

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИБРАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

В. А. Пальмов (Ленинград)

Рассматривается задача о распространении гармонической вибрации в полубесконечном стержне с нелинейными свойствами. Решение основано на использовании метода гармонической линеаризации.

Задача о распространении колебаний в нелинейных средах имеет большой практический интерес. Она изучается в нелинейной акустике [1] и в нелинейной оптике [2]. Далее, такой важный эффект, как внутреннее трение в материалах описывается, вообще говоря, нелинейными уравнениями [3]. При описании динамических свойств сложных конструкций в ряде случаев можно аппроксимировать конструкцию сплошной средой. Свойства этой среды часто оказываются нелинейными. В обоих последних случаях нелинейными являются определяющие уравнения, т. е. уравнения, связывающие усилия с деформациями. К этому же кругу задач относятся задачи о вибрациях в таких классических нелинейных средах, как упруго-пластическая, жестко-пластическая, упруго-вязко-пластическая, среды с упрочнением и т. д.

Отметим, что задачи о нестационарных возмущениях в классических нелинейных средах в течение ряда лет привлекают внимание большого числа исследователей (см., например, [4-6] и др.). Вибрации, насколько это известно автору, не рассматривались.

В настоящей работе задача о вибрациях решается в простейшем случае полубесконечного стержня для некоторых видов нелинейностей. Решение является приближенным и дает ясную картину поля вибраций.

1. Рассмотрим продольные вибрации в однородном полубесконечном стержне  $x > 0$ . Уравнение динамики стержня таково

$$\partial Q / \partial x - m \partial^2 u / \partial t^2 = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  — смещение сечения стержня в направлении оси  $x$ ,  $Q$  — растягивающая сила в этом сечении,  $t$  — время,  $m$  — погонная масса стержня, которая, по предположению, постоянна. Полагаем, что деформация в стержне мала, так что для нее справедливо выражение

$$\varepsilon = \partial u / \partial x \quad (1.2)$$

не содержащее нелинейных слагаемых.

Полагаем, далее, что определяющее уравнение имеет вид

$$Q = Q(\varepsilon, \partial \varepsilon / \partial t) \quad (1.3)$$

так что растягивающая сила в любом сечении стержня зависит только от деформации и скорости ее изменения в этом же сечении. Для упрощения предполагаем, что функция  $Q$  является нечетной функцией своих аргументов.

В качестве граничного условия при  $x = 0$  принимается одно из условий вида

$$u = A_0 \cos \omega t, \quad Q = B_0 \cos \omega t \quad (1.4)$$

При  $x \rightarrow \infty$  переменные  $u$  и  $\varepsilon$  должны стремиться к нулю.

2. Одним из наиболее простых и эффективных приближенных методов теории нелинейных колебаний является метод гармонической линеаризации. Он широко применяется в теории автоматического регулирования и теории виброзащитных систем для анализа нелинейных систем с конечным числом степеней свободы [7, 8]. Существенной особенностью этого метода является простота и исключительная ясность физических результатов, получаемых при его использовании. В предлагаемой работе он применяется к анализу простейших нелинейных систем с распределенными параметрами.

В соответствии с методом гармонической линеаризации, полагаем, что деформация  $\varepsilon$  в каждом сечении изменяется во времени по закону, близкому к гармоническому

$$\varepsilon = a(x) \cos [\omega t - \varphi(x)] \quad (2.1)$$

Здесь  $a$  — амплитуда деформации,  $\varphi$  — ее фаза для сечения с координатой  $x$ .

Далее, нелинейную функцию  $Q(\varepsilon, \partial\varepsilon/\partial t)$  в (1.3) аппроксимируем линейной

$$Q(\varepsilon, \partial\varepsilon/\partial t) \approx q\varepsilon + (r/\omega)\partial\varepsilon/\partial t \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $q$  и  $r$  здесь не зависят от времени и выбираются из требования равенства амплитуды и фазы гармоники частоты  $\omega$  в правой и левой частях равенства (2.2) при гармоническом движении (2.1). Показано, что  $q$  и  $r$ , удовлетворяющие этому требованию, таковы [7, 8]:

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} Q(a \cos \psi - a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad r = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} Q(a \cos \psi - a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (2.3)$$

В результате проведенной линеаризации нелинейное соотношение (1.3) заменяется приближенно линейным (2.2). Внося его в (1.1) и учитывая (1.2), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( q \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{r}{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

Это уравнение по внешнему виду совпадает с уравнением продольных колебаний линейного вязко-упругого стержня. Отличие состоит в том, что в данном случае  $q$  и  $r$  зависят от амплитуды деформации  $a$ , т. е. заранее неизвестны. Поскольку  $q$  и  $r$  зависят от амплитуды деформации, целесообразно продифференцировать уравнение (2.4) по  $x$  и ввести деформацию  $\varepsilon$  в качестве неизвестной функции

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( q\varepsilon + \frac{r}{\omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) - m \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

Подставим в уравнение (2.5) предполагаемое решение (2.1). Обращая в нуль коэффициенты при косинусах и синусах, получим два уравнения для определения неизвестных  $a$  и  $\varphi$ :

$$\frac{d^2(aq)}{dx^2} - (aq) \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + 2 \frac{d(ar)}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + (ar) \frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\omega^2 a = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2(ar)}{dx^2} - (ar) \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - 2 \frac{d(aq)}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - (aq) \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (2.7)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что не всякое решение системы уравнений (2.6), (2.7) представляет решение поставленной выше задачи. Из условий на бесконечности следует, что амплитуда  $a$  должна убывать с ростом  $x$ . Это означает

$$a \geq 0, \quad da/dx \leq 0 \quad (2.8)$$

Разумеется, даже при ограниченных (2.8) решение системы уравнений (2.6), (2.7) при произвольных  $q$  и  $r$  в замкнутой форме построить нельзя. Однако для некоторых частных видов  $q$  и  $r$  такое построение возможно.

Таким образом, составлены уравнения для определения деформации. Перемещение легко найти интегрированием по  $x$  выражения (1.2).

Остановимся на вопросе о том, что же получилось в результате формального применения метода гармонической линеаризации. Исходным пунктом была система уравнений (1.1), (1.2), (1.3), которая эквивалентна одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных. В результате гармонической линеаризации получена система двух обыкновенных нелинейных уравнений (2.6), (2.7). Оказалось, что одна нелинейная задача сведена к другой, тоже нелинейной. Однако, несомненно, последняя задача проще первой.

3. Пусть нелинейное соотношение (1.3) имеет вид

$$Q = G \operatorname{sign} \varepsilon + H \operatorname{sign} (\partial\varepsilon/\partial t) \quad (G, H = \text{const}) \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) — это определяющее уравнение для «материала» с релейными упругой и диссипативной характеристиками. Нетрудно сообразить, что при  $G = 0$  уравнение (3.1) соответствует жестко-пластическому материалу.

Вычисление коэффициентов линеаризации по формулам (2.3) дает

$$q = g / a, \quad r = h / a, \quad g = 4G / \pi, \quad h = 4H / \pi \quad (3.2)$$

Подставив их в уравнения (2.6), (2.7), получим

$$-g \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + h \frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\omega^2 a = 0, \quad -h \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - g \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (3.3)$$

Интегрирование второго уравнения приводит к выражению

$$\varphi = \varphi_0 + g / h \ln (1 + \gamma x) \quad (3.4)$$

где  $\varphi_0$  и  $\gamma$  — постоянные интегрирования. Подставляя (3.4) в первое уравнение (3.3), получим выражение амплитуды

$$a = \frac{g(g^2 + h^2)}{m\omega^2 h^2} \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma x)^2} \quad (3.5)$$

Деформацию  $\varepsilon$  найдем, внося (3.5), (3.4) в (2.1), а перемещение  $u$  — интегрируя  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{g(g^2 + h^2)}{m\omega^2 h^2} \operatorname{Re} \frac{\gamma^2 e^{i\omega t - i\varphi_0}}{(1 + \gamma x)^{2+ig/h}} \quad (3.6)$$

$$u = \frac{g(g^2 + h^2)}{m\omega^2 h^2} \operatorname{Re} \frac{\gamma e^{i\omega t - i\varphi_1}}{(1 + ig/h)(1 + \gamma x)^{1+ig/h}} \quad (3.7)$$

Если в сечении  $x = 0$  перемещение изменяется по закону (1.4), постоянные  $\gamma$  и  $\varphi_0$  должны быть выбраны следующим образом:

$$\gamma = \frac{m\omega^2 A_0 h}{g \sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \varphi_0 = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{g}{h} \quad (3.8)$$

Внося эти величины в (3.7), получим окончательно

$$u = \frac{A_0}{1 + \gamma x} \cos \left[ \omega t - \frac{g}{h} \ln (1 + \gamma x) \right] \quad (3.9)$$

Обратим внимание на то, что условия затухания вибрации при  $x \rightarrow \infty$  (2.8) выполнены автоматически.

Из выражения (3.9) следует, что фазовая скорость волн в рассматриваемом стержне

$$v = \frac{\omega h}{g\gamma} (1 + \gamma x) \quad (3.10)$$

увеличивается при удалении от источника вибрации. Амплитуда вибрации  $A(x)$  убывает по закону

$$A(x) = A_0 \left( 1 + \frac{m\omega^2 A_0 h x}{g \sqrt{g^2 + h^2}} \right)^{-1} \quad (3.11)$$

Отсюда легко получается неравенство

$$A(x) < \frac{g \sqrt{g^2 + h^2}}{m\omega^2 h x} \quad (3.12)$$

Амплитуда колебаний вибратора  $A_0$  в это выражение не входит, поэтому для любого фиксированного  $x$  никаким увеличением амплитуды колебаний вибратора нельзя добиться увеличения уровня вибрации выше некоторого предела, зависящего только от свойств «материала» стержня и от значения  $x$ .

Рассмотрим случай жестко-пластического материала. Как указывалось выше, для этого нужно положить  $G = 0$ . Предельный переход в решении (3.6), (3.9) дает

$$x = 0, \quad u = A_0 \cos \omega t, \quad a \rightarrow \infty; \quad x > 0, \quad u = 0, \quad a = 0 \quad (3.13)$$

Вывод таков: в стержне из жестко-пластического материала вибрация локализуется в сечении  $x = 0$ , в котором расположен вибратор.

4. Пусть определяющее уравнение имеет вид

$$Q = c\varepsilon + H \operatorname{sign} (\partial\varepsilon / \partial t) \quad (4.1)$$

В этом законе легко узнается закон деформирования жестко-пластического материала с линейным упрочнением и при учете эффекта Баушингера.

Коэффициенты линеаризации таковы:

$$q = c, \quad r = h / a, \quad h = 4H / \pi \quad (4.2)$$

При этом уравнения (2.6), (2.7) принимают вид

$$c \frac{d^2 a}{dx^2} - ca \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + h \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m\omega^2 a = 0 \quad (4.3)$$

$$h \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + 2c \frac{da}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + ca \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \quad (4.4)$$

Общего решения этой системы уравнений, содержащего четыре постоянные интегрирования, построить не удалось. Однако удалось найти решение, содержащее две постоянные интегрирования и удовлетворяющее условиям (2.8). Оно имеет вид

$$a = a_0 - \beta x, \quad \varphi = \varphi_0 + \alpha x \quad (4.5)$$

Непосредственная подстановка в систему уравнений (4.3), (4.4) показывает, что постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  должны иметь следующие значения:

$$\alpha = (m\omega^2 / c)^{1/2}, \quad \beta = \alpha h / 2c \quad (4.6)$$

Постоянные  $a_0$  и  $\varphi_0$  пока произвольны и определяются по условию при  $x = 0$ . Решение вида (4.5) справедливо только для тех  $x$ , при которых  $a > 0$ , т. е. для

$$0 < x < x_*, \quad x_* = a_0 / \beta \quad (4.7)$$

При  $x > x_*$  следует принять

$$a = 0, \quad \varphi = \varphi_* = \varphi_0 + \alpha x_* \quad (4.8)$$

Непосредственная проверка убеждает, что этим решением система уравнений (4.3), (4.4) удовлетворяется. Кроме того, оно непрерывно сопрягается с решением (4.5). Подставив найденные выражения амплитуды и фазы в (2.1), получим для деформации

$$\varepsilon = (a_0 - \beta x) \cos(\omega t - \varphi_0 - \alpha x) \quad (0 < x < x_*), \quad \varepsilon = 0 \quad (x > x_*) \quad (4.9)$$

Пусть граничным условием при  $x = 0$  является второе условие (1.4). Удовлетворяя ему с использованием линеаризованного выражения силы  $Q$ , получим следующие значения постоянных интегрирования:

$$a_0 = \sqrt{B_0^2 - h^2} / c, \quad \varphi_0 = \arctg(h / a_0 c) \quad (4.10)$$

Отсюда видно, что построенное решение имеет смысл только тогда, когда амплитуда силы, приложенной в сечении  $x = 0$ , больше  $h$ . С физической точки зрения это означает, что сила  $B_0$  должна превосходить предел текучести  $H$  в законе (4.1). Если сила  $B_0$  меньше  $H$ , движения в стержне вообще не происходит.

Перемещение  $u$  в рассматриваемой задаче найдем интегрированием выражения деформации (4.9). Результат таков:

$$u = - \frac{a_0 - \beta x}{\alpha} \sin(\omega t - \varphi_0 - \alpha x) + \frac{h}{2\alpha c} [\cos(\omega t - \varphi_0 - \alpha x) - \cos(\omega t - \varphi_0 - \alpha x_*)], \quad 0 < x < x_*$$

$$u = 0, \quad x > x_* \quad (4.11)$$

Отсюда видно, что в начальной зоне стержня перемещение представляет суперпозицию бегущей и стоячей волн. При  $x > x_*$  движение отсутствует. Координата границы зоны движения  $x_*$  получается подстановкой выражений (4.10), (4.6) в (4.7)

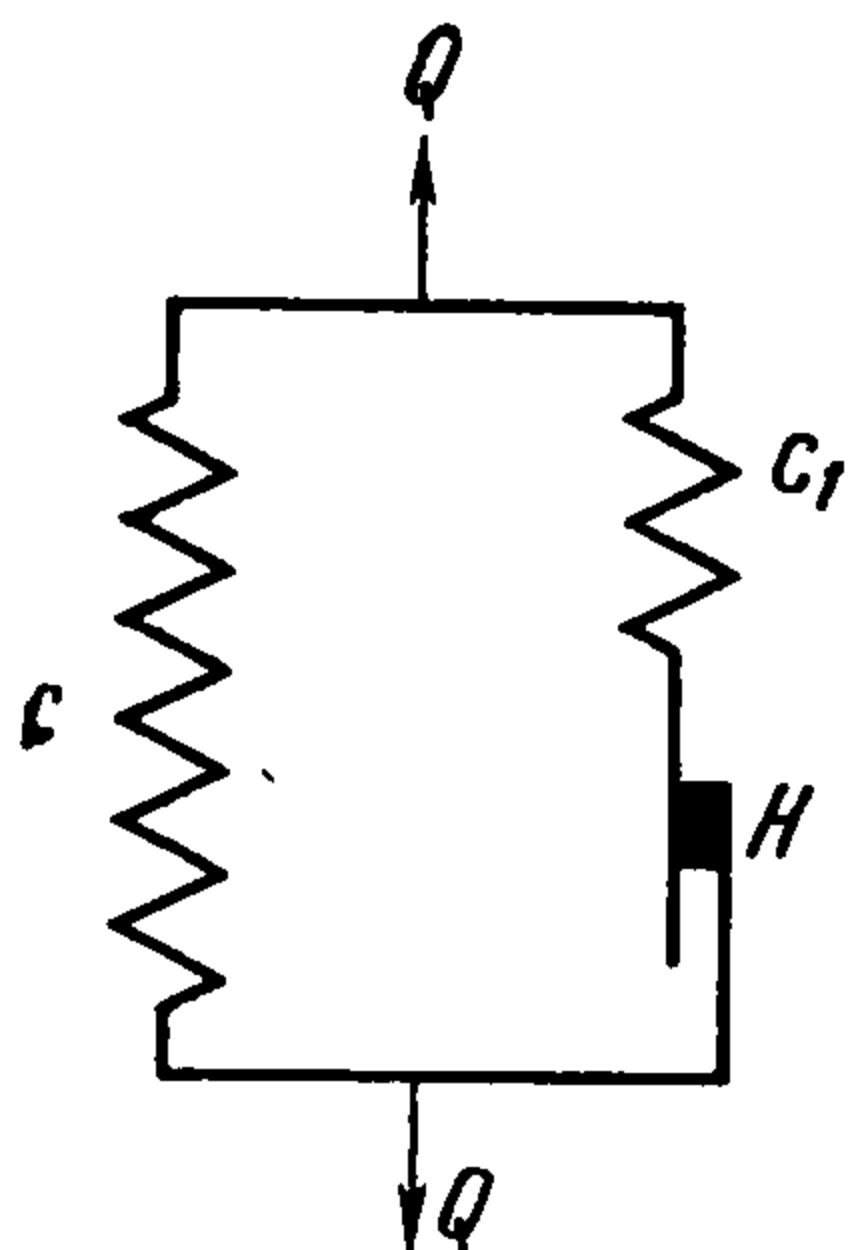
$$x_* = \frac{2 \sqrt{B_0^2 - h^2}}{h} \left( \frac{c}{m\omega^2} \right)^{1/2} \quad (4.12)$$

5. Пусть материал стержня является упруго-пластическим с линейным законом упрочнения. При развитых пластических деформациях поведение стержня описывается системой уравнений

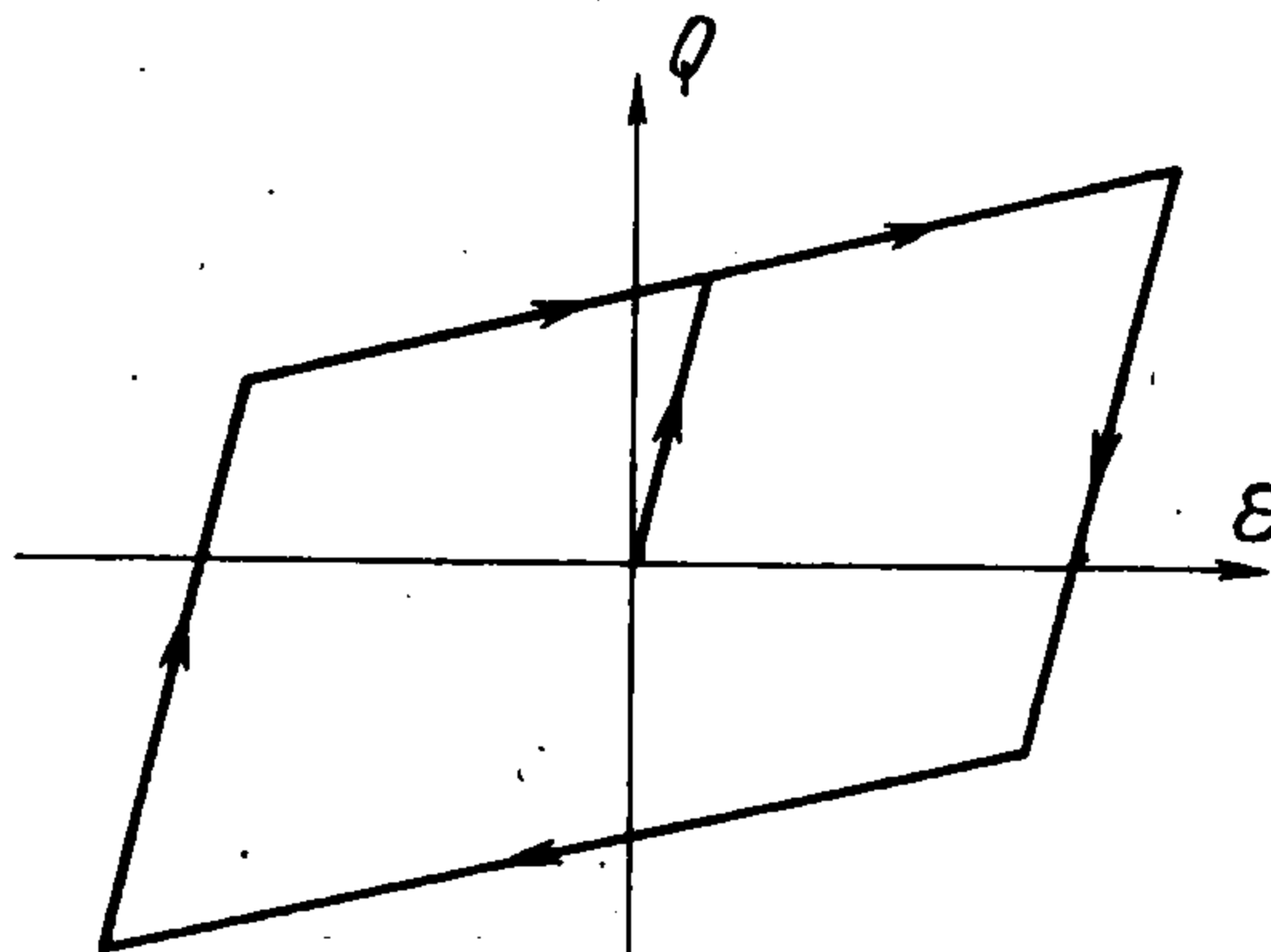
$$Q = c\varepsilon + c_1(\varepsilon - \varepsilon_1), \quad c_1(\varepsilon - \varepsilon_1) = H \operatorname{sign}(\partial\varepsilon_1 / \partial t) \quad (5.1)$$

Здесь  $\varepsilon_1$  — пластическая деформация (фиг. 1).

Функция  $\operatorname{sign}(\partial\varepsilon_1 / \partial t)$  равна  $+1$  при положительной скорости пластической деформации и  $-1$  при отрицательной. Будем далее считать, что при нулевой скорости пластической деформации  $\operatorname{sign}$  принимает такое значение в интервале  $(-1, +1)$ , которое диктуется вторым уравнением (5.1). При таком определении функции  $\operatorname{sign}$  си-



Фиг. 1



Фиг. 2

стема уравнений (5.1) пригодна для описания процессов нагружения и разгрузки стержня как при наличии пластических деформаций, так и при их отсутствии, причем учитывается эффект Баушингера (фиг. 2).

Анализ уравнений (5.1) приводит к следующим выводам. При отсутствии пластической деформации жесткость стержня равна  $c + c_1$ . Пластическая деформация начинается при достижении растягивающей силой  $Q$  величины  $H(c + c_1) / c_1$ . Упрочнение стержня определяется параметром  $c$ .

Остановимся на вопросе о граничных условиях при  $x \rightarrow \infty$ . В упруго-пластическом стержне возможен такой режим движения, при котором пластические деформации не возникают. Но тогда вибрация может и не стремиться к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , как предполагалось выше. Поэтому в качестве граничного условия следует принять условие излучения Зоммерфельда. Оно утверждает, что волны уходят в бесконечность и не возвращаются.

В соответствии с методом гармонической линеаризации положим

$$\varepsilon_1 = b \cos(\omega t - \psi) \quad (5.2)$$

где  $b$  и  $\psi$  — амплитуда и фаза пластической деформации.

Далее, нелинейную функцию в (5.1) аппроксимируем линейной [7,8].

$$H \operatorname{sign}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right) \approx \frac{h}{b\omega} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}, \quad h = \frac{4H}{\pi}$$

Подставим эту аппроксимацию в (5.1) и найдем выражения  $\varepsilon$  и  $Q$  через  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{h}{c_1 b \omega} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}, \quad Q = c\varepsilon_1 + \left(\frac{c}{c_1} + 1\right) \frac{h}{b\omega} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} \quad (5.3)$$

Дифференцируя (1.1) по  $x$  и используя формулы (1.2) и (5.3), получим уравнение для определения пластической деформации

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c\varepsilon_1 + \left(\frac{c}{c_1} + 1\right) \frac{h}{b\omega} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} \right] - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \varepsilon_1 + \frac{h}{b\omega} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.4)$$

Подставим, наконец, в уравнение (5.4) выражение  $\varepsilon_1$  по формуле (5.2), и, собирая коэффициенты при косинусах и синусах, приходим к системе двух обыкновенных уравнений для определения амплитуды и фазы пластической деформации

$$c \left[ \frac{d^2 b}{dx^2} - \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 b \right] + h \left( \frac{c}{c_1} + 1 \right) \frac{d^2 \psi}{dx^2} + m\omega^2 b = 0 \quad (5.5)$$

$$-c \left[ b \frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2 \frac{db}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right] - \left( \frac{c}{c_1} + 1 \right) h \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2 h}{c_1} = 0 \quad (5.6)$$

Записанная система уравнений имеет решение

$$b = b_0 - \beta x, \quad \psi = \psi_0 + \alpha x \quad (5.7)$$

где  $b_0$  и  $\psi_0$  — постоянные интегрирования,  $\alpha$  и  $\beta$  легко находятся подстановкой выражений (5.7) в систему уравнений (5.5), (5.6)

$$\alpha = (m\omega^2 / c)^{1/2}, \quad \beta = h\alpha / 2c \quad (5.8)$$

Решение (5.7) имеет смысл только для той области стержня, где амплитуда  $b$  положительна, т. е. для  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 < x < x_*, \quad x_* = b_0 / \beta \quad (5.9)$$

При  $x > x_*$  следует принять

$$\left( \psi_* = \psi_0 + \alpha x_*, \quad \gamma = \left( \frac{m\omega^2}{c + c_1} \right)^{1/2} \right) \quad b = 0, \quad \psi = \psi_* + \gamma(x - x_*) \quad (5.10)$$

Непосредственная подстановка решения (5.10) в систему уравнений (5.5), (5.6) показывает, что оно удовлетворяет системе. Кроме того, оно непрерывно сопрягается с решением (5.7) для области  $0 < x < x_*$ . Именно, при  $x = x_*$  непрерывны амплитуда и фаза пластической деформации  $\varepsilon_1$ . Но в силу соотношений (5.3) при этом непрерывными оказываются полная деформация и усилие в стержне. Таким образом, при  $x > x_*$  пластическая деформация равна нулю. Построенное решение удовлетворяет граничному условию на бесконечности, ибо  $d\Psi / dx > 0$ ,  $b = 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

6. Определим постоянные интегрирования и найдем основные переменные задачи — полную деформацию  $\varepsilon$  и перемещение  $u$ . Сделать это удобнее всего, переходя к комплексной форме записи решения (5.2)

$$\varepsilon_1 = b e^{i\omega t - i\psi} \quad (6.1)$$

Переход к комплексной форме возможен в силу линейности соотношений (5.3) относительно  $\varepsilon_1$ . Разумеется, физический смысл имеет лишь вещественная часть выражения (6.1) и всех последующих. Внося (6.1) в (5.3), получим

$$Q = \left[ cb + ih \left( \frac{c + c_1}{c_1} \right) \right] e^{i\omega t - i\psi}, \quad \varepsilon = \left( b + \frac{ih}{c_1} \right) e^{i\omega t - i\psi} \quad (6.2)$$

Используя соотношение (6.2) и граничное условие (2.4), при  $x = 0$ , легко найдем начальные значения амплитуды и фазы пластической деформации

$$b_0 = \frac{1}{c} \left[ B_0^2 - h^2 \left( \frac{c + c_1}{c_1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \psi_0 = \arctg \frac{h(c + c_1)}{cc_1 b_0} \quad (6.3)$$

Отсюда видно, что построенное решение имеет смысл только тогда, когда амплитуда вынуждающей силы удовлетворяет неравенству

$$B_0 > h(c + c_1) / c_1 \quad (6.4)$$

Это — условие возникновения пластических деформаций в стержне. Оно является приближенным и отличается от точного лишь несущественным множителем  $4/\pi$ , входящим в  $h$ .

Из формулы (6.2) видно, что амплитуда деформации имеет следующий вид:

$$a = (b^2 + h^2 / c_1^2)^{1/2} \quad (6.5)$$

или, с учетом явного выражения  $b$  (6.6)

$$a = [(b_0 - \beta x)^2 + h^2 / c_1^2]^{1/2} \quad (0 < x < x_*), \quad a = h / c_1 \quad (x > x_*)$$

Отсюда следует, что на начальном участке стержня амплитуда деформации уменьшается от своего максимального значения в сечении  $x = 0$  до значения  $h / c_1$  и далее остается неизменной и по существу равной максимальной упругой деформации.

Найдем перемещение  $u$ . Для этого внесем в (6.2) явное выражение  $b$  и  $\psi$  по формулам (5.7), (5.10) и проведем интегрирование по  $x$  с учетом требования непрерывности  $u$  при  $x = x_*$  и условия излучения при  $x \rightarrow \infty$ . Результат таков:

$$\begin{aligned} 0 < x < x_*, \quad u &= \left( i \frac{b}{\alpha} - \frac{h}{c_1 \alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) e^{i\omega t - i\psi} + \left[ \frac{h}{c_1} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{\beta}{\alpha^2} \right] e^{i\omega t - i\psi_*} \\ x > x_*, \quad u &= - \frac{h}{c_1 \gamma} e^{i\omega t - i\psi} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Входящие сюда величины были определены выше. Из выражения (6.7) видно, что при  $x > x_*$  волна неизменной амплитуды уходит в бесконечность. При  $0 < x < x_*$  вибрация представляет суперпозицию бегущей и стоячей волн, причем бегущая волна убывает по амплитуде при удалении от источника вибрации.

7. Остановимся на некоторых выводах. Сечение  $x = x_*$  является границей между областью стержня, в которой происходят пластические деформации, и областью, в которой деформация является чисто упругой. Явное выражение  $x_*$  получим подстановкой в (5.9) выражений  $b_0$  по (6.3) и  $\beta, \alpha$  по (5.8)

$$x_* = \frac{2}{h} \left[ B^2 - h^2 \left( \frac{c + c_1}{c_1} \right)^2 \right]^{1/2} \left( \frac{c}{m\omega^2} \right)^{1/2} \quad (7.1)$$

Отсюда видно, что зона пластических деформаций тем больше, чем больше упрочнение материала стержня, чем меньше его погонная масса и чем ниже частота вибрации. В частности, если материал стержня является идеально пластическим ( $c = 0$ ), то как следует из (7.1),  $x_* = 0$ , т. е. зона пластических деформаций локализована лишь в том сечении, в котором расположен источник вибрации.

Обратим внимание на то, что зона пластических деформаций является в то же время зоной наиболее интенсивной вибрации, т. е. зоной с большими перемещениями. В упругой области ( $x > x_*$ ) амплитуда вибрации минимальна и, как это следует из (6.7), не зависит от силы вибратора, а определяется только свойствами материала стержня и, как видно из выражения  $\gamma$ , частотой: чем выше частота, тем меньше амплитуда вибрации.

Рассмотрим, наконец, мгновенную фотографию стержня. Зона пластических деформаций  $0 - x_*$  представляет собой последовательность участков пластической деформации разных знаков. Число этих участков равно числу экстремумов  $\varepsilon_1$ . Последнее легко находится из формулы (5.2)

$$n = (\psi_* - \psi_0) / \pi \quad (7.2)$$

Подставив сюда необходимые величины, получим

$$n = \frac{2}{\pi h} \left[ B^2 - h^2 \left( \frac{c + c_1}{c_1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.3)$$

Если амплитуда возмущения  $B$  значительно превосходит предел текучести, а упрочнение материалов не слишком велико, то второе слагаемое в квадратной скобке можно отбросить ввиду его малости. Это дает

$$n = 2B / \pi h \quad (7.4)$$

Отсюда видно, что число участков может быть значительным. А это обстоятельство, как известно, затрудняет построение точного решения, ибо в этом случае приходится иметь дело с последовательностью волн нагрузки и «разгрузки» [4,5].

Поступила 14 I 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. З а р е м б о Л. К., К р а с и д ь н и к о в В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Б л о м б е р г е н Н. Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966.
3. П а н о в к о Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960.
4. Ш а п и р о Г. С. Продольные колебания стержня. ПММ, 1946, т. 10, вып. 5—6, стр. 597—617.
5. Р а х м а т у л и н Х. А., Ш а п и р о Г. С. О распространении плоских упруго-пластических волн. ПММ, 1948, т. 12, вып. 4, стр. 370—374.
6. Б а р е н б л а т т Г. И., И ш л и н с к и й А. Ю. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 497—502.
7. П о п о в Е. П., П а л ь т о в И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
8. К о л о в с к и й М. В. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., «Наука», 1966.

## РЕЛАКСАЦИЯ ГАЗА, ОПИСЫВАЕМОГО КИНЕТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ БОЛЬЦМАНА

В. А. Рыков (Москва)

Рассматривается задача о релаксации классического газа к максвелловской функции распределения для случая, когда начальная неравновесная функция распределения зависит только от модуля скорости. Пятикратный интеграл столкновений Больцмана сведен к двухкратному, что позволило решить задачу численным методом. Упрощение интеграла столкновений проведено и для смеси газов.

Результаты численного счета даны в виде графиков, показывающих изменение функции распределения с течением времени.

Рассмотрим однородный покоящийся газ, молекулы которого являются абсолютно твердыми, гладкими шарами с диаметром  $\sigma$  и массой  $m$ .

Состояние такого газа описывается функцией распределения  $f(t, u, v, w)$ , зависящей от времени  $t$  и компонент скоростей молекул  $u, v, w$ .

Уравнение Больцмана для функции распределения  $f$  в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [f(t, u_1', v_1', w_1') f(t, u', v', w') - f(t, u, v, w) f(t, u_1, v_1, w_1)] |q| \sin \theta d\theta d\varphi du_1 dv_1 dw_1 \quad (1)$$

$$u' = u + lq, \quad v' = v + mq, \quad w' = w + nq, \quad u_1' = u_1 - lq$$

$$v_1' = v_1 - mq, \quad w_1' = w_1 - nq, \quad q = l(u_1 - u) + m(v_1 - v) + n(w_1 - w)$$

$$l = \cos \theta, \quad m = \sin \theta \cos \varphi, \quad n = \sin \theta \sin \varphi$$

Для уравнения (1) ставится задача Коши. При  $t = 0$  дана начальная функция распределения  $f = f(t = 0, \sqrt{u^2 + v^2 + w^2})$ , зависящая только от модуля скорости и отличная от максвелловской функции распределения.

Требуется найти функцию распределения, удовлетворяющую уравнению (1) при  $t \geq 0$  и совпадающую с начальной при  $t = 0$ .

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$f = f(t, \sqrt{u^2 + v^2 + w^2})$$