ЛИТЕРАТУРА

1. Заремба Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966.
3. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960.
4. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержня. ПММ, 1946, т. 10, вып. 5—6, стр. 597—617.
5. Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С. О распространении плоских упруго-пластических волн. ПММ, 1948, т. 12, вып. 4, стр. 370—374.
6. Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 497—502.
7. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
8. Коловский М. В. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., «Наука», 1966.

РЕЛАКСАЦИЯ ГАЗА, ОПИСЫВАЕМОГО КИНЕТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ БОЛЬЦМАНА

В. А. Рыков (Москва)

Рассматривается задача о релаксации классического газа к максвелловской функции распределения для случая, когда начальная неравновесная функция распределения зависит только от модуля скорости. Пятикратный интеграл столкновений Больцмана сведен к двухкратному, что позволило решить задачу численным методом. Упрощение интеграла столкновений проведено и для смеси газов.

Результаты численного счета даны в виде графиков, показывающих изменение функции распределения с течением времени.

Рассмотрим однородный покоящийся газ, молекулы которого являются абсолютно твердыми, гладкими шарами с диаметром σ и массой m.

Состояние такого газа описывается функцией распределения $f(t, u, v, w)$, зависящей от времени t и компонент скоростей молекул u, v, w.

Уравнение Больцмана для функции распределения f в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[f(t, u_1', v_1', w_1')\, f(t, u', v', w') -$$

$$- f(t, u, v, w)\, f(t, u_1, v_1, w_1)]\,|q|\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, du_1\, dv_1\, dw_1 \qquad (1)$$

$$u' = u + lq, \qquad v' = v + mq, \quad w' = w + nq, \qquad u_1' = u_1 - lq$$

$$v_1' = v_1 - mq, \qquad w_1' = w_1 - nq, \qquad q = l(u_1 - u) + m(v_1 - v) + n(w_1 - w)$$

$$l = \cos\theta, \qquad m = \sin\theta\cos\varphi, \qquad n = \sin\theta\sin\varphi$$

Для уравнения (1) ставится задача Коши. При $t = 0$ дана начальная функция распределения $f = f(t = 0, \sqrt{u^2 + v^2 + w^2})$, зависящая только от модуля скорости и отличная от максвелловской функции распределения.

Требуется найти функцию распределения, удовлетворяющую уравнению (1) при $t \geqslant 0$ и совпадающую с начальной при $t = 0$.

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$f = f(t, \sqrt{u^2 + v^2 + w^2})$$

Подставляя эту искомую функцию в уравнение (1) и переходя в пространство скоростей к сферической системе координат при помощи соотношений

$$u = V\cos\psi, \qquad v = V\sin\psi_1\cos\chi, \qquad w = V\sin\psi\sin\chi$$

$$u_1 = V_1\cos\psi_1, \qquad v_1 = V_1\sin\psi_1\cos\chi_1, \qquad w_1 = V_1\sin\psi_1\sin\chi_1$$

получим

$$\frac{\partial f(t,V)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\pi [f(t,\sqrt{p_1})\,f(t,\sqrt{p}) - $$

$$- f(t,V)\,f(t,V_1)]\,|\,q\,|\,V_1^2\sin\theta\sin\psi_1\,d\theta\,d\varphi\,d\psi_1\,d\chi_1\,dV_1 \tag{2}$$

$$p_1 = V_1^2 - 2V_1(\cos\psi_1\cos\theta + \sin\psi_1\cos\chi_1\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi_1\sin\chi_1\sin\theta\sin\varphi)q + q^2$$

$$p = V^2 + 2V\,(\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\cos\chi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\chi\sin\theta\sin\varphi)\,q + q^2$$

$$q = V_1(\cos\psi_1\cos\theta + \sin\psi_1\cos\chi_1\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi_1\sin\chi_1\sin\theta\sin\varphi) - V(\cos\psi\cos\theta +$$

$$+ \sin\psi\cos\chi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\chi\sin\theta\sin\varphi)$$

Для дальнейшего упрощения столкновительного члена потребуется следующее тождество, справедливое для любой однозначной интегрируемой функции F:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi F(\cos\alpha_1\cos\alpha + \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\cos\beta +$$

$$+ \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta,\ \alpha,\ \beta)\sin\alpha_1\,d\alpha_1\,d\beta_1 = 2\pi\int_0^\pi F(\cos\alpha_1,\ \alpha,\ \beta)\sin\alpha_1 d\alpha_1 \tag{3}$$

Чтобы убедиться в его справедливости, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$\iint_\Sigma F\,[\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{n}_1),\ \alpha,\ \beta]\,d\Sigma \tag{4}$$

Здесь Σ — сфера единичного радиуса, по поверхности которой ведется интегрирование; $\mathbf{n}$ — фиксированный единичный вектор с направляющими косинусами ($\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$) и с началом в центре сферы; $\mathbf{n}_1$ — переменный при интегрировании единичный вектор, начало которого находится в центре сферы, а конец упирается в элементарную площадку $d\Sigma$. Его направляющие косинусы ($\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1\cos\beta_1$, $\sin\alpha_1\sin\beta_1$).

Из представления (4) видно, что величина интеграла не зависит от положения системы координат, в которой проводится интегрирование. Поэтому, направляя координатную ось, от которой отсчитывается угол α_1, вдоль фиксированного вектора $\mathbf{n}$, получим выражение интеграла (4) в виде правой части равенства (3).

Выделяя в столкновительном члене уравнения (2) интегрирование по переменным ψ_1 и χ_1, можем упростить его при помощи тождества (3), записанного в переменных ψ_1, χ_1 вместо α_1, β_1. Выделяя затем интегрирование по переменным θ, φ и вновь применяя тождество (3), получим уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\pi^2\sigma^2\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi [f(t,\sqrt{p_1})\,f(t,\sqrt{p}) - f(t,V)\,f(t,V_1)]\,|\,q\,|\,V_1^2\sin\theta\sin\psi_1 d\theta\,d\psi_1\,dV_1$$

$$p_1 = V_1^2\sin^2\psi_1 + V^2\cos^2\theta, \qquad p = V^2\sin^2\theta + V_1^2\cos^2\psi_1, \qquad q = V_1\cos\psi_1 - V\cos\theta \tag{5}$$

Во второй части интеграла столкновений можно провести интегрирование по переменным θ и ψ_1, после чего этот член примет вид

$$-2\pi^2\sigma^2 f(t,V)\int_0^\infty f(t,x)\,\frac{(V+x)^3 - |\,V-x\,|^3}{3V}\,x\,dx$$

Здесь переменная интегрирования V_1 обозначена через x.

В первой части интеграла столкновений введем новые переменные интегрирования, положив

$$x = \sqrt{V^2 \sin^2 \theta + V_1^2 \cos^2 \psi_1}, \qquad y = \sqrt{V_1^2 \sin^2 \psi_1 + V^2 \cos^2 \theta}, \qquad q = V_1 \cos \psi_1 - V \cos \theta$$

После выполнения замены переменных оказывается возможным провести интегрирование по переменной q и тройной интеграл превращается в двукратный. Уравнение Больцмана (5) примет окончательный вид

$$\frac{\partial f(t, V)}{\partial t} = 2\pi^2\sigma^2 \int_0^V \int_{\sqrt{V^2-x^2}}^V f(t, x) f(t, y) \frac{4\sqrt{x^2+y^2-V^2}}{V} xy\, dy\, dx +$$

$$+ 2\pi^2\sigma^2 \left(\int_V^\infty f(t, x)\, 2x\, dx\right)^2 + 2\pi^2\sigma^2 \int_0^V f(t, x) \frac{4x^2}{V} dx \int_V^\infty f(t, x)\, 2x\, dx -$$

$$- 2\pi^2\sigma^2 f(t, V) \int_0^\infty f(t, x) \frac{(V+x)^3 - |V-x|^3}{3V} x\, dx \tag{6}$$

Таким образом, задача Коши, поставленная для уравнения Больцмана, в предположении, что начальная функция распределения зависит только от модуля скорости, преобразовалась в задачу Коши для уравнения (6).

За последнее время возник интерес к рассмотрению релаксации температур в двухтемпературной смеси классических газов [1].

При предположении, что начальные функции распределения каждого сорта газа зависят только от модуля скорости, можно провести аналогичное упрощение интеграла столкновений и в этом случае. Пусть смесь газов состоит только из двух сортов частиц, которые будем рассматривать как абсолютно твердые гладкие шары с диаметром σ_1 и массой m_1, для частиц первого сорта, и с диаметром σ_2 и массой m_2, для частиц второго сорта.

Примем для определенности, что $m_1 \leqslant m_2$, функция распределения, описывающая состояние газа первого сорта, пусть будет $f(t, \mathbf{c}_1)$, а второго $F(t, \mathbf{c}_2)$. Здесь $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ — скорости частиц первого и второго сорта, соответственно. Система уравнений Больцмана имеет вид [2]

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{c}_1)}{\partial t} = I_{11}[f(t, \mathbf{c}_1)] + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [f(t, \mathbf{c}_1') F(t, \mathbf{c}_2') -$$

$$- f(t, \mathbf{c}_1) F(t, \mathbf{c}_2)] \, |(\mathbf{g}_{21}\cdot\mathbf{k})| \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\mathbf{c}_2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial F(t, \mathbf{c}_2)}{\partial t} = I_{22}[F(t, \mathbf{c}_2)] + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [f(t, \mathbf{c}_1') F(t, \mathbf{c}_2') -$$

$$- F(t, \mathbf{c}_2) f(t, \mathbf{c}_1)] \, |(\mathbf{g}_{21}\cdot\mathbf{k})| \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\mathbf{c}_1$$

$$\mathbf{c}_2' = \mathbf{c}_2 - \frac{2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{k}(\mathbf{g}_{21}\cdot\mathbf{k}), \qquad \mathbf{c}_1' = \mathbf{c}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\mathbf{k}(\mathbf{g}_{21}\cdot\mathbf{k})$$

$$\mathbf{g}_{21} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1, \qquad \mathbf{k} = (\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)$$

Здесь I_{11} и I_{22} имеют вид правой части уравнения (1), в которой следует соответственно заменить σ на σ_1, σ_2, а $f(t, \mathbf{c})$ на $f(t, \mathbf{c}_1)$, $F(t, \mathbf{c}_2)$.

Будем искать решение системы (7) в виде $f = f(t, |\mathbf{c}_1|)$, $F = F(t, |\mathbf{c}_2|)$. Подставляя эти искомые функции в систему уравнений (7) и совершая преобразования, аналогичные тем, которые были проделаны для уравнения (1), придем к следующей системе:

$$\partial f(t, V) / \partial t = I_{11}(f, f) + I_{12}(f, F), \qquad \partial F(t, V)/\partial t = I_{21}(F, f) + I_{22}(F, F)$$

Здесь переменную $|\mathbf{c}_1|$ у функции f и переменную $|\mathbf{c}_2|$ у функции F обозначаем одной буквой V. Выражение $I_{11}(f, f)$ есть правая часть уравнения (6), в которой σ заменена на σ_1. Выражение $I_{22}(F, F)$ есть правая часть уравнения (6) с σ, замененной на

σ_2, и с f, замененным на F

$$I_{12}(f, F) = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \frac{2\pi^2}{2V}\left(\frac{m_1+m_2}{2m_2}\right)^2 \left\{\int_0^\infty \int_{y_1}^{y_2} f(t, x) F(t, y)\left[(x+V) - \right.\right.$$

$$\left.- \frac{m_2}{m_1}\left| y - \left(y^2 + \frac{m_1}{m_2}(x^2 - V^2)\right)^{1/2}\right|\right] 4xy\,dy\,dx + \int_0^\infty \int_{y_2}^\infty f(t, x) F(t, y)(x + V - |x - V|) \times$$

$$\times 4xy\,dy\,dx + \int_{x_1}^{V} \int_{y_0}^{y_1} f(t, x) F(t, y) \frac{m_2}{m_1} 2\left(y^2 + \frac{m_1}{m_2}(x^2 - V^2)\right)^{1/2} 4xy\,dy\,dx +$$

$$\left. + \int_V^{x_2} \int_0^{y_1} f(t, x) F(t, y)\, 2\frac{m_2}{m_1} y\, 4xy\,dy\,dx\right\} - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 2\pi^2 f(t, V) \int_0^\infty F(t, y) \frac{(V+y)^3 - |V-y|^3}{3V} y\,dy$$

$$I_{21}(F, f) = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \frac{2\pi^2}{2V}\left(\frac{m_1+m^2}{2m_1}\right)^2 \left\{\int_0^\infty \int_{y_1 m_2/m_1}^{y_2 m_2/m_1} f(t, y) F(t, x) \times\right.$$

$$\times \left[\frac{m_1}{m_2}\left(y + \left(y^2 + \frac{m_2}{m_1}(x^2 - V^2)\right)^{1/2}\right) - |V - x|\right] 4xy\,dy\,dx + \int_0^\infty \int_{y_2 m_2/m_1}^\infty f(t, y) F(t, x) \times$$

$$\times (V + x - |V - x|)\, 4xy\,dy\,dx + \int_{x_1}^{V} \int_{y_0 m_2/m_1}^{y_1 m_2/m_1} f(t, y) F(t, x)\, 2\frac{m_1}{m_2}\left(y^2 + \frac{m_2}{m_1}(x^2 - V^2)\right)^{1/2} \times$$

$$\left. \times 4xy\,dy\,dx + \int_V^{x_2} \int_0^{y_1 m_2/m_1} f(t, y) F(t, x)\, 2\frac{m_1}{m_2} y 4xy\,dy\,dx\right\} -$$

$$- \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 2\pi^2 F(t, V) \int_0^\infty f(t, y) \frac{(V+y)^3 - |V-y|^3}{3V} y\,dy$$

где

$$x_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} V, \qquad x_2 = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} V, \qquad y_0 = \left[\frac{m_1}{m_2}(V^2 - x^2)\right]^{1/2}$$

$$y_1 = {}^1/_2\,|(V - x) + (V + x) m_1 / m_2|, \qquad y_2 = {}^1/_2\,|(V + x) + m_1 (V - x) / m_2|$$

В полученной системе уравнений присутствуют интегралы только второй кратности, что значительно снижает количество вычислений при решении уравнений на электронно-вычислительных машинах.

Рассмотрим далее численный метод решения задачи Коши для уравнения (6).

Перейдем к безразмерной искомой функции распределения f' и к безразмерным переменным t', V', положив

$$t = \frac{\sqrt{m}}{4n\sigma^2 \sqrt{\pi k T}} t', \qquad V = \sqrt{\frac{3kT}{m}} V', \qquad f = \frac{4\sqrt{2}}{\vartheta} n \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} f'$$

Здесь n и T — плотность и температура газа.

Масштаб, стоящий перед t', взят равным среднему времени между двумя последовательными столкновениями частицы. За характерный масштаб скорости взята величина, равная квадратному корню из среднеквадратичной величины скорости.

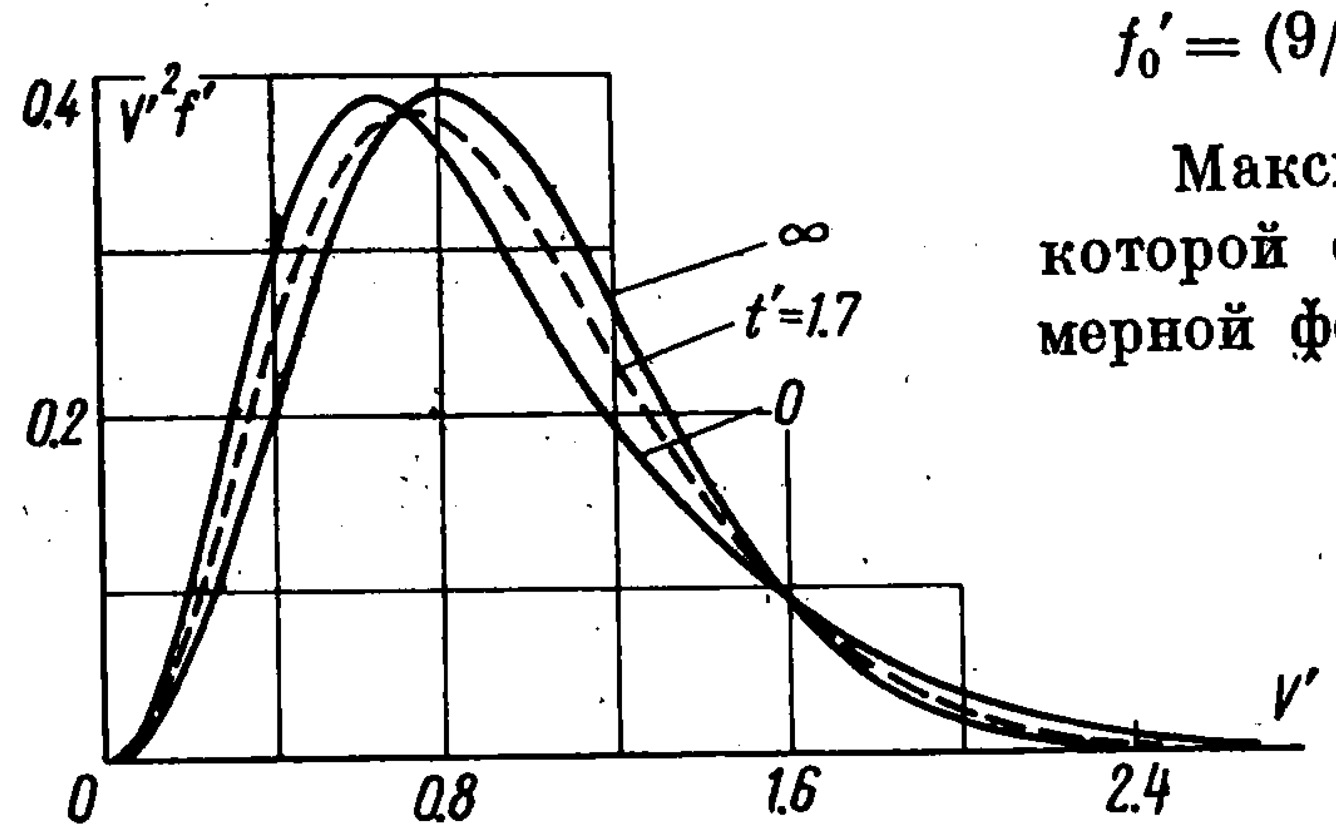
Уравнение (6), записанное в безразмерных переменных, можно получить из уравнения в размерных переменных, если поставить у всех величин штрихи и в правой части опустить множитель $2\pi^2\sigma^2$. Начальную функцию распределения возьмем соответствующей следующей задаче. В момент времени $t = 0$ имеется однородный покоящийся газ, причем одна половина молекул имеет максвелловское распределение с температурой $T_1 = T / 2$, вторая половина имеет максвелловское распределение с температурой $T_2 = 3T / 2$. Здесь T — температура газа в целом.

Пусть n — плотность газа. Тогда начальная функция распределения будет

$$f_0=\frac{n}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT_1}\right)^{3/2}\exp\frac{-mV^2}{2kT_1}+\frac{n}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT_2}\right)^{3/2}\exp\frac{-mV^2}{2kT_2}$$

После приведения к безразмерному виду получим

$$f_0'=(9/4)\exp(-3V'^2)+(\sqrt{3}/4)\exp(-V'^2) \qquad (8)$$



Фиг. 1

Максвелловская функция распределения, к которой стремится решение при $t'\to\infty$, в безразмерной форме запишется так: (9)

$$f'=(9/4\sqrt{2})\exp(-3V'^2/2)$$

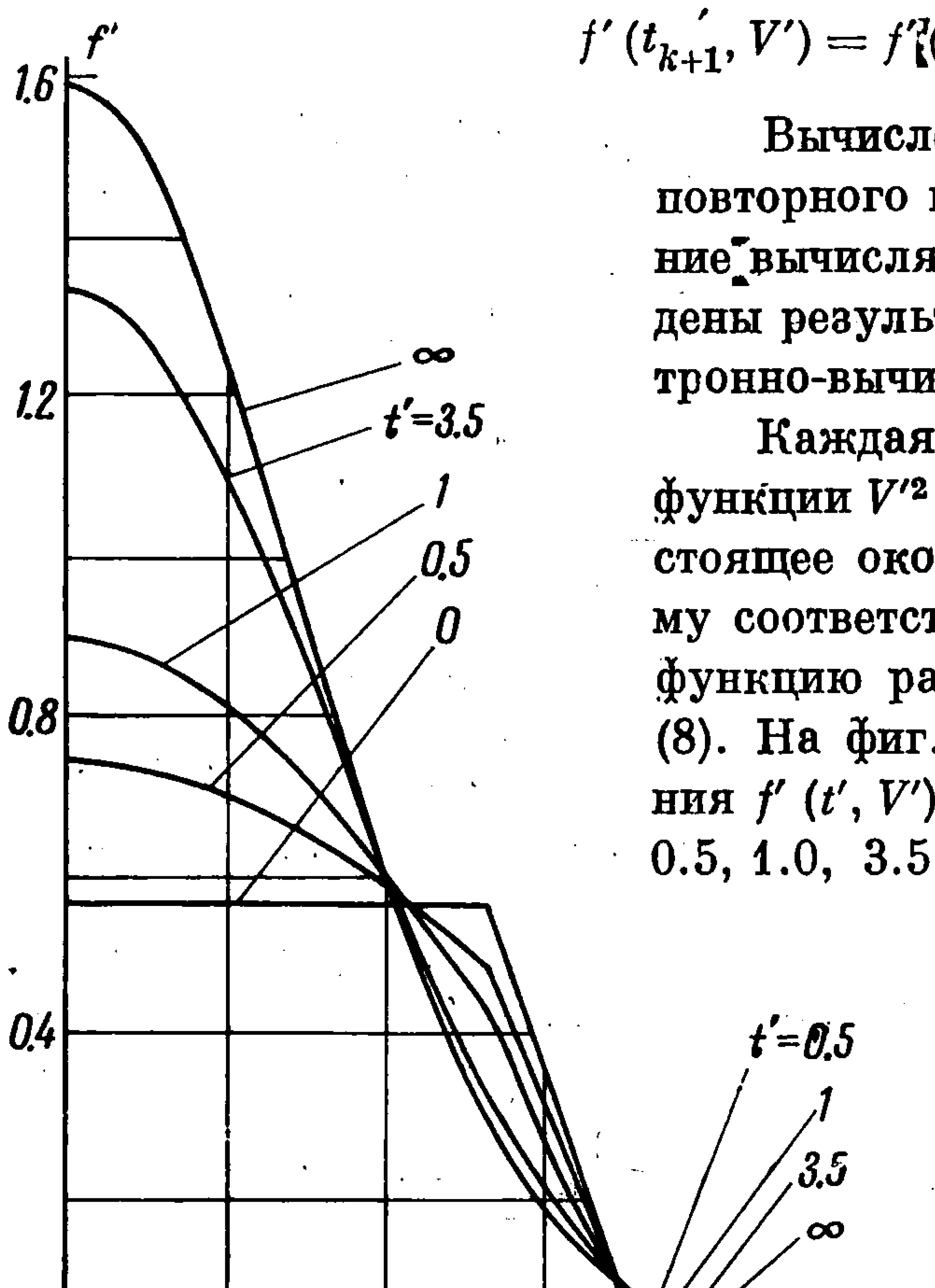
Обозначая правую часть уравнения (6), записанную в безразмерной форме, через $I(f',f')$, запишем это уравнение в виде

$$\partial f'/\partial t'=I(f',f')$$

Первый шаг по времени, позволяющий отход от начальной функции распределения $f_0'(V')$, осуществлялся по методу Эйлера $f'(\Delta t',V')=f_0'(V')+I(f_0',f_0')\Delta t'$, где $\Delta t'$ — величина шага.

Далее счет велся по модифицированной формуле Эйлера, т. е.

$$f'(t_{k+1}',V')=f'(t_{k-1}',V')+I[f'(t_k',V'),f'(t_k',V')]\,2\Delta t',\qquad k\geqslant 1$$



Фиг. 2.

Вычисление двойного интеграла проводилось путем повторного вычисления однократных интегралов. Последние вычислялись методом Симпсона. На фиг. 1 и 2 приведены результаты счета, который был выполнен на электронно-вычислительной машине «Стрела» ВЦ АН СССР.

Каждая кривая на фиг. 1 показывает зависимость функции $V'^2f'(t',V')$ от величины модуля скорости. Число, стоящее около кривой, означает момент времени, которому соответствует изображаемая функция. За начальную функцию распределения в этом случае бралась функция (8). На фиг. 2 приведены графики функции распределения $f'(t',V')$, соответствующие моментам времени $t'=0$, 0.5, 1.0, 3.5. Кривая со значком $t'=\infty$ соответствует функции (9).

Видно, что при $t'=3.5$ решение становится близким к максвелловской функции распределения. По мере приближения функции распределения к равновесной производная $\partial f'/\partial t'$ принимает все меньшие значения и процесс выхода функции распределения на максвелловскую начинает идти очень медленно. Поэтому здесь необходимо пользоваться асимптотикой функции распределения при $t'\to\infty$. Можно, например, воспользоваться асимптотикой линеаризованного уравнения Больцмана, которая приведена в работе [3]. Часто для описания движения разреженного газа применяют приближенное модельное уравнение [4]. Записанное в тех же безразмерных переменных, что и уравнение Больцмана, оно, для нашего случая, примет вид

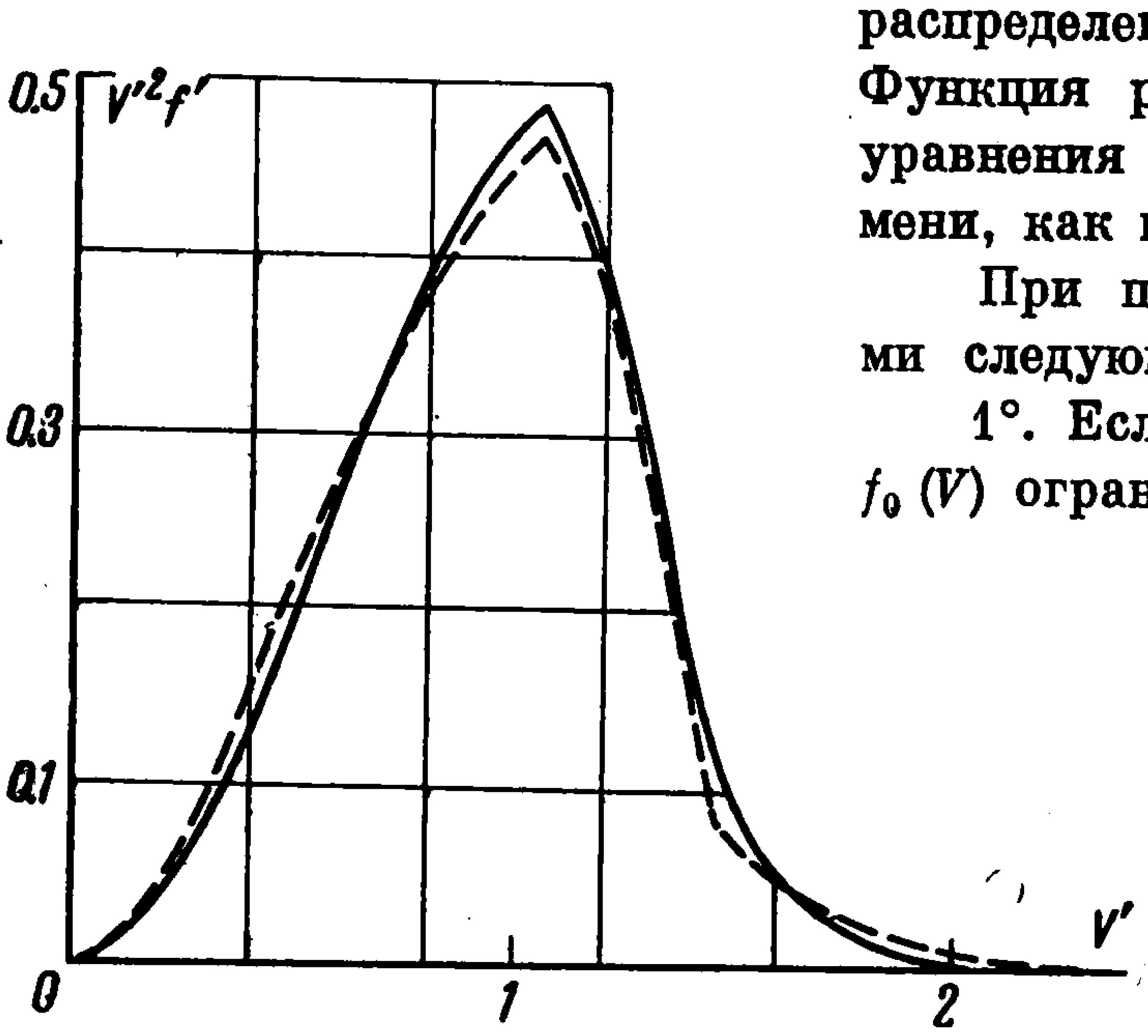
$$\partial f'/\partial t'=(4/5)\left[(9/4\sqrt{2})\exp(-3V'^2/2)-f'\right]$$

Решением начальной задачи Коши этого уравнения является функция

$$f' = f_0'(V')\exp(-4t'/5) + [1 - \exp(-4t'/5)](^9/_4\sqrt{2})\exp(-3V'^2/2) \qquad (10)$$

где $f_0'(V')$ — начальная функция распределения. На фиг. 3 для сравнения решения модельного уравнения с решением уравнения Больцмана приведены графики функции $V'^2 f'(t', V')$ для момента $t' = 1$. За начальную функцию распределения бралась функция распределения со значком $t' = 0$ на фиг. 2. Из графиков видно, что для больших значений скорости V' решение модельного уравнения завышает значение функции распределения в несколько раз. Это приведет к завышению моментов более высокого порядка, чем плотность и температура, вычисленных по функции распределения (10).

Для решения (10) характерно еще то, что в точках V_k', в которых начальная функция распределения $f'_0(V')$ и максвелловская функция распределения $(^9/_4\sqrt{2})\exp(-3V'^2/2)$ имеют одинаковые значения, т. е. $f_0'(V_k') = (^9/_4\sqrt{2})\exp(-3V_k'^2/2)$, значение функции распределения с течением времени не меняется. Функция распределения, являющаяся решением уравнения Больцмана, в точках V'_k с течением времени, как показал счет, меняет свое значение.



Фиг. 3

При проведении расчетов являются полезными следующие два утверждения.

1°. Если начальная функция распределения $f_0(V)$ ограничена, интегралы

$$\int_0^\infty V^2 f_0(V)\,dV, \qquad \int_0^\infty V^4 f_0(V)\,dV$$

сходятся и $f_0(V)$ в отдельных точках V_i имеет конечные разрывы, то в этих же точках будут конечные разрывы и у решения уравнения Больцмана с начальной функцией $f_0(V)$. Эти разрывы исчезают лишь при $t = \infty$.

2°. Если ограниченная и непрерывная начальная функция $f_0(V)$ такова, что сходятся интегралы

$$\int_0^\infty V^2 f_0(V)\,dV \qquad \int_0^\infty V^4 f_0(V)\,dV$$

и существует производная $\partial f_0(V) / \partial V$, которая в отдельных точках может испытывать конечные скачки, то в этих же точках будет скачок производной функции распределения $\partial f(t, V) / \partial V$, который исчезает лишь при $t = \infty$.

Для доказательства первого утверждения запишем уравнение (6) с учетом начального условия при $t = 0$ в интегральной форме

$$f(t, V) = f_0(V)\exp\left[-\int_0^t L(\tau, V)\,d\tau\right] + \int_0^t G(\tau, V)\exp\left[-\int_\tau^t L(s, V)\,ds\right]d\tau \qquad (11)$$

где

$$L(t, V) = 2\pi^2\sigma^2 \int_0^\infty f(t, x)\frac{(V + x)^3 - |V - x|^3}{3V}\,x\,dx$$

$$G(t, V) = 2\pi^2\sigma^2 \int_0^V \int_{\sqrt{V^2 - x^2}}^V f(t, x) f(t, y)\sqrt{x^2 + y^2 - V^2}\,\frac{4xy}{V}\,dy\,dx +$$

$$+ 2\pi^2\sigma^2 \int_0^V f(t, x)\frac{4x^2}{V}\,dx \int_V^\infty f(t, x)\,2x\,dx + 2\pi^2\sigma^2\left(\int_V^\infty f(t, x)\,2x\,dx\right)^2$$

Карлеманом доказано [5], что при сделанных предположениях существует такая постоянная M, что для решения уравнения Больцмана справедливо неравенство $f(t, V) < M_1$ при любых t и V. Так как неопределенный интеграл от ограниченной функции есть функция непрерывная, то

$$\exp\left[-\int_0^t L(\tau, V)\,d\tau\right], \qquad \int_0^t G(\tau, V)\exp\left[-\int_\tau^t L(s, V)\,ds\right]d\tau$$

будут непрерывными функциями t и V.

Следовательно, из-за наличия разрыва у $f_0(V)$ функция $f(t, V)$ будет иметь разрыв в тех же точках V_i, что и $f_0(V)$.

Из интегрального представления (11) видно, что первое слагаемое с течением времени стремится к нулю. Действительно, из H-теоремы следует, что f при $t \to \infty$ стремится к максвелловской функции распределения, поэтому $L(t, V)$ при $t \to \infty$ стремится к величине $L(\infty, V)$, которая больше некоторой положительной величины при любом V. Отсюда следует, что

$$\int_0^t L(\tau, V)\,d\tau \to +\infty \quad \text{при } t \to \infty$$

а это означает, что первое слагаемое в (11) обращается в нуль.

Докажем утверждение 2°. При предположениях, сделанных во втором утверждении, справедлива теорема Карлемана III ([5], ч. I, гл. II, § 1), говорящая о том, что $f(t, V)$ является ограниченной и равностепенной непрерывной функцией V.

Дифференцируя уравнение (11) по V и применяя те же рассуждения, что и при доказательстве первого утверждения, а также используя свойство непрерывности $f(t, V)$ по переменной V, придем к выводу, что производная $\partial f/\partial V$ будет иметь разрывы в тех же точках, что и $\partial f_0/\partial V$. По тем же причинам, что и в утверждении 1°, эти разрывы исчезают при $t \to \infty$.

Поступила 17 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуров К. П. О времени релаксации в двухтемпературной смеси классических газов. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 5, стр. 1641—1647.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Арсеньев А. А. Задача Коши для линеаризованного уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 5, стр. 1104—1106.
4. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, стр. 425—432.
5. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ С УЧЕТОМ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЛУЧИСТОГО ДАВЛЕНИЯ

Г. С. Бисноватый-Коган (Москва)

§ 1. Основные уравнения и безразмерные параметры. Система уравнений газодинамики, описывающая стационарное движение идеального газа с излучением в сферически симметричном поле тяжести имеет вид [1]

$$u\frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} \tag{1.1}$$

$$\rho u\frac{dE}{dr} = \frac{P}{\rho}u\frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\lambda r^2\frac{dT}{dr}\right), \qquad \lambda = \frac{4\sigma cT^3}{3\varkappa\rho} \tag{1.2}$$

$$\rho u r^2 = \mu \tag{1.3}$$

$$E = \frac{3}{2}RT + \frac{\sigma T^4}{\rho}, \qquad P = \rho RT + \frac{\sigma T^4}{3}, \qquad R = \frac{k}{m_p}(2X + 0.75Y + 0.5Z) \tag{1.4}$$