ОЦЕНКА ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

И. А. Непомнящая, Ю. В. Савельев

(Горький)

Ряд задач теории колебаний приводит к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\varphi^{\cdot\cdot} + F(\varphi)\varphi^{\cdot} + f(\varphi) = T \tag{1}$$

где $F(\varphi)$ и $f(\varphi)$ — некоторые периодические функции. Фазовым пространством системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = T - f(\varphi) - F(\varphi)\,y \tag{2}$$

соответствующей уравнению (1), будет цилиндр. При исследовании качественной структуры разбиения фазового цилиндра на траектории часто бывает важно выделить в пространстве параметров системы область существования предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр. Обычно этот вопрос решается исследованием состояний равновесия системы (2) и изучением поведения сепаратрис седел. Как правило, — это кропотливое и трудоемкое исследование.

Ниже показано, как в некоторых случаях на основании почти очевидных соображений, связанных с использованием соответствующим образом подобранной «системы сравнения», порождаемой уравнением

$$\varphi^{\cdot\cdot} + \Phi(\varphi)\varphi^{\cdot 2} + f(\varphi) = T \tag{3}$$

можно указать достаточный критерий существования предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр, и дать оценку области существования в пространстве параметров, не прибегая к изучению поведения сепаратрис седел.

Уравнению (3) соответствует система

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \qquad \frac{dy}{d\tau} = T - f(\varphi) - \Phi(\varphi)\,y^2 \tag{4}$$

Рассмотрим фазовый полуцилиндр $y > 0$ систем (2) и (4). Он не содержит состояний равновесия, так как все они располагаются на оси y.

Если для системы (2) бесконечность неустойчива, если в некоторой области $G\,(0 < y_1 < y < \infty)$ цилиндрического фазового пространства векторное поле, соответствующее системе (2), в каждой точке повернуто по отношению к векторному полю, соответствующему системе (4), на положительный угол, а система (4) имеет устойчивый предельный цикл в области G, то и система (2) будет иметь устойчивый предельный цикл в G. Утверждение почти очевидно. Траектория $L\,(t - t_0)$ системы (2), пересекающая при $t = t_0$ и $\tau = \tau_0$ под положительным углом траекторию $L^*\,(\tau - \tau_0)$ системы (4), накручивающуюся сверху на предельный цикл в области G, не может пересечь предельный цикл при $t = t_1 > t_0$ и $\tau = \tau_1 > \tau_0$ так как это противоречило бы предположению о знаке поворота векторного поля и поэтому не может идти к состоянию равновесия. Так как траектория не может уходить в бесконечность (бесконечность неустойчива), она должна накручиваться на предельный цикл, расположенный сверху предельного цикла системы (4).

Эффективное использование системы (4) как системы сравнения опирается на возможность непосредственного ее интегрирования и проистекающую отсюда возможность найти уравнение предельного цикла системы сравнения, если он существует.

Пример 1. Рассмотрим систему [1-3]

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = T - \sin\varphi - r\sin 2\varphi - h\,(1 - b\cos 2\varphi)\,y, \qquad |b| < 1 \tag{5}$$

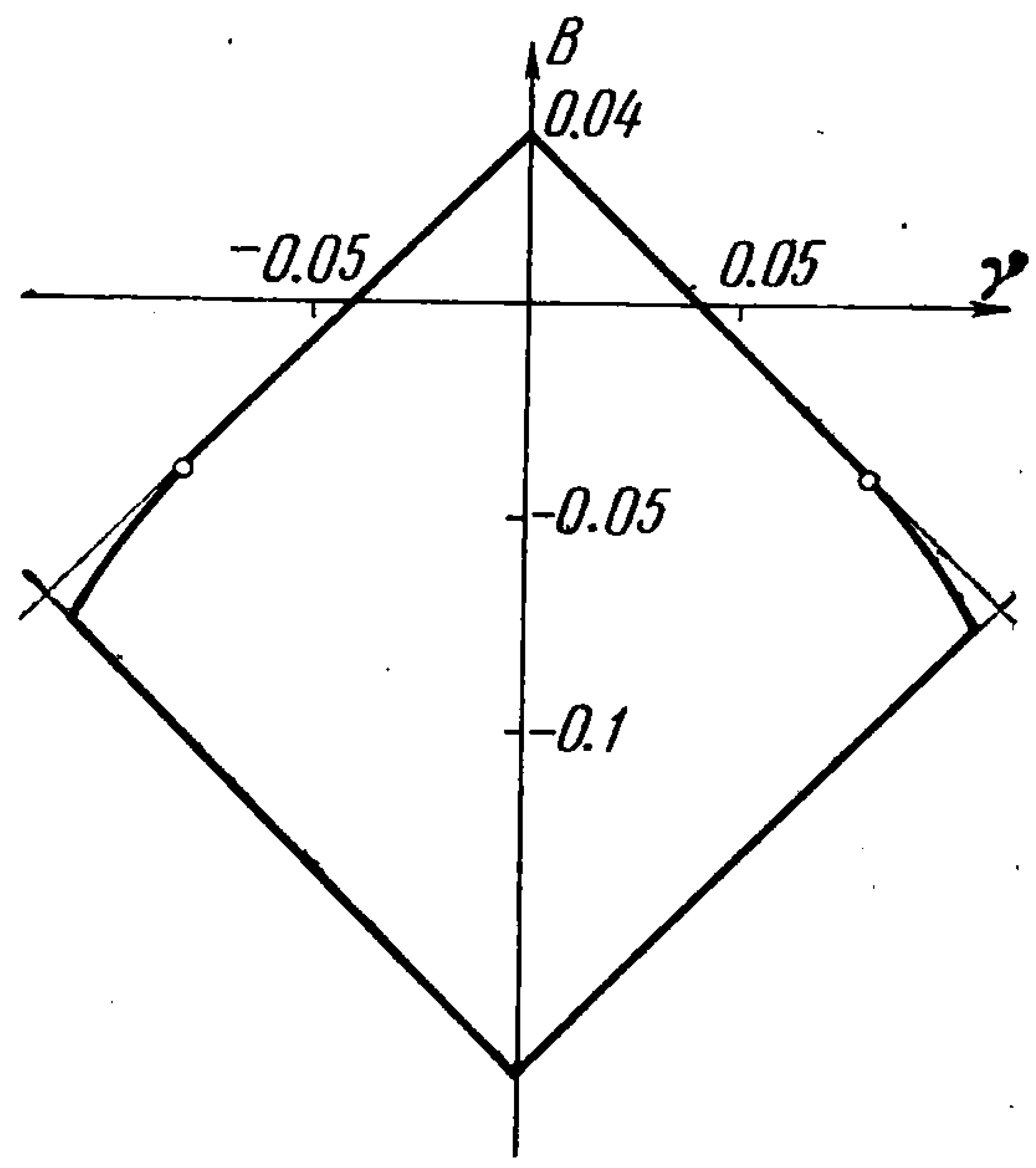
и систему сравнения

$$\frac{d\varphi}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=T-\sin\varphi-r\sin 2\varphi-hy^2 \tag{6}$$

Здесь, T, r, h — положительные параметры. Система (6) имеет на цилиндрической фазовой поверхности семейство интегральных кривых

$$y^2=\frac{T}{h}-\frac{2}{\sqrt{1+4h^2}}\sin(\varphi+\theta_0)-\frac{r}{\sqrt{1+h^2}}\sin(2\varphi+\theta_1)+ce^{-2h\varphi} \tag{7}$$

Значению $c=0$ в (7) соответствует устойчивый предельный цикл системы (6), если значения параметров системы таковы, что правая часть (7) при $c=0$ для всех φ остается положительной. Касание траекторий систем (5) и (6) происходит вдоль «контактной кривой» $1-b\cos 2\varphi=y$, наибольшая ордината которой $1+|b|$. Векторное поле системы (5) будет повернуто в положительном направлении относительно векторного поля системы (6) для всех $y>1+|b|$. Для минимума ординаты предельного цикла системы (6), очевидно, справедлива оценка



$$y_{\min}^2>\frac{T}{h}-\frac{2}{\sqrt{1+4h^2}}-\frac{r}{\sqrt{1+h^2}}$$

Неравенство

$$\frac{T}{h}-\frac{2}{\sqrt{1+4h^2}}-\frac{r}{\sqrt{1+h^2}}\geqslant(1+|b|)^2 \tag{8}$$

выделяет в пространстве параметров $T>0$, $r>0$, $h>0$, $|b|<1$ область, для точек которой система (5) заведомо будет иметь предельный цикл (бесконечность для системы (5) неустойчива, так как $h>0$ и $|b|<1$).

Пример 2. Рассмотрим систему, описывающую автоколебания синхронного мотора

$$\frac{d\varphi}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=T-\sin\varphi-(A+B\sin^2\varphi-\gamma\sin\varphi)\,y \tag{9}$$

Здесь T и A — положительные параметры. Уравнение (9) исследовалось в [4–6] методом малого параметра. Используя систему сравнения

$$\frac{d\varphi}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=T-\sin\varphi-\lambda y^2 \tag{10}$$

с неопределенным пока положительным параметром λ, можно, не вводя малый параметр в (9), выделить в пространстве параметров $T>0$, $A>0$, B и γ некоторую область, для точек которой система (9) будет иметь устойчивый предельный цикл. Ограничимся случаем $T<1$, представляющем наибольший интерес. Система (10) имеет на цилиндрической фазовой поверхности семейство интегральных кривых

$$y^2=ce^{-2\lambda\varphi}+\frac{T}{\lambda}+\frac{2}{\sqrt{4\lambda^2+1}}\sin(\varphi+\varphi_0) \tag{11}$$

Значению $c=0$ в (11) соответствует устойчивый предельный цикл, если

$$V_0=y_{\min}^2\equiv\frac{T}{\lambda}-\frac{2}{\sqrt{4\lambda^2+1}}>0$$

Контактная кривая для систем (9) и (10) будет

$$y=\lambda^{-1}(A+B\sin^2\varphi-\gamma\sin\varphi) \tag{12}$$

Заметим, что условие неустойчивости бесконечности для системы (9) (коэффициент при y принимает только положительные значения) совпадает с условием $y > 0$ для контактной кривой (12). Потребуем, чтобы контактная кривая была расположена на фазовом цилиндре в области $y > 0$ и «ниже» предельного цикла системы сравнения (10). Для значений параметров T, A, B и γ, для которых это требование выполняется, в области «выше» предельного цикла системы (10) векторное поле системы (9) будет повернуто в положительном направлении относительно векторного поля системы (10), бесконечность для (9) будет неустойчива, и система (9) будет иметь в рассматриваемой области по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Для существования предельного цикла системы (9) достаточно, чтобы выполнялись неравенства $f\ (A,\ B, \gamma) > 0$ и $F^2\,(A, B, \gamma) < y_{\min}^2 \equiv V_0$, где $f\,(A, B, \gamma)$ и $F\,(A, B, \gamma)$ соответственно минимум и максимум контактной кривой (12). Эти неравенства приводят соответственно к двум группам неравенств:

$$\begin{aligned} A + B - \gamma &> 0 \quad && \text{при } \gamma - 2B \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0 \\ A + B + \gamma &> 0 \quad && \text{при } \gamma + 2B \leqslant 0,\ \gamma \leqslant 0 \\ A - {}^1/_4\,\gamma^2 / B &> 0 \quad && \text{при } \gamma - 2B \leqslant 0,\ \gamma + 2B \geqslant 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} (A + B - \gamma)^2 &< c_0^2 \quad && \text{при } \gamma - 2B \leqslant 0,\ \gamma \leqslant 0 \quad (c_0 = \lambda y_{\min}) \\ (A + B + \gamma)^2 &< c_0^2 \quad && \text{при } \gamma + 2B \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0 \\ (A - {}^1/_4\,\gamma^2 / B)^2 &< c_0^2 \quad && \text{при } \gamma - 2B \geqslant 0,\ \gamma + 2B \leqslant 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Область, выделяемая неравенствами (13) и (14) в пространстве параметров T, A, B и γ, существенно зависит от параметра λ системы сравнения (10). Допустимые значения λ лежат в интервале $0 < \lambda < T / 2\sqrt{1 - T^2}$, соответствующем условию $V_0 > 0$. Для того чтобы область значений параметров A, B, γ при некотором фиксированном $T < 1$ была наибольшей, должно быть выбрано такое λ, при котором кривая

$$c_0^2\,(\lambda) \equiv T\lambda - \frac{2\lambda^2}{\sqrt{4\lambda^2 + 1}}$$

имеет максимум. Это приводит к условию,

$$T\,(4\lambda^2 + 1)^{3/2} - 4\lambda\,(2\lambda^2 + 1) = 0$$

позволяющему по заданному $T < 1$, однозначно определить λ.

На фиг. в плоскости параметров B и γ для фиксированных $A = 0.18$, $T = {}^2/_3$ выделена область, для точек которой система (9) имеет устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Значению $T = {}^2/_3$ соответствует $\lambda = 0.19$, при котором $c_0^2\,(\lambda)$ имеет наибольшее значение.

В заключение авторы благодарят Н. Н. Баутина за ценные указания.

Поступила 2 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. K u Y. H. Nonlinear Analysis of electromechanical problemes. J. Franklin Inst., 1953, vol. 255.
2. Б е л ю с т и н а Л. Н. Об одном уравнении из теории электрических машин. АН СССР — В сб.: Памяти А. А. Андронова, Изд. АН СССР, 1955.
3. K u Y. H. Analisis and Control of Nonlinear System. N. Y. Ronald, 1958.
4. В л а с о в Н. П. Автоколебания синхронного мотора. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1939, т. 12, вып. 3.
5. Г е р ш т Е. Н. Качественное исследование одного дифференциального уравнения теории электрических машин. Изв. АН СССР. Механ. и машиностроение, 1964, № 1.
6. Г е р ш т Е. Н. Качественное исследование одного дифференциального уравнения теории электрических устройств. Инж. ж. МТТ, 1966, № 1.