/_2 \beta t}$$

где $M$ — не зависящая от $t$ константа.

Возвращаясь к прежним переменным $x$ и $t$, получим утверждение теоремы.

*Теорема* 2. Пусть $u(t, x)$ — решение краевой задачи (1), (3). Существуют такие постоянные $M$ и $\beta$, что выполняется неравенство

$$|u(t, x) - u_1| < M e^{-\beta t}$$

*Доказательство.* Перепишем уравнение (1) в виде

$$D(u)\, \partial^2 u / \partial x^2 + [D'(u)\, \partial u / \partial x - K^{\circ\prime}(u)]\, \partial u / \partial x - \partial u / \partial t = 0$$

Обозначим

$$\left[D'(u)\frac{\partial u}{\partial x} - K^{\circ\prime}(u)\right] = B, \quad D(u) = D$$

Функция

$$W(t, x) = M_1 e^{-\alpha \exp \lambda x - \beta t} \pm [u(t, x) - u_1]$$

при фиксированном $\alpha$ и достаточно большом $M_1$ неотрицательна на границе $\Gamma_1$ области $R$ $\{t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant X\}$. Так как при достаточно малом $\alpha$

$$L(W) = D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha\lambda \exp(-\alpha e^{\lambda x} - \beta t)\, e^{\lambda x}\left[\lambda D(\alpha e^{\lambda x} - 1) - B\right] < 0 \tag{25}$$

в области $R$, то функция $W(t, x)$ не может достигать отрицательного минимума в области $R$, так как в точке отрицательного минимума $\partial^2 W / \partial x^2 \geqslant 0$, $\partial W / \partial x = 0$, $\partial W / \partial t \leqslant 0$, и, значит, $L(W) > 0$, что противоречит неравенству (25).

Таким образом, $W(t, x) \geqslant 0$ в $R$, откуда следует

$$|u(t, x) - u_1| \leqslant M_1 e^{-\alpha \exp \lambda x - \beta t}$$

и утверждение теоремы 2 становится очевидным.

Поступила 18 XI 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Irmay S. Extension of Darcy law to unsteady unsaterated flow through porous media. Sumposia Darcy, t. 2, Dijon, 1956, U. G. G. I., Int. Ass. (publ. No 41).
2. Philip I. R. The theory of infiltration, part. 2. Soil Sci., 1957, vol. 83, No. 6.
3. Youngs E. G. Moisture profiles during vertical infiltration socl. Soil Sci., 1957, vol. 84, pp. 283—290.
4. Childs E. C. The ultimate moisture profile during infiltration in a uniform soil. Soil. Sci., 1964, vol. 97, No. 3.
5. Ильин А. М., Олейник О. А. О поведении решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при неограниченном возрастании времени. Матем. сб., 1960, т. 5, № 2.
6. Олейник О. А., Вентцель Т. Д. Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа. Матем, сб., 1957, т. 41, № 1.