ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ОРБИТ СПУТНИКОВ В НОРМАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ДИПОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Г. Дегтярев

(Ленинград)

Магнитные силы относятся к числу сил, не оказывающих заметного влияния на характер орбиты спутника. Эти силы учитывают в задачах о движении спутников около центра масс, но не учитывают в задачах об их орбитальном движении.

При исследовании устойчивости магнитные силы следует учитывать так как нередко даже весьма слабые силы становятся причиной неустойчивости движения. В задачах коррекции орбит, например, также весьма важно знать, какие силы оказывают существенное влияние на орбиты искусственных спутников Земли, а какие можно практически не учитывать.

Исследованием устойчивости круговых движений в гравитационных полях занимались Н. Г. Четаев [1], Г. Н. Дубошин [2], В. Г. Демин [3, 4], Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников [4], В. Г. Дегтярев [5–7].

В данной работе исследуется устойчивость круговых движений в осесимметричном гравитационном и дипольном магнитном полях планет. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости. Для спутников Земли доказывается, что уравнения движения допускают лишь круговые экваториальные орбиты, для которых условия устойчивости выполняются.

§ 1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассматривается движение спутника массы m в гравитационном и магнитном полях планеты. Система координат— прямоугольная, планетоцентрическая, с осью z, направленной вдоль оси вращения планеты.

Предполагается, что гравитационное поле имеет ось симметрии (ось z), т. е. потенциал гравитационного поля имеет вид $U = U(\rho, z)$, где $\rho^2 = x^2 + y^2$.

На борту искусственного спутника могут быть проводники с током, батареи, конденсаторы, электромагниты, поэтому, наряду с гравитационными силами, на спутник может действовать магнитная сила. Как обычно, при исследовании движения центра масс спутника будем считать спутник точкой с массой m, равной общей массе спутника, а зарядом e, равным общему заряду. Тогда магнитная сила, согласно формуле Лоренца, равна $ec^{-1}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости спутника, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, c — скорость света. Если магнитное поле имеет потенциал V, то $\mathbf{H} = \operatorname{grad} V$. Для дипольного магнитного поля с осью z имеем $V = Mz / (\rho^2 + z^2)^{3/2}$, где M — магнитный момент планеты. Для Земли дипольное поле представляет основную часть магнитного поля.

Векторное дифференциальное уравнение движения спутника в гравитационном и магнитном полях планеты будет иметь вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \operatorname{grad} U + \frac{e}{cm}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор спутника. В цилиндрических координатах ρ, ψ, z уравнения движения имеют вид:

$$\rho^{\cdot\cdot} - \rho\psi^{\cdot 2} = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{e}{cm}\rho\psi^{\cdot}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad z^{\cdot\cdot} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{e}{cm}\rho\psi^{\cdot}\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$(\rho^2\psi^{\cdot})^{\cdot} = \frac{e}{cm}\rho\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}z^{\cdot} - \frac{\partial V}{\partial z}\rho^{\cdot}\right) \qquad \left(V = \frac{Mz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Здесь и дальше точка в позиции штриха означает производную по времени. Отсюда, заменив угловую скорость $\dot\psi$ удвоенной секториальной скоростью $\sigma = \rho^2\dot\psi$ с учетом выражения для V, получим

$$\rho^{\cdot\cdot} - \frac{\sigma^2}{\rho^3} = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{k\sigma(\rho^2 - 2z^2)}{\rho(\rho^2+z^2)^{5/2}}, \qquad z^{\cdot\cdot} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{3k\sigma z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} \tag{1.1}$$

$$\sigma^{\cdot} = -\rho\left[\frac{3k\rho z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} z^{\cdot} + \frac{k(\rho^2-2z^2)}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\rho^{\cdot}\right] \qquad \left(k = \frac{eM}{cm}\right)$$

Следовательно, круговые орбиты

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \ z = z_0 = \text{const}, \ \sigma = \sigma_0 = \rho_0^2\,\omega = \text{const} \tag{1.2}$$

озможны при выполнении следующих условий

$$\frac{\sigma_0^2}{\rho_0^3} + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_0 + \frac{k\sigma_0(\rho_0^2 - 2z_0^2)}{\rho_0(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 + \frac{3k\sigma_0 z_0}{(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}} = 0 \tag{1.3}$$

Круговые орбиты (1.2) представляют собой окружности в плоскости, перпендикулярной к оси вращения планеты с центром на этой оси.

Вопрос о том, какие круговые орбиты возможны в гравитационном и магнитном полях Земли будет рассмотрен в § 4.

§ 2. **Необходимые условия устойчивости.** Переходим к выводу условий устойчивости круговых орбит (1.2). Введем следующие обозначения для возмущений:

$$\rho = \rho_0 + x_1, \qquad z = z_0 + x_2, \qquad \sigma = \sigma_0 + x_3, \qquad \dot\rho = \dot x_1, \qquad \dot z = \dot x_2$$

Подставляя эти значения ρ, $\dot\rho$, z, $\dot z$, σ в уравнения (1.1), получим уравнения возмущенного движения

$$x_1^{\cdot\cdot} - \frac{(\sigma_0+x_3)^2}{(\rho_0+x_1)^3} = \frac{\partial U(\rho_0+x_1 z_0+x_2)}{\partial(\rho_0+x_1)} + \frac{k(\sigma_0+x_3)[(\rho_0+x_1)^2 - 2(z_0+x_2)^2]}{(\rho_0+x_1)[(\rho_0+x_1)^2+(z_0+x_2)^2]^{5/2}}$$

$$x_2^{\cdot\cdot} = \frac{\partial U(\rho_0+x_1, z_0+x_2)}{\partial(z_0+x_2)} + \frac{3k(\sigma_0+x_3)(z_0+x_2)}{[(\rho_0+x_1)^2+(z_0+x_2)^2]^{5/2}} \tag{2.1}$$

$$x_3^{\cdot} = -(\rho_0+x_1)\left\{\frac{3k(\rho_0+x_1)(z_0+x_2)}{[(\rho_0+x_1)^2+(z_0+x_2)^2]^{5/2}} x_2^{\cdot} + \frac{k[(\rho_0+x_1)^2 - 2(z_0+x_2)^2]}{[(\rho_0+x_1)^2+(z_0+x_2)^2]^{5/2}} x_1^{\cdot}\right\}$$

Разлагая правые части уравнений (2.1) в ряды по степеням $x_1, x_2, x_3, \dot x_1, \dot x_2$ и ограничиваясь членами первого порядка, можно получить уравнения первого приближения возмущенного движения

$$x_1^{\cdot\cdot} - \alpha_{11}x_1 - \gamma_{12}x_2 - \xi_{13}x_3 = 0, \qquad -\gamma_{21}x_1 + x^{\cdot\cdot}_2 - \beta_{22}x_2 - \xi_{12}x_3 = 0 \tag{2.2}$$

$$\eta_{21}\dot x_1^{\cdot} + \eta_{22}x_2^{\cdot} + x_3^{\cdot} = 0$$

Здесь

$$\alpha_{11} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}\right)_0 + \frac{3}{\rho_0}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{3k\sigma_0(\rho_0^2 - 2z_0^2)}{\rho_0^2(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}} + \frac{k\sigma_0(-4\rho_0^4 + 13\rho_0^2 z_0^2 + 2z_0^4)}{\rho_0^2(\rho_0^2+z_0^2)^{7/2}}$$

$$\beta_{22} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 + \frac{3k\sigma_0(\rho_0^2 - 4z_0^2)}{(\rho_0^2+z_0^2)^{7/2}}, \qquad \gamma_{21} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z}\right)_0 - \frac{15k\sigma_0\rho_0 z_0}{(\rho_0^2+z_0^2)^{7/2}}$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z}\right)_0 + \frac{k\sigma_0(6z_0^2 - 9\rho_0^2)}{\rho_0(\rho_0^2+z_0^2)^{7/2}}, \qquad \xi_{13} = \frac{2\sigma_0}{\rho_0^3} + \frac{k(\rho_0^2 - 2z_0^2)}{\rho_0(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}} \tag{2.3}$$

$$\xi_{23} = \frac{3kz_0}{(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}}, \qquad \eta_{21} = \frac{k\rho_0(\rho_0^2 - 2z_0^2)}{(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}}, \qquad \eta_{22} = \frac{3k\rho_0^2 z_0}{(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}}$$

Характеристическое уравнение системы (2.2)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \alpha_{11} & -\gamma_{12} & -\xi_{13} \\ -\gamma_{21} & \lambda^2 - \beta_{22} & -\xi_{23} \\ \eta_{21}\lambda & \eta_{22}\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

с учетом обозначений (2.3) может быть преобразовано к виду

$$\lambda\,[\lambda^4 - (\alpha_0 + \beta_0)\,\lambda^2 + (\alpha_0\beta_0 - \gamma_0^2)] = 0 \tag{2.4}$$

$$\alpha_0 = \alpha_{11} - \eta_{21}\xi_{13} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}\right)_0 + \frac{3}{\rho_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)_0 - \frac{3k\sigma_0(\rho_0^2 - 4z_0^2)}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{7/2}} - \frac{k^2(\rho_0^2 - 2z_0^2)^2}{(\rho_0^2 + z_0^2)^5}$$

$$\beta_0 = \beta_{22} - \eta_{22}\xi_{23} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 + \frac{3k\sigma_0(\rho_0^2 - 4z_0^2)}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{7/2}} - \frac{9k^2\rho_0^2 z_0^2}{(\rho_0^2 + z_0^2)^5} \tag{2.5}$$

$$\gamma_0 = \gamma_{12} - \eta_{22}\xi_{13} = \gamma_{21} - \eta_{21}\xi_{23} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial z}\right)_0 - \frac{15k\sigma_0\rho_0 z_0}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{7/2}} - \frac{3k^2\rho_0 z_0(\rho_0^2 - 2z_0^2)}{(\rho_0^2 + z_0^2)^5}$$

Для корней уравнения (2.4) имеем следующие выражения:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{{}^1/_2(\alpha_0 + \beta_0) \pm \sqrt{{}^1/_4(\alpha_0 + \beta_0)^2 - (\alpha_0\beta_0 - \gamma^2)}}, \qquad \lambda_5 = 0$$

Докажем, что необходимыми условиями устойчивости круговых орбит (1.2) будут

$$\alpha_0 < 0, \qquad \alpha_0\beta_0 - \gamma_0^2 > 0 \tag{2.6}$$

Для этого нужно доказать, что если, хотя бы одно из неравенств (2.6) нарушается, то решение (1.2) будет неустойчиво. Если $\alpha_0\beta_0 - \gamma_0^2 < 0$, то характеристическое уравнение (2.4), независимо от знака α_0, имеет положительный корень

$$\lambda = +\sqrt{{}^1/_2(\alpha_0 + \beta_0) + \sqrt{{}^1/_4(\alpha_0 + \beta_0)^2 - (\alpha_0\beta_0 - \gamma_0^2)}}$$

Если же $\alpha_0 > 0$, но $\alpha_0\beta_0 - \gamma_0^2 > 0$, тогда и $\beta_0 > 0$ и существует положительный корень

$$\lambda = +\sqrt{{}^1/_2(\alpha_0 + \beta_0) + \sqrt{{}^1/_4(\alpha_0 - \beta_0)^2 + \gamma^2}}$$

Случай $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ не рассматривается. В случае же существования положительных корней характеристического уравнения по теореме Ляпунова [8] о неустойчивости по первому приближению решение (1.2) будет неустойчиво.

§ 3. Достаточные условия устойчивости. Эти условия получим из рассмотрения полных уравнений возмущенного движения (2.1). Эти уравнения допускают существование первых интегралов: интеграла энергии (F_1) и интеграла площадей (F_2):

$$F_1 = \frac{1}{2}\left[x_1^{\cdot 2} + \frac{(\sigma_0 + x_3)^2}{(\rho_0 + x_1)^3} + x_2^{\cdot 2}\right] - U(\rho_0 + x_1, z_0 + x_2) - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0^3} + U(\rho_0, z^0) = \text{const}$$

$$F_2 = x_3 - \frac{k(\rho_0 + x_1)^2}{[(\rho_0 + x_1)^2 + (z_0 + x_2)^2]^{3/2}} + \frac{k\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{3/2}} = \text{const} \tag{3.1}$$

Исследование устойчивости проводим по второй методе Ляпунова [8]. Для этого, следуя Четаеву [1], строим функцию Ляпунова в виде линейно квадратичной связки первых интегралов (3.1):

$$W = F_1 - \frac{\sigma_0}{\rho_0^2}F_2 + AF_2^2$$

Здесь A — пока неопределенная величина. Разлагая W в ряд Маклорена по переменным $x_1, x_1^{\cdot}, x_2, x_2^{\cdot}, x_3$, используя (1.3) и ограничиваясь членами второго порядка по $x_1, x_1^{\cdot}\ x_2, x_2^{\cdot}, x_3$, получим:

$$W = {}^1/_2\,x_1^{\cdot 2} + {}^1/_2\,x_2^{\cdot 2} + {}^1/_2\,[-\alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + (\rho_0^{-2} + 2A)\,x_3^2 - 2\gamma x_1x_2 - 2\xi x_1x_3 - 2\eta_2 x_2x_3] + \ldots \tag{3.2}$$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}\right)_0 + \frac{3}{\rho_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)_0 + \frac{k\sigma_0(\rho_0^4 + 8\rho_0^2 z_0^2 - 8z_0^4)}{\rho_0^2(\rho_0^2 + z_0^2)^{7/2}}$$

$$\beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \beta_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 + \frac{3k\sigma_0(\rho_0^2 - 4z_0^2)}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{7/2}}$$

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \quad \gamma_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial z}\right)_0 - \frac{3k\sigma_0 z_0(3\rho_0^2 - 2z_0^2)}{\rho_0(\rho_0^2 + z_0^2)^{7/2}} \tag{3.3}$$

$$\xi=\xi_1-\xi_2,\quad \xi_1=\frac{2\sigma_0}{\rho_0^3},\quad \alpha_2=2A\alpha_2^\circ,\quad \alpha_2^\circ=\frac{k^2\rho_0^2(\rho_0^2-2z_0^2)^2}{(\rho_0^2+z_0^2)^5}$$

$$\beta_2=2A\beta_2^\circ,\quad \beta_2^\circ=\frac{9k^2\rho_0^4z_0^2}{(\rho_0^2+z_0^2)^5}\qquad \gamma_2=2A\gamma_2^\circ,\quad \gamma_2^\circ=\frac{3k^2\rho_0^3z_0(\rho_0^2-2z_0^2)}{(\rho_0^2+z_0^2)^5}$$

$$\xi_2=2A\xi_2^\circ,\quad \xi_2^\circ=\frac{k\rho_0(\rho_0^2-2z_0^2)}{(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}}\qquad \eta_2=2A\eta_2^\circ,\quad \eta_2^\circ=-\frac{3k\rho_0^2z_0}{(\rho_0^2+z_0^2)^{5/2}}$$

Так как $W^\cdot=0$, то функция W будет удовлетворять условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, если $W>0$. Для достаточно малых возмущений $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1^\cdot,\ x_2^\cdot$ знак W определяется знаком квадратичной формы, стоящей справа в (3.2), а последняя будет положительно определена по критерию Сильвестра, если главные диагональные миноры матрицы

$$\left\|\begin{matrix}-\alpha & -\gamma & -\xi\\ -\gamma & -\beta & -\eta_2\\ -\xi & -\eta_2 & 2A+\rho_0^{-2}\end{matrix}\right\|$$

положительным. Это дает три неравенства

$$\alpha<0,\qquad \alpha\beta-\gamma^2>0 \tag{3.4}$$

$$(2A+\rho_0^{-2})(\alpha\beta-\gamma^2)+\alpha\eta_2^2-2\gamma\xi\eta_2+\beta\xi^2>0 \tag{3.5}$$

Можно доказать, что (3.4) будут выполняться, если выполняются неравенства

$$\alpha_1<0,\qquad \alpha_1\beta_1-\gamma_1^2>0 \tag{3.6}$$

Действительно, если выбрать $A>0$, то $\alpha_2>0$ и второе неравенство (3.4) следует из первого. Второе неравенство (3.4) можно представить в виде

$$(\alpha_1\beta_1-\gamma_1^2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-2\gamma_1\gamma_2)>0 \tag{3.7}$$

так как $\alpha_2\beta_2-\gamma_2^2=0$. Учитывая обозначения (3.3), второй член в (3.7) перепишем так:

$$2A\frac{k^2\rho_0^2}{(\rho_0^2+z_0^2)^5}[9\rho_0^2z_0^2(-\alpha_1)-2\cdot 3\rho_0z_0(2z_0^2-\rho_0^2)\gamma_1+(2z_0^2-\rho_0^2)^2(-\beta_1)]$$

Отсюда ясно, что последнее выражение будет положительно, если выполняются (3.6); следовательно, из (3.6) следует (3.7), а значит и второе неравенство (3.4).

Переходи́м к неравенству (3.5). После ряда преобразований (при этом члены с A^2 и A^3 сократятся) это неравенство можно записать так:

$$2A\,[(\alpha_1\beta_1-\gamma_1^2)-\rho_0^{-2}(\alpha_2^\circ\beta_1+\alpha_1\beta_2^\circ-2\gamma_1^\circ\gamma_2)-\beta_2^\circ\xi_1^2-2(\gamma_1\xi_1\eta_2^\circ+\beta_1\xi_1\xi_2^\circ)]+$$
$$+\rho_0^{-2}(\alpha_1\beta_1-\gamma_1^2)+\beta\xi_1^2>0$$

Очевидно, можно выбирать настолько большое $A>0$, что последнее неравенство будет выполняться, если квадратная скобка положительна.

Таким образом, условия положительной определенности функции W (достаточные условия устойчивости) сводятся к трем неравенствам

$$\alpha_1<0,\ \alpha_1\beta_1-\gamma_1^2>0 \tag{3.8}$$
$$(\alpha_1\beta_1-\gamma_1^2)-\rho_0^2(\alpha_2^\circ\beta_1+\alpha_1\beta_2^\circ-2\gamma_1\gamma_2^\circ)-2(\gamma_1\xi_1\eta_2^\circ+\beta_1\xi_1\xi_2^\circ)-\beta_2^\circ\xi_1^2>0$$

Отметим, что при выполнении достаточных условий устойчивости, решение (1.2) будет устойчивым по отношению к величинам $\rho,\ \rho,\ z^\cdot,\ z^\cdot,\ \sigma,\ \psi^\cdot$. По отношению же к величине угловой переменной ψ рассматриваемые круговые орбиты неустойчивы, так как ψ — циклическая переменная. Это означает, что спутник в возмущенном движении движется по орбите, близкой к круговой, хотя его угловые расстояния ψ могут существенно отличаться от аналогичных величин невозмущенного движения.

Полученные выше условия устойчивости имеют место для круговых орбит спутников, движущихся около планет с осесимметричным гравитационным и дипольным магнитным полями.

§ 4. Круговые орбиты искусственных спутников Земли.[1] Потенциал поля тяготения земного эллипсоида (нормального поля притяжения Земли) весьма точно аппроксимируется некоторым специально выбранным потенциалом. В данной работе будет использоваться аппроксимирующий потенциал в форме, предложенной Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и В. Г. Деминым [9]

$$U = \frac{\mu}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - id)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + id)^2}}\right] \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Здесь μ — гравитационная постоянная ($\mu = 3.98602 \cdot 10^5$ *км*^{3} / *сек*^{2}) [10], d — характеристика сжатия Земли ($d = 210$ *км*) [9].

Магнитное поле Земли, даже с учетом того, что магнитная ось не совпадает с гравитационной, хорошо аппроксимируется полем диполя, причем магнитный момент Земли $M = 8.3 \cdot 10^{25}\, CGS\mu$ [11].

Исходя из выражения для потенциала нормального поля притяжения Земли, а также учитывая, что $\sigma_0 = \rho_0^2\omega$, уравнения (1.3) круговых движений спутника запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} &\omega^2 - \frac{\mu}{2}\left\{\frac{1}{[\rho_0^2 + (z_0 - id)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[\rho_0^2 + (z_0 + id)^2]^{3/2}}\right\} + \frac{k\omega(\rho_0^2 - 2z_0^2)}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{5/2}} = 0 \\ &-\frac{\mu}{2}\left\{\frac{z_0 - id}{[\rho_0^2 + (z_0 - id)^2]^{3/2}} + \frac{z_0 + id}{[\rho_0^2 + (z_0 + id)^2]^{3/2}}\right\} + \frac{3k\omega\rho_0^2 z_0}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Очевидно, что $\rho_0^2 + z_0^2 = r_0^2 > R^2$, где $R = 6378.16$ *км* [10]. Какие значения «магнитного коэффициента» $k = eM / cm$ для движения в магнитном поле Земли возможны? Для любого тела величина удельного заряда e / m не превосходит $e / m = 1.76 \cdot 10^7\, CGS\, \mu$ / *г* электрона, так как любая электризация осуществляется насыщением электронами или более тяжелыми ионами. Отсюда, подставляя в выражение для k значение магнитного момента Земли M и скорости света $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см* / *сек*, получим, что $0 \leqslant k < k_{\max}$, где $k_{\max} = 4.8693 \cdot 10^{22}$ *см*^{3} / *сек* $= 4.6893 \cdot 10^7$ *км*^{3} / *сек*.

Переходим к анализу уравнений (4.1). Очевидно, что при $z_0 = 0$ (экваториальные орбиты), второе из уравнений (4.1) выполняется, а подбором значений ω и ρ_0 можно добиться, что и первое будет выполняться. Однако при $z_0 \neq 0$ в реальном случае ($r_0 > R$, $0 \leqslant k < k_{\max}$) уравнения (4.1) не выполняются, т. е. другие круговые орбиты невозможны.

Докажем это. Из второго из уравнений (4.1), сокращая на z_0, можно получить

$$\omega = \frac{\mu}{2}\frac{(\rho_0^2 + z_0^2)^{5/2}}{3k\rho_0^2}\left\{\frac{1 - z_0^{-1}id}{[\rho_0^2 + (z_0 - id)^2]^{3/2}} + \frac{1 + z_0^{-1}id}{[\rho_0^2 + (z_0 + id)^2]^{3/2}}\right\} \qquad (4.2)$$

Первое из уравнений (4.1) вместе со вторым может быть преобразовано к виду

$$\omega^2 - \frac{2k\omega}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{\mu}{2}\frac{id}{z_0}\left\{\frac{1}{[\rho_0^2 + (z_0 - id)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[\rho_0^2 + (z_0 + id^2)^{3/2}}\right\} = 0 \qquad (4.3)$$

Вводя обозначения для комплексной величины

$$\frac{1}{[\rho_0^2 + (z_0 + id)^2]^{3/2}} = a + ib$$

уравнения (4.2) и (4.3) можно представить в следующем виде

$$\omega = \frac{(\rho_0^2 + z_0^2)^{5/2}}{3k\rho_0^2}\left(\mu a + \mu b\frac{d}{z_0}\right) \qquad \left(a = \frac{a_1\sqrt{l + a_1} - b_1\sqrt{l - a_1}}{l^3\sqrt{2}}\right) \qquad (4.4)$$

$$\omega^2 - \frac{2k\omega}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{3/2}} + \mu b\frac{d}{z_0} = 0 \qquad \left(b = \frac{-b_1\sqrt{l + a_1} - a_1\sqrt{l - a_1}}{l^3\sqrt{2}}\right)$$

$$a_1 = \rho_0^2 + z_0^2 - d^2, \qquad b_1 = -2z_0 d, \qquad l = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad (4.5)$$

Легко видеть, что

$$\mu b\ d \,/\, z_0 > 0 \tag{4.6}$$

При $Z_0 < 0$ это неравенство очевидно, а для $z_0 > 0$, оно вытекает из неравенства

$$1 - (b_1 / a_1)^2 < \sqrt{1 + (b_1 / a_1)^2}$$

Неравенство (4.6) позволяет из уравнений (4.4) получить неравенство

$$\omega > \frac{(\rho_0^2 + z_0^2)^{5/2}}{3k\rho_0^2}\mu a, \qquad \omega < \frac{2k}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{3/2}} < \frac{2k_{\max}}{R^3} \tag{4.7}$$

Если $Z_0 > 0$, то из неравенства (4.7) после ряда преобразований и отбрасывания положительных членов можно получить

$$\omega > \frac{\mu}{3\sqrt{2}k}\left(1 - \frac{d^2}{\rho_0^2 + z_0^2}\right)\left(1 + 4\frac{d^2}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{-5/4}}\right)^{-5/4} > \frac{\mu}{3\sqrt{2}K_{\max}}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)\left(1 + 4\frac{d^2}{R^2}\right)^{-5/4} \tag{4.8}$$

При $Z_0 < 0$ из (4.7) получим

$$\omega > \frac{\mu}{3\sqrt{2}\,k}\left(1 - \frac{d^2}{\rho_0^2 + z_0^2} - 2\frac{d}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{1/2}}\right)\left(1 + 4\frac{d^2}{\rho_0^2 + z_0^2}\right)^{-5/4} >$$

$$> \frac{\mu}{3\sqrt{2}\,k}\left(1 - \frac{d^2}{R^2} - 2\frac{d}{R}\right)\left(1 + 4\frac{d^2}{R^2}\right)^{-5/4} \tag{4.9}$$

При подстановке численных значений μ, d, R, $K_{\max}$ можно убедиться, что неравенства (4.8) и (4.9) противоречат второму неравенству (4.7). Так как все неравенства получены на основании уравнений (4.1) в предположении $z_0 \neq 0$, то это противоречие показывает, что при $z_0 \neq 0$ круговые орбиты невозможны.

§ 5. Устойчивость круговых экваториальных орбит искусственных спутников Земли. При $z_0 = 0$ второе из уравнений (4.1) выполняется, а первое принимает вид

$$\omega^2 + \frac{k\omega}{\rho_0^3} - \frac{\mu}{(\rho_0^2 + d^2)^{3/2}} = 0 \tag{5.1}$$

Это уравнение позволяет получить для ω две группы значений

$$\omega_1 = -\frac{k}{2\rho_0^3} + \left(\frac{k^2}{4\rho_0^6} + \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2}, \qquad \omega_2 = -\frac{k}{2\rho_0^3} - \left(\frac{k^2}{4\rho_0^6} + \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2}$$

Очевидно, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$, что соответствует прямому по направлению вращения Земли и обратному движению спутника по круговой орбите.

Необходимые условия устойчивости (9) для круговых экваториальных орбит имеют вид

$$\frac{\mu(\rho_0^2 - 4d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} + \frac{3k\omega}{\rho_0^3} + \frac{k^2}{\rho_0^6} > 0, \qquad \frac{\mu(\rho_0^2 + d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} - \frac{3k\omega}{\rho_0^3} > 0 \tag{5.2}$$

Эти неравенства будут достаточными условиями, если к ним присоединить неравенство

$$\frac{\mu(\rho_0^2 - 4d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} - \frac{k\omega}{\rho_0^3} > 0 \tag{5.3}$$

Исследуем достаточные условия устойчивости. Если $\omega = \omega_1 > 0$, то первое из неравенств (5.2) выполняется, а второе неравенство и неравенство (5.3) приводятся к виду

$$\Phi_1 = \frac{\mu(\rho_0^2 + d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} + \frac{3k^2}{2\rho_0^6} - \frac{3k}{\rho_0^3}\left(\frac{k^2}{4\rho_0^6} + \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2} > 0 \tag{5.4}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu(\rho_0^2 - 4d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} + \frac{k^2}{2\rho_0^6} - \frac{k}{\rho_0^3}\left(\frac{k^2}{4\rho_0^6} + \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2} > 0 \tag{5.5}$$

Если $\omega = \omega_2 < 0$, то второе из неравенств (5.2) и неравенство (5.3) выполняются

$$\Phi_3 = \frac{\mu(\rho_0^2 - 4d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} - \frac{k^2}{2\rho_0^6} - \frac{3k}{\rho_0^3}\left(\frac{k^2}{4\rho_0^2} + \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2} > 0 \qquad (5.6)$$

Таким образом, исследование устойчивости круговых экваториальных орбит спутников свелось к исследованию неравенств (5.4) — (5.6). Оценим величины Φ_i:

$$\Phi_1 = \frac{\mu(\rho_0^2 + d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{5/2}} + \frac{3k^2}{2\rho_0^6}\left[1 - \left(1 + \frac{4\mu\rho_0^6}{k^2(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2}\right] =$$

$$= \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\left[\frac{\rho_0^2 + d^2}{\rho_0^2 - d^2} - \frac{6}{1 + (1 + 4\mu\rho_0^6/k^2(\rho_0^2 - d^2)^{3/2})^{1/2}}\right] >$$

$$> \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{6}{1 + (1 + 4\mu R^3/k_{\max}^2)^{1/2}}\right]$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\left[\frac{\rho_0^2 - 4d^2}{\rho_0^2 - d^2} - \frac{2}{1 + (1 + 4\mu\rho_0^6/k^2(\rho_0^2 - d^2)^{3/2})^{1/2}}\right] >$$

$$> \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3d^2}{R^2 - d^2} - \frac{2}{1 + (1 + 4\mu R^3/k_{\max}^2)^{1/2}}\right]$$

$$\Phi_3 = \frac{\mu(\rho_0^2 - 4d^2)}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}} + \frac{3k^2}{2\rho_0^6} - \frac{3k^2}{2\rho_0^6}\left(1 + \frac{4\mu\rho_0^6}{k^2(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\right)^{1/2} - \frac{4k^2}{2\rho_0^6} >$$

$$> \frac{\mu}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3d^2}{R^2 - d^2} - \frac{2}{1 + (1 + 4\mu R^3/k_{\max}^2)^{1/2}}\right] - \frac{2k_{\max}^2}{(\rho_0^2 - d^2)^{3/2} R^3}$$

Если величины μ, R, d, $k_{\max}^2$ подставить в квадратные скобки оценок для Φ_1 и Φ_2, то убедимся, что $\Phi_1 > 0$, $\Phi_2 > 0$. Аналогично, для Φ_3, вынося предварительно положительную величину $(\rho_0^2 - d^2)^{3/2}$ за скобки. Итак, достаточные условия устойчивости круговых экваториальных орбит выполняются.

Автор благодарит В. В. Румянцева за критические замечания.

Поступила 28 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 21, 37.
2. Дубошин Г. Н. Об устройчивости тривиальных решений некоторых дифференциальных уравнений небесной механики. II — Об устойчивости в некотором частном случае неустановившегося движения. Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга, 1945, т. 15, вып. 1, стр. 308.
3. Демин В. Г. Об устойчивости круговых орбит. Вестн. МГУ, сер. 3, физ.-астр., 1960, № 1, стр. 80.
4. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Качественный анализ форм движения в задаче о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. Сб.: «Искусственные спутники Земли». М., Изд-во АН СССР, 1963, вып. 16, стр. 173.
5. Дегтярев В. Г. Об устойчивости круговых движений в задаче двух неподвижных центров. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, стр. 778.
6. Дегтярев В. Г. Об устойчивости движения в обобщенной задаче двух неподвижных центров. ПММ, 1962, т. 26, вып 6, стр. 1118.
7. Дегтярев В. Г. Об устойчивости круговых орбит искусственных спутников Земли. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 3, стр. 513.
8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950, стр. 82, 127.
9. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. Сб.: «Искусственные спутники Земли». Изд-во АН СССР, 1961, вып. 8, стр. 64.
10. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965, стр. 315.
11. Яновский Б. М. Земной магнетизм. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1953, стр. 93.