Карлеманом доказано [5], что при сделанных предположениях существует такая постоянная M, что для решения уравнения Больцмана справедливо неравенство $f(t, V) < M_1$ при любых t и V. Так как неопределенный интеграл от ограниченной функции есть функция непрерывная, то

$$\exp\left[-\int_0^t L(\tau, V)\,d\tau\right], \qquad \int_0^t G(\tau, V)\exp\left[-\int_\tau^t L(s, V)\,ds\right]d\tau$$

будут непрерывными функциями t и V.

Следовательно, из-за наличия разрыва у $f_0(V)$ функция $f(t, V)$ будет иметь разрыв в тех же точках V_i, что и $f_0(V)$.

Из интегрального представления (11) видно, что первое слагаемое с течением времени стремится к нулю. Действительно, из H-теоремы следует, что f при $t \to \infty$ стремится к максвелловской функции распределения, поэтому $L(t, V)$ при $t \to \infty$ стремится к величине $L(\infty, V)$, которая больше некоторой положительной величины при любом V. Отсюда следует, что

$$\int_0^t L(\tau, V)\,d\tau \to +\infty \quad \text{при } t \to \infty$$

а это означает, что первое слагаемое в (11) обращается в нуль.

Докажем утверждение 2°. При предположениях, сделанных во втором утверждении, справедлива теорема Карлемана III ([5], ч. I, гл. II, § 1), говорящая о том, что $f(t, V)$ является ограниченной и равностепенной непрерывной функцией V.

Дифференцируя уравнение (11) по V и применяя те же рассуждения, что и при доказательстве первого утверждения, а также используя свойство непрерывности $f(t, V)$ по переменной V, придем к выводу, что производная $\partial f/\partial V$ будет иметь разрывы в тех же точках, что и $\partial f_0/\partial V$. По тем же причинам, что и в утверждении 1°, эти разрывы исчезают при $t \to \infty$.

Поступила 17 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуров К. П. О времени релаксации в двухтемпературной смеси классических газов. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 5, стр. 1641—1647.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Арсеньев А. А. Задача Коши для линеаризованного уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 5, стр. 1104—1106.
4. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, стр. 425—432.
5. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ С УЧЕТОМ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЛУЧИСТОГО ДАВЛЕНИЯ

Г. С. Бисноватый-Коган (Москва)

§ 1. Основные уравнения и безразмерные параметры. Система уравнений газодинамики, описывающая стационарное движение идеального газа с излучением в сферически симметричном поле тяжести имеет вид [1]

$$u\frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} \tag{1.1}$$

$$\rho u\frac{dE}{dr} = \frac{P}{\rho}u\frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\lambda r^2\frac{dT}{dr}\right), \qquad \lambda = \frac{4\sigma c T^3}{3\varkappa\rho} \tag{1.2}$$

$$\rho u r^2 = \mu \tag{1.3}$$

$$E = \frac{3}{2}RT + \frac{\sigma T^4}{\rho}, \qquad P = \rho RT + \frac{\sigma T^4}{3}, \qquad R = \frac{k}{m_p}(2X + 0.75Y + 0.5Z) \tag{1.4}$$

Здесь P, E, T, ρ — давление и удельная энергия, температура и плотность вещества; r — радиус; u — скорость; R — удельная газовая постоянная; σ — постоянная плотности энергии излучения; λ — коэффициент лучистой теплопроводности; μ — поток массы, деленный на 4π, считается постоянным; c — скорость света; $\varkappa$ — непрозрачность; весовые концентрации водорода, гелия и тяжелых элементов соответственно равны X, Y, Z (вещество считается полностью ионизованным); k — постоянная Больцмана; m_p — масса протона. Если непрозрачность обусловлена только рассеянием на электронах, то $\varkappa = 0.19\ (1 + X)$. В дальнейшем расчеты будут проводиться для $\varkappa = \text{const}$. Если в потоке отсутствуют источники энергии, то систему (1.1) — (1.4) можно один раз проинтегрировать. Получим систему уравнений:

$$-\mu\left(E + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} + \frac{u^2}{2}\right) + \lambda r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{4\pi}$$

$$u\frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}, \qquad \rho u r^2 = \mu \tag{1.5}$$

Здесь L — полный поток энергии. Если поток массы пренебрежимо мал, то L — перенос энергии теплопроводностью. Система уравнений (1.5) получена в [2,3]. Будем искать решение системы (1.5), удовлетворяющее условиям $\rho = T = 0$ на бесконечности. Такое решение, удовлетворяющее дополнительно условиям на границе звезды, соответствует реальному истечению из звезды. Используя выражения для E, P из (1.4), перепишем (1.5) в виде:

$$\left(\frac{RT}{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3 r^4}\right)\frac{d\rho}{dr} = \tag{1.6}$$

$$= \frac{2\mu^2}{\rho^2 r^5} - \left(\frac{4\sigma T^3}{3\rho} + R\right)\left\{\frac{\varkappa\mu T}{cr^2} + \frac{3\varkappa\rho}{4\sigma c r^2 T^3}\left[\mu\left(\frac{5}{2}RT - \frac{GM}{r} + \frac{\mu^2}{2\rho^2 r^4}\right) - \frac{L}{4\pi}\right]\right\} - \frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\varkappa\mu T}{cr^2} + \frac{3\varkappa\rho}{4\sigma c r^2 T^3}\left[\mu\left(\frac{5}{2}RT - \frac{GM}{r} + \frac{\mu^2}{2\rho^2 r^4}\right) - \frac{L}{4\pi}\right] \tag{1.7}$$

Из газодинамики известно [2], что решение (1.6) — (1.7) удовлетворяет условиям $\rho = 0$ на бесконечности, если оно проходит через особую точку уравнения (1.6), определяемую соотношением $RT_k / \rho_k = \mu^2 / \rho_k^3 r_k^4$ и условием равенства нулю правой части уравнения (1.6). В этой точке скорость равна изотермической скорости звука. Точка $T = 0$, $\rho = 0$, $r = \infty$ также является особой для системы (1.6) — (1.7). В пределе $\varkappa \to \infty$ система (1.6)—(1.7) описывает адиабатическое течение и вырождается в алгебраические соотношения. При этом две особые точки системы (1.6) — (1.7) для $\varkappa = \infty$ скачком переходят в одну, в которой скорость равна адиабатической скорости звука. Решение системы (1.6) — (1.7), удовлетворяющее условиям $\rho = T = 0$ при $r = \infty$ непрерывно переходит в предельное решение для $\varkappa = \infty$.

Перейдем к независимой переменной $x = 1 / r$ и введем безразмерные переменные:

$$x^* = x / x_k, \qquad \rho^* = \rho / \rho_k, \qquad T^* = T / T_k \tag{1.8}$$

Сделав замену переменных и используя первое соотношение в критической точке получим систему уравнений относительно ρ^*, T^* с независимой переменной x^*, в которую войдут безразмерные параметры:

$$A_1 = \frac{4\sigma T_k^3}{3\rho_k R}, \qquad A_2 = \frac{3\varkappa\mu}{4\sigma c}\frac{\rho_k}{r_k}\frac{R}{T_k^3}, \qquad A_3 = \frac{GM}{r_k R T_k}, \qquad A_4 = \frac{3\varkappa L}{16\pi\sigma c}\frac{\rho_k}{r_k T_k^4} \tag{1.9}$$

Если учесть, что $\mu = \sqrt{RT_k}\rho_k r_k^2$, то $A_2 = 3\varkappa R^{3/2}\rho_k^2 r_k / 4\sigma c T_k^{5/2}$. Второе условие в критической точке $x^* = \rho^* = T^* = 1$ накладывает одну связь на параметры

$$A_4 = A_2(3 + A_1 - A_3) + \frac{A_3 - 2}{1 + A_1} \tag{1.10}$$

Таким образом, система уравнений в безразмерном виде запишется так:

$$\frac{d\rho}{dx} = \left(\frac{2x^3}{\rho^2} - \left(\frac{A_1T^3}{\rho} + 1\right)\left\{\frac{A_2\rho}{T^3}\left(A_1\frac{T^4}{\rho} + 2.5T - A_3x + 0.5\frac{x^4}{\rho^2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\rho}{T^3}\left[A_2(3 + A_1 - A_3) + \frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\right\} - A_3\right)\left(\frac{x^4}{\rho^3} - \frac{T}{\rho}\right)^{-1} \tag{1.11}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{A_2\rho}{T^3}\left(A_1\frac{T^4}{\rho} + 2.5T - A_3x + 0.5\frac{x^4}{\rho^2}\right) + \frac{\rho}{T^3}\left[A_2(3 + A_1 - A_3) + \frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right] \tag{1.12}$$

знак «звездочка» для простоты написания опущен.

В дальнейшем, если это специально не оговорено, используются только безразмерные переменные. Решение удовлетворит условиям $x = \rho = T = 0$ при определенном соотношении между параметрами A_1, A_2, A_3. Каждой паре параметров A_1, A_2 соответствует одно A_3 и одно решение, удовлетворяющее нулевым условиям на бесконечности. Решение, проходящее через особую точку $x = T = \rho = 1$ имеет в ней разложение:

$$T = 1 + \beta_1(1 - x) + \beta_2(1 - x)^2 + \beta_3(1 - x)^3, \qquad \rho = 1 + \alpha_1(1 - x) + \alpha_2(1 - x)^2$$

$$\beta_1 = -\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{4}\left\{A_2(1 + A_1)^2 + 2\frac{A_3 - 2}{1 + A_1} - 8 - \left(A_2^2(1 + A_1)^4 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 4\left[4 + 7\left(\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right)^2 + A_2(A_3 - 2)(4 + 7A_1) - 8\frac{A_3 - 2}{A_1 + 1} - 4A_2(1 + A_1)^2\right]\right)^{1/2}\right\} \tag{1.13}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\left[A_2\left(3A_1 + \frac{3}{2}\right) + 3\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right] - \frac{1}{2}\left[A_2(1 + A_1) + \frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\alpha_1$$

$$\alpha_2 = \left\{3A_2\left(1 + A_1 + \frac{(A_3 - 2)^2}{1 + A_1}\right) - 6 - \left[3A_2\left(2A_1 - 2A_1^2 + \frac{5}{2}\right) + 6\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right] \times \right.$$
$$\times \left(\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right)^2 + \left[A_2(A_3 + 2 + 4A_1) - 18 - A_2\left(\frac{11}{2} + 3A_1 - 4A_1^2\right)\frac{A_3 - 2}{1 + A_1} - \right.$$
$$\left. - 3\left(\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right)^2\right]\alpha_1 + \left[A_2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}A_1 + A_1^2\right) - 18 + \frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\alpha_1^2 +$$
$$\left. + \left[A_2(1 + A_1)\left(\frac{5}{2} + 4A_1\right) + 3\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\beta_2 + \alpha_1(\beta_2 - 5\alpha_1^2)\right\} \times$$
$$\times \left[A_2(1 + A_1)^2 + 3\frac{A_3 - 2}{1 + A_1} - 12 - 6\alpha_1\right]^{-1}$$

$$\beta_3 = A_2\left(1 + \frac{(A_3 - 2)^2}{1 + A_1}\right) - \left[A_2\left(2A_1 + \frac{5}{2}\right) + 2\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\left(\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left[A_2(A_3 + 2) - 3\left(\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right)^2 - A_2\left(\frac{11}{2} + 3A_1\right)\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\alpha_1 + \frac{1}{6}A_2\alpha_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left[A_2\left(\frac{5}{2} + 4A_1\right) + 3\frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\beta_2 - \frac{1}{3}\left[A_2(1 + A_1) + \frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\right]\alpha_2$$

Решение, проходящее через точку $x = T = \rho = 0$, допускает несколько разложений (γ_0 — произвольно)

$$\rho = \gamma_0x^2, \quad T = \delta_0x^{3/4}, \quad \delta_0 = \left(\frac{4\gamma_0}{3}\right)^{1/4}\left[\frac{A_3 - 2}{1 + A_1} + A_2(A_1 + 3 - A_3) - \frac{A_2}{2\gamma_0^2}\right]^{1/4} \tag{1.14}$$

или, если член в квадратных скобках в (1.14) равен нулю, имеем

$$\rho = \gamma_0x^2, \ T = \delta_0x, \ \gamma_0 = \left(\frac{A_2}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{A_3 - 2}{1 + A_1} + A_2(A_1 + 3 - A_3)\right]^{-1/2}, \quad \delta_0 = (0.5A_2\gamma_0)^{1/3} \tag{1.15}$$

Для выяснения вопроса, какое из разложений (1.14) — (1.15) соответствует решению, удовлетворяющему нулевым условиям на бесконечности и проходящему через точку $x = \rho = T = 1$, необходимо дополнительное исследование. В работе [4] при $x \to 0$ рассматривалось только разложение типа (1.14). Из условий (1.13) следует ограничение $A_3 > 2$. Это ограничение справедливо для всех A_1, A_2.

§ 2. Предельные случаи. Рассмотрим следующие предельные случаи.

а) Пусть $A_2 = 0$. Этот случай соответствует условию $\varkappa = 0$, т. е. формально бесконечной теплопроводности. Система уравнений примет вид

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{2(x^3/\rho^2 - 1) + [(A_3 - 2)/(1 + A_1)](\rho/T^3 - 1)}{x^4/\rho^3 - T/\rho}, \quad \frac{dT}{dx} = \frac{A_3 - 2}{1 + A_1}\frac{\rho}{T^3} \tag{2.1}$$

Эта система зависит от одного параметра $B = (A_3 - 2)/(1 + A_1)$. Выходя из особой точки $x = T = \rho = 1$ по разложению (1.13) при $A_2 = 0$ и численно решая систему (2.1), получим, что решение проходит через точку $x = T = \rho = 0$ при $B = 0.8186$. Откуда получаем

$$A_3 = 2 + (1 + A_1)\, 0.8186 \tag{2.2}$$

Это решение формально не имеет физического смысла, так как соответствует случаю $L = \infty$ или бесконечной теплопроводности, но формула (2.2) может использоваться для приближенного определения A_3 при большой теплопроводности, больших тепловых потоках и малых A_2. Для больших x искомое решение имеет асимптотику:

$$\rho = 0.303x^3, \quad T = 0.705\ x \tag{2.3}$$

б) Пусть $A_2 = \infty$. Этот случай соответствует нулевой теплопроводности или адиабатическому течению. Решение записывается в конечном виде

$$A_1\frac{T^4}{\rho} + \frac{5}{2}T - A_3x + \frac{1}{2}\frac{x^4}{\rho^2} = 3 + A_1 - A_3, \quad \ln\frac{T^{3/2}}{\rho} + A_1\left(\frac{T^3}{\rho} - 1\right) = 0 \tag{2.4}$$

Первое соотношение (2.4) есть записанное в безразмерном виде уравнение Бернулли, второе означает постоянство энтропии по потоку. Решение, удовлетворяющее условиям $x = T = \rho = 0$, должно проходить через точку, где скорость равна адиабатической скорости звука. Условия перехода через эту точку приведены в [5]. В безразмерном виде они запишутся следующим образом:

$$\frac{x_a^2}{\rho_a^2} = \frac{A_3}{2}, \quad 1 + \frac{(1 + A_1T_a^3/\rho_a)^2}{1.5 + 3A_1T_a^3/\rho_a} = \frac{A_3x_a}{2T_a} \tag{2.5}$$

Здесь x_a, T_a, ρ_a — значения безразмерных параметров в точке, где скорость равна адиабатической скорости звука $u_a^2 = \gamma P/\rho$. При выводе (2.5) использовалось выражение для $\gamma = (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_S$ идеального газа с излучением (S — удельная энтропия)

$$\gamma = \frac{1}{1 + A_1T^3/4\rho}\left[1 + \frac{(1 + A_1T^3/\rho)^2}{1.5 + 3A_1T^3/\rho}\right] \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5) совместно с (2.4), записанные в точке x_a, определяют A_3, x_a, T_a, ρ_a в зависимости от A_1. Эта зависимость приведена в табл. 1.

При записи (2.5) предполагалось, что в потоке вещества, удовлетворяющем условиям $x = T = \rho = 0$, течение на бесконечности будет сверхзвуковым. В этом случае существует точка x_a, где достигается адиабатическая скорость звука. Однако существует класс политропных течений в сферически симметричном поле тяжести постоянной массы, где переход через скорость звука невозможен. Это политропные течения с показателем $n > 1.5$. Течение с $n = 1.5$ является вырожденным и происходит с постоянным числом Маха [6]. Политропное решение с $n = 1.5$ является предельным при $A_1 \to 0$ для решения (2.4). При $A_1 = 0$ существует точное решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности $A_3 = 3$, $\rho = x^{3/2}$, $T = x$. Число Маха в таком потоке равно $^3/_5$, скорость всегда равна изотермической скорости звука. При достаточно малом $A_1 \neq 0$ переход через адиабатическую скорость звука также не происходит. Это проявляется в том, что для достаточно малых A_1 не существует решения алгебраической системы (2.4) — (2.5), определяющей x_a, T_a, ρ_a, A_3. Найдем предельное значение A_{1n} при котором поток становится сверхзвуковым. Формально при $A_1 \to A_{1n}$ решение системы (2.4) — (2.5) должно дать $x_a \to 0$. Тогда из первого соотношения (2.5) в силу огра-

Таблица 1

A_1	10^4	$5\cdot10^3$	10^3	700	500	200
A_3	$9.803\cdot10^3$	$4.876\cdot10^3$	$9.588\cdot10^2$	668,0	474.9	187,5
x_a	$2.721\cdot10^{-2}$	$3.469\cdot10^{-2}$	$6.173\cdot10^{-2}$	0.07033	0.07962	0.1122
ρ_a	$6.413\cdot10^{-5}$	$1.309\cdot10^{-4}$	$7.005\cdot10^{-4}$	$1.021\cdot10^{-3}$	$1.458\cdot10^{-3}$	$3.878\cdot10^{-3}$
T_a	$4.002\cdot10^{-2}$	$5.076\cdot10^{-2}$	$8.870\cdot10^{-2}$	0.1005	0.1131	0.1564

A_1	100	50	20	15	10	9.5	9
A_3	93.20	46.84	19.75	15.36	11.055	10.63	10.21
x_a	0.1459	0.1898	0.2663	0.2946	0.3371	0.3425	0.3482
ρ_a	$8.161\cdot10^{-3}$	0.01709	0.04373	0.05768	0.08319	0.08692	0.09098
T_a	0.1997	0.2541	0.3431	0.3742	0.4186	0.4242	0.4301

A_1	8.5	8	7.5	7	6.5	6	5.5
A_3	9.785	9.365	8.946	8.529	8.114	7.701	7.291
x_a	0.3544	0.3611	0.3680	0.3754	0.3833	0.3919	0.4012
ρ_a	0.0954	0.1002	0.1055	0.1114	0.1179	0.1251	0.1331
T_a	0.4362	0.4426	0.4494	0.4566	0.4641	0.4721	0.4804

A_1	5	4.5	4	3.5	3	2	1
A_3	6.883	6.478	6.076	5.677	5.283	4.509	3.767
x_a	0.4112	0.4217	0.4335	0.4460	0.4596	0.4886	0.5074
ρ_a	0.1421	0.1522	0.1637	0.1768	0.1917	0.2275	0.2635
T_a	0.4892	0.4985	0.5082	0.5181	0.5282	0.5456	0.5388

A_1	0.5	0.4	0.3	0.2	0.14	0.13	0.128
A_3	3.412	3.342	3.269	3.192	3.1396	3.130	3.128
x_a	0.4705	0.4399	0.3902	0.3043	0.1023	0.02084	0
ρ_a	0.2471	0.2267	0.1907	0.1329	0.02614	$2.671\cdot10^{-3}$	0
T_a	0.4754	0.4381	0.3817	0.2756	0.09330	0.01957	0

ничения $A_3 > 2$ имеем $\rho_a \to \alpha x_a^{3/2}$, а второе соотношение (2.5) выполняется при $x_a \to 0$, если $T \to \beta x_a$. Подставляя эти разложения в (2.4) — (2.5) и оставляя главные члены, получим

$$A_3 = 3 + A_1, \qquad \alpha = \left(\frac{2}{3 + A_1}\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{3}{10}(3 + A_1), \qquad 3 + A_1 = 2\left(\frac{5}{3}\right)^{3/4} e^{A_1/2} \tag{2.7}$$

Последнее соотношение (2.7) определяет A_{1n}, которое равно $A_{1n} = 0.128$.

При $A_1 < A_{1n}$: $A_3 = 3 + A_1$; при $x \to 0$ асимптотически решение имеет вид

$$\rho \approx \alpha x^{3/2}, \qquad T \approx \beta x, \qquad \beta = \alpha^{2/3} e^{2A_1/3}, \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{3/2}\left(3 + A_1 - \frac{1}{2\alpha^2}\right)^{3/2} = \alpha e^{A_1} \tag{2.8}$$

При $A_1 > A_{1n}$ величина A_3 определяется совместным решением системы (2.4) — (2.5), асимптотически решение при $x \to 0$ имеет вид

$$\rho \approx \alpha x^2, \qquad T \approx \beta x^{4/3}, \qquad \alpha = [2(3 + A_1 - A_3)]^{-1/2}, \qquad \beta = \alpha^{2/3} e^{2A_1/3} \tag{2.9}$$

Сравнение (2.8) и (2.9) с (1.14) и (1.15) показывает, что при любом A_1 при $A_2 \to \infty$ асимптотика при $x \to 0$ меняется. Существование предельного A_{1n} означает, что переход через адиабатическую скорость звука возможен лишь в том случае, если в точке, где достигается изотермическая скорость звука, отношение давления излучения к газовому не меньше, чем $A_{1n}/4 = 0.032$. Это следует из определения A_1 в (1.9).

При больших A_1 решение, удовлетворяющее условиям $x = \rho = T = 0$, получается при

$$A_3 = A_1 + 3 - \sqrt[3]{27}\,(3A_1^{2/3})$$

В дозвуковой области при больших A_1 приближенное решение имеет вид $T \approx x$,

$$\rho \approx x^3$$

При $0 < A_1 < \infty$ асимптотически при больших x имеем

$$T \approx {}^2/_3 A_3 x\,(\ln x)^{-1}, \quad \rho \approx ({}^2/_3)^4 A_1 A_3^3 x^3\,(\ln x)^{-4}$$

§ 3. **Решение задачи в общем случае.** Для нахождения решения системы (1.11) — (1.12) в общем случае необходимо выйти из особой точки $x = \rho = T = 1$ по формулам разложения (1.13) и провести численное интегрирование системы (1.11) — (1.12). При этом, задавшись A_1 и A_2 только для единственного A_3, при $x = 0$ получим $T = \rho = 0$. Так как точка $x = \rho = T = 0$ особая, то при произвольных A_3 решение ведет себя неаналитически. При A_3, меньших, чем искомое, $T > 0$ при $x = 0$. При больших A_3 : $T = 0$ при ρ_T, $x_T > 0$. В окрестности точки $T = 0$, ρ_T, $x_T > 0$ система (1.11)—(1.12) имеет асимптотический вид

$$\frac{dx}{dT} = \varphi\,\frac{T^3}{\rho_T}, \qquad \frac{d\rho}{dT} = \frac{\rho_T{}^3}{x_T{}^4}, \qquad \varphi > 0$$

Решение имеет вид

$$x = x_T + (\varphi/4\rho_T)\,T^4, \qquad \rho = \rho_T + T\rho_T{}^3/x_T{}^4$$

Таким образом, при больших A_3 интегральные кривые $T(x)$, $\rho(x)$ лежат в области $x > x_T$. Значения A_3 в зависимости от A_1 и A_2, для которых выполняется условие $x = \rho = T = 0$ приведены в табл. 2. Из табл. 2 видно, что при фиксированном A_1 значения A_3 мало меняются в зависимости от A_2. Для $A_1 > A_{1n}$ зависимость $A_3(A_2)$ монотонная. Рассмотрение формулы (2.2), табл. 1, 2 дает следующие результаты. Производная $(\partial A_3 / \partial A_2)\,A_1$ вдоль решений, удовлетворяющих условиям на бесконечности, положительна при $A_1 > A_{1n}$. В интервале $3 < A_1 < 3.5$ она как функция A_2 переходит через тождественный нуль и становится отрицательной. В

Таблица 2

A_1	0	0	0	0	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	0.01	0.01	0.01
A_2	0.1	1	10	100	0.1	1	10	100	0.1	1	10
A_3	2.84	2.945	3.056	3.012	2.84	2.945	3.056	3.012	2.845	2.955	3.06
A_1	0.01	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5
A_2	100	0.1	1	10	20	50	100	0.1	1	10	50
A_3	3.02	2.92	3.03	3.125	3.123	3.113	3.109	3.247	3.34	3.405	3.41
A_1	1	1	1	1	1	2	3	3	5	5	5
A_2	0.1	1	5	10	50	1	1	5	0.02	0.1	0.2
A_3	3.657	3.722	3.756	3.763	3.765	4.49	5.28	5.281	6.907	6.896	6.890
A_1	5	5	7	7	10	10	10	15	15	15	15
A_2	1.0	5	0.1	1	0.02	0.1	1	0.01	0.02	0.1	0.5
A_3	6.885	6.883	8.54	8.53	11.02	11.04	11.05	15.17	15.21	15.32	15.35
A_1	20	20	50	50	50	50	100	100	100	100	100
A_2	0.02	0.2	$5\cdot10^{-4}$	0.01	0.02	0.01	10^{-4}	$5\cdot10^{-4}$	0.002	0.01	0.02
A_3	19.48	19.71	44.1	45.72	46.12	46.68	85.2	86.8	89.1	91.55	92.15
A_1	100	200	200	200	200	500	500	700	700	10^3	10^3
A_2	0.1	10^{-4}	$5\cdot10^{-4}$	0.01	0.05	10^{-4}	0.01	10^{-4}	$5\cdot10^{-3}$	10^{-4}	10^{-3}
A_3	92.95	170.7	176.2	185.2	187.1	439.5	472.2	626	664	906.5	943.5

Таблица 3

A_1		0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5
A_2		0.1	1	10	∞	0.1	1	10	∞
A_3		2.92	3.03	3.125	3.10	3.247	3.34	3.405	3.412
$V=\frac{1}{6}$	x	8.10	28.3	96.3	128	9.10	27.7	36.6	42.3
	ρ	154	1020	7320	$1.16\cdot10^4$	187	1090	1950	2170
	T	6.575	22.2	57.9	70.9	7.08	17.8	23.3	24.5
$V=\frac{1}{10}$	x	13.9	77.6	222	280	16.9	61.9	84.7	89.6
	ρ	581	8280	$4.56\cdot10^4$	$6.70\cdot10^4$	808	6480	$1.08.10^4$	$1.18\cdot10^4$
	T	11.1	52.7	116	137	12.6	35.1	44.2	46.1
$V=\frac{1}{20}$	x	30.2	263	596	722	42.6	166		224
	ρ	3742	$1.14\cdot10^5$	$4.34\cdot10^5$	$5.96\cdot10^5$	6740	$6.1\cdot10^4$		10^5
	T	23.9	147	268	306	29.0	80.8		101
$V=\frac{1}{30}$	x	49.9			1205		281		369
	ρ	$1.20\cdot10^4$			$2.0\cdot10^6$		$2.11\cdot10^5$		$3.29\cdot10^5$
	T	39.0			475		127		155
A_1		1	1	1	1	5	5	5	5
A_2		0.1	1	5	∞	0.02	0.1	0.5	∞
A_3		3.657	3.722	3.756	3.767	6.907	6.896	6.888	6.883
$V=\frac{1}{6}$	x	10	22.3	24.8	27.1	7.64	9.01	9.76	10.0
	ρ	220	798	950	1099	146	191	218	228
	T	7.45	13.9	15.1	16.1	5.74	6.48	6.87	7.00
$V=\frac{1}{10}$	x	19.3	46.2	51.1	55.2	12.7	15.55	17.0	17.5
	ρ	1020	4200	4940	5610	536	747	864	907
	T	13.4	25.9	27.9	29.5	9.05	10.5	11.2	11.4
$V=\frac{1}{20}$	x	48.4	114	125	133	25.1	31.8	34.9	35.9
	ρ	8550	$3.5\cdot10^4$	$4.03\cdot10^4$	$4.48\cdot10^4$	3070	4540	5290	5555
	T	29.9	56.2	59.9	62.7	16.7	19.8	21.1	21.6
$V=\frac{1}{30}$	x	82.8		204	216	37.3	47.8	52.4	53.9
	ρ	$2.98\cdot10^4$		$1.3\cdot10^5$	$1.43\cdot10^5$	8530	$1.28\cdot10^4$	$1.49\cdot10^4$	$1.57\cdot10^4$
	T	47.7		91.4	95.3	23.95	28.5	30.4	31.0

интервале $8 < A_1 < 8.5$ производная, как функция A_2, снова проходит через тождественный нуль и при больших A_1 всегда положительна. При $A_1 < A_{1n}$ зависимость A_3 от A_2 немонотонна. Для малых A_2 величина $(\partial A_3 / \partial A_2)_{A_1} > 0$, затем при $A_2 \approx 10$ для $A_1 = 0$ производная меняет знак и отрицательна вплоть до $A_2 = \infty$. Величина A_2, где производная $(\partial A_3 / \partial A_2)_{A_1}$ меняет знак, монотонно растет с ростом A_1 и обращается в бесконечность при $A_1 = A_{1n}$.

При $A_1 < A_{1n}$, начиная с некоторого A_{2n}, зависящего от A_1, для $A_2 > A_{2n}$ течение на бесконечности будет дозвуковым, для $A_1 = A_{1n}$ имеем $A_{2n} = \infty$. В случае $A_2 > A_{2n}$ величина A_3 определяется соотношением

$$A_4 = A_2(3 + A_1 - A_3) + \frac{A_3 - 2}{A_1 + 1} = 0 \tag{3.1}$$

Полный поток энергии, уносимый на бесконечность, равен нулю. Асимптотика в точке $x = 0$ имеет вид

$$\rho \approx \alpha x^{3/2}, \qquad T \approx \beta x, \qquad \beta = {}^2/_5 (A_3 - 0.5 / \alpha^2)$$

Здесь α — произвольно. В точке A_{2n} производная $(\partial A_3 / \partial A_2)_{A_1}$ отрицательна и равна соответствующей величине, вычисленной по формуле (3.1). При $A_2 > A_{2n}$ всегда $A_3 > 3$. Решение с дозвуковым течением на бесконечности соответствует режиму испарения, рассмотренному в [7].

Для применения полученного решения к истечению из оболочки красного гиганта необходимо знать решение в дозвуковой области. Для нахождения этого решения при известном A_3 (A_1, A_2) нужно выйти из точки $x = \rho = T = 1$ по формулам разложения (1.13) и интегрировать уравнения (1.11) — (1.12) для $x > 1$.

Величина $v = 1 / (\rho r^2 \sqrt{T})$ есть безразмерная скорость или отношение скорости потока к изотермической скорости звука. В табл. 3 приведены значения x, ρ, T для $v = 1/_6$, $1/_{10}$, $1/_{20}$, $1/_{30}$ для некоторых значений A_1, A_2.

При $A_2 = 0$, $A_3 = 0.8186\,(1 + A_1) + 2$; ниже приводятся значения безразмерного решения $\rho\,(x)$ и $T\,(x)$ (одно и то же для всех A_1) для различных значений $1 / v$ и x

$1/v = 2$	4	6	8	10	12	14
$x = 2.32$	4.59	6.53	8.27	9.88	11.4	12.8
$\rho = 7.59$	43.9	114	218	358	533	743
$T = 2.02$	3.68	5.07	6.31	7.45	8.51	9.51
$1/v = 16$	18	20	26	30	36	40
$x = 14.2$	15.4	16.7	20.2	22.4	25.5	27.5
$\rho = 991$	1270	1590	2770	3735	5460	6800
$T = 10.5$	11.4	12.3	14.8	16.3	18.5	19.9
$1/v = 46$	50	60	70	80	90	100
$x = 30.4$	32.2	36.6	40.8	44.7	48.5	52.2
$\rho = 9080$	$1.08 \cdot 10^4$	$1.57 \cdot 10^4$	$2.15 \cdot 10^4$	$2.83 \cdot 10^4$	$3.60 \cdot 10^4$	$4.46 \cdot 10^4$
$T = 21.9$	23.2	26.3	29.2	32.0	34.7	37.3

Если известны начальные условия, например, в оболочке звезды, то использование полученного решения позволяет получить поток массы. Для полного определения решения нужно знать какие-либо три величины из следующих L, r_0, T_0, ρ_0, u_0. Оставшиеся две величины не являются независимыми. Выражая эти размерные величины через безразмерные величины и параметры, получим

$$L = \frac{4\pi c GM}{\varkappa} \frac{A_1 A_4}{A_3}$$

$$r_0 = \left(\frac{4\sigma\varkappa}{3c}\right)^{2/5} \frac{(GM)^{7/5}}{R^{8/5}} \frac{1}{(A_1^2 A_2 A_3)^{2/5} A_3 x}, \qquad \rho_0 = \left(\frac{3R}{4\sigma}\right)^{1/5} \left(\frac{c\sqrt{R}}{\varkappa GM}\right)^{6/5} (A_1^2 A_2 A_3)^{6/5} \frac{\rho}{A_1} \tag{3.2}$$

$$T_0 = \left(\frac{3cR^{3/2}}{4\sigma\varkappa GM}\right)^{2/5} (A_1^2 A_2 A_3)^{2/5}\, T, \qquad u_0 = R^{4/5} \left(\frac{3c}{4GM\sigma\varkappa}\right)^{1/5} (A_1^2 A_2 A_3)^{1/5} \frac{x^2}{\rho}$$

Определяя по трем значениям, например, L, r_0, u_0 безразмерные параметры A_1, A_2, x, используя (1.10), (2.2) и табл. 1—4, получим начальные значения ρ_0 и T_0 и определим поток массы

$$4\pi\mu = 4\pi \frac{(GM)^{7/5}}{R^{6/5}} \left(\frac{4\sigma}{3}\right)^{2/5} \left(\frac{c}{\varkappa}\right)^{3/5} \frac{(A_1^2 A_2 A_3)^{3/5}}{A_1 A_3^2} \tag{3.3}$$

Автор благодарит Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова за постоянное внимание и интерес к работе.

Поступила 26 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954.
2. Noble L. and Scarf F. Conductive heating of the solar wind, Astrophys. J., 1963, vol 138, No. 4; 1965, vol 141, No. 4.
3. Whang Y., Liu C., Chang C. A viscous model of the solar wind, Astrophys. J., 1966, vol. 145, No. 1.
4. Parker E. Dynamical properties of stellar coronas and stellar winds. Astrophys. J., 1964, vol. 139, No. 1; 1965, vol. 141, No. 4.
5. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович. Адиабатическое истечение и равновесные состояния с избытком энергии. Астроном. ж., т. 43, № 6, 1966.
6. Weymann R. Mass loss from stars, in Ann. Rev. of. astron. and astrophys. vol 1, 1963.
7. Chamberlain J. Interplanetary gas. Hydrodynamic model of the corona. Astrophys. J., 1961, vol. 133, No. 2.