СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМЕ СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ

М. Ф. Диментберг

(Москва)

На примере системы, описываемой уравнением Дуффинга с периодической правой частью, исследуется влияние стационарных случайных изменений собственной частоты на амплитуду субгармонических колебаний системы. Показано, что как и в случае колебаний вблизи основного резонанса [1] указанное влияние «в среднем» сводится к изменениям «эквивалентных» значений собственной частоты и коэффициента затухания; в рассматриваемом случае это приводит к изменению области существования субгармонических колебаний.

Будем исследовать установившиеся субгармонические колебания порядка $^1/_3$ в системе, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+\Omega^2[1+\mu\xi(t)]\,x+\eta x^3=a\cos\omega_0 t \qquad (\omega_0\approx 3\Omega) \tag{1}$$

Здесь a, α, Ω, ω_0, μ, η — постоянные, $\xi(t)$ — стационарная центрированная случайная функция. Введем новую переменную

$$y=x-b_1\cos\omega_0 t, \qquad b_1=a\,(\Omega^2-\omega_0{}^2)^{-1} \tag{2}$$

Процесс $y(t)$ соответствует (по определению) субгармоническим колебаниям. Будем считать величины α, μ, η и $|\omega_0-3\Omega|$ малыми и введем обозначения

$$\alpha=\varepsilon\alpha_1, \qquad \mu=\sqrt{\varepsilon}\mu_1, \qquad \eta=\varepsilon\eta_1, \qquad \Omega^2-(^1/_3\,\omega_0)^2=\varepsilon\Omega\Delta \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в исходное уравнение (1). Перейдя затем к новым переменным z, $\bar z$, определяемым зависимостями

$$y={}^1/_2\,(ze^{^1/_3\,i\omega_0 t}+\bar z e^{-^1/_3 i\omega_0 t}), \qquad dy\,/\,dt={}^1/_6\,i\omega_0\,(ze^{^1/_3 i\omega_0 t}-\bar z e^{-^1/_3 i\omega_0 t})$$

получим систему уравнений в стандартной форме

$$dz\,/\,dt=\sqrt{\varepsilon}Z_1(z,\bar z,t)+\varepsilon Z_2(z,\bar z,t),\; d\bar z\,/\,dt=\sqrt{\varepsilon}\,\bar Z_1(z,\bar z,t)+\varepsilon\bar Z_2(z,\bar z,t) \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Z_1(z,\bar z,t)&=-{}^3/_2\,(i\omega_0)^{-1}\,\mu_1\Omega^2\xi(t)\,[z+\bar z e^{-^2/_3\,i\omega_0 t}+b_1\,(e^{^2/_3 i\omega_0 t}+e^{-^4/_3\,i\omega_0 t})]\\
Z_2(z,\bar z,t)&=-(^1/_3\,i\omega_0)^{-1}\,\{^1/_2\,\Omega\Delta\,(z+\bar z e^{-^2/_3\,i\omega_0 t})+{}^1/_3\,i\omega_0\alpha_1\,(z-\bar z e^{-^2/_3\,i\omega_0 t})+\\
&+\alpha_1\omega_0 b_1\,(e^{^2/_3\,i\omega_0 t}-e^{-^4/_3\,i\omega_0 t})+\eta_1\,[^1/_8\,(z^3e^{^2/_3\,i\omega_0 t}+3z^2\bar z+3z\bar z^2e^{-^2/_3\,i\omega_0 t}+\bar z^3e^{-^4/_3\,i\omega_0 t})+\\
&+{}^3/_8\,b_1\,(z^2e^{^4/_3\,i\omega_0 t}+2z\bar z e^{^2/_3\,i\omega_0 t}+\bar z^2+z^2e^{-^2/_3\,i\omega_0 t}+2z\bar z e^{-^4/_3\,i\omega_0 t}+\bar z^2e^{-2i\omega_0 t})+\\
&+{}^3/_8\,b_1^2\,(ze^{2i\omega_0 t}+2z+ze^{-2i\omega_0 t}+\bar z e^{^4/_3\,i\omega_0 t}+2\bar z e^{-^2/_3\,i\omega_0 t}+\bar z e^{-^8/_3\,i\omega_0 t})+\\
&+{}^1/_8\,b_1^3\,(e^{^8/_3\,i\omega_0 t}+3e^{^2/_3\,i\omega_0 t}+3e^{-^4/_3\,i\omega_0 t}+e^{-^{10}/_3\,i\omega_0 t})]\}
\end{aligned} \tag{5}$$

(Черточками отмечены комплексно-сопряженные величины).

Исследование системы уравнений (4) проводится при помощи метода усреднения, в соответствии с которым к уравнениям в стандартной форме применяется метод Крылова — Боголюбова [2] с последующим усреднением по множеству реализаций. Отметим, что сходимость метода усреднения при $\varepsilon\to 0$ была строго доказана для задач рассматриваемого типа в работе [3], однако метод применялся и раньше [4], причем в работе [4] на основании качественных соображений была установлена оценка области сходимости метода. В работе [1] эта оценка была несколько уточнена на основании сопоставления результатов для случая линейной системы с результатами, полученными путем применения метода последовательных постановок к соответствующему интегральному уравнению.

Применив указанный метод к системе (4), получим уравнения для медленно меняющихся составляющих z_0, $\bar z_0$ средних значений случайных функций z, $\bar z$

$$dz_0 / dt = \varepsilon Z_0 (z_0, \bar z_0), \qquad d\bar z_0 / dt = \varepsilon \bar Z_0 (z_0, \bar z_0) \tag{6}$$

$$Z_0 = P z_0 - {}^9/_8 (i\omega_0)^{-1} \eta_1 b_1 \bar z_0^2, \qquad \bar Z_0 = \bar P \bar z_0 + {}^9/_8 (i\omega_0)^{-1} \eta_1 b_1 z_0^2$$

$$P, \bar P = -\alpha_1 - {}^9/_4 \pi\mu^2\Omega^4\omega_0^{-2} [\Phi (0) - \Phi ({}^2/_3 \omega_0)] \pm ({}^1/_3 i\omega_0)^{-1} [{}^1/_{18} \omega_0^2 - $$
$$ - {}^1/_2 \Omega^2 + {}^3/_4 \pi\mu^2 \Omega^4 \omega_0^{-1} \Psi ({}^2/_3 \omega_0) - {}^3/_8 \eta_1 b^2 - {}^3/_4 \eta_1 b_1^2]$$

$$b = \sqrt{z_0 \bar z_0}, \qquad \Phi (\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K (\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \qquad \Psi (\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K (\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \tag{7}$$

Здесь $K(\tau)$ — корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$.

Приравняв нулю правые части уравнений (6) и возвратившись к исходным обозначениям, найдем, что средняя амплитуда b установившихся субгармонических колебаний определяется корнями следующего биквадратного уравнения:

$$({}^3/_8\eta)^2 b^4 + b^2 \{{}^3/_8 \eta [\Omega_*^2 - ({}^1/_3 \omega_0)^2 + {}^3/_2 \eta b_1^2] - ({}^3/_8 \eta b_1)^2\} + {}^1/_2 [\Omega_*^2 - ({}^1/_3 \omega_0)^2 +$$
$$+ {}^3/_2 \eta b_1^2] + ({}^1/_3 \omega_0 \alpha_*)^2 = 0 \tag{8}$$

$$\alpha_* = \alpha + {}^9/_4 \pi\mu^2\Omega^4 \omega_0^{-2} [\Phi (0) - \Phi ({}^2/_3 \omega_0)], \quad \Omega_*^2 = \Omega^2 - {}^3/_2 \pi\mu^2\Omega^4 \omega_0^{-1} \Psi ({}^2/_3 \omega_0) \tag{9}$$

Уравнение (8) совпадает по форме с известным [5] соответствующим уравнением для системы с постоянными ($\mu = 0$) параметрами. Влияние случайных изменений собственной частоты в среднем сводится, таким образом, к изменению эквивалентных параметров α и Ω согласно формулам (9); определяя дискриминант уравнения (8), можно найти, как при этом изменяется граница области существования субгармонических колебаний.

Пусть, например

$$K (\tau) = \exp (- | \tau | / \tau_0), \qquad \pi\Psi ({}^2/_3 \omega_0) = {}^2/_3 \omega_0\tau_0^2 [1 + ({}^2/_3 \omega_0\tau_0)^2]^{-1}$$
$$\pi [\Phi (0) - \Phi ({}^2/_3 \omega_0)] = {}^4/_9 \omega_0^2\tau_0^3 [1 + ({}^2/_3 \omega_0\tau_0)^2]^{-1} = {}^2/_3 \omega_0\tau_0 \pi \Psi ({}^2/_3 \omega_0)$$

Тогда в случае ${}^2/_3 \omega_0\tau_0 \gg 1$ преобладающую роль играет увеличение эквивалентного коэффициента затухания. Поэтому нетрудно в частности показать, что медленные (по сравнению с удвоенным периодом малых свободных колебаний) случайные изменения собственной частоты должны приводить к уменьшению области существования субгармонических колебаний.

Поступила 12 XI 1966

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг М. Ф. Колебания нелинейной системы с одной степенью свободы при действии периодической силы и изменении собственной частоты по случайному закону. Инж. ж., МТТ, 1966, № 4.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории колебаний. М., Физматгиз, 1963.
3. Хасьминский Р. З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Теория вероятностей и ее применения. 1966, т. 11, вып. 3.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
5. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.