ОБОБЩЕНИЕ ЭЙЛЕРОВА СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Б. А. Смольников

(Ленинград)

Известно, что свободное твердое тело совершает эйлерово движение в том случае, если на него не действуют никакие внешние моменты. Можно показать, однако, что и при наличии внешнего момента твердое тело может совершать движение, отличающееся от эйлерова только характером зависимости углов от времени, геометрия же движения останется точно такой же, как и в случае Эйлера. Для этого внешний момент, действующий на тело, должен сохранять неизменным свое направление в инерциальном пространстве, будучи параллельным вектору конетического момента тела L. Модуль же этого внешнего момента m может быть произвольной функцией времени.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости на главные оси 1, 2, 3 тела, имеющего главные моменты инерции A_1, A_2, A_3. Полагая, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть направляющие косинусы вектора L (а значит, и вектора m) в осях 1, 2, 3 тела, запишем уравнения движения тела под действием момента m в виде

$$\begin{aligned} A_1\omega_1^{\cdot} + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 &= \alpha_1 m \\ A_2\omega_2^{\cdot} + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 &= \alpha_2 m \\ A_3\omega_3^{\cdot} + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 &= \alpha_3 m \end{aligned} \tag{1}$$

В силу сделанного предположения о характере внешнего момента направление вектора L неизменно в пространстве и может быть принято за ось неподвижной системы отсчета. Тогда, пользуясь очевидными соотношениями

$$\alpha_1 \mathrm{L} = A_1\omega_1, \qquad \alpha_2 L = A_2\omega_2, \qquad \alpha_3 L = A_3\omega_3 \tag{2}$$

исключим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ из системы (1)

$$\begin{aligned} A_1\omega_1^{\cdot} + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 &= \frac{m}{L} A_1\omega_1 \\ A_2\omega_2^{\cdot} + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 &= \frac{m}{L} A_2\omega_2 \\ A_3\omega_3^{\cdot} + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 &= \frac{m}{L} A_3\omega_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Полученная система допускает построение двух алгебраических интегралов, являющихся обобщением интегралов момента и энергии E в задаче Эйлера. Действительно, умножая уравнения (3) соответственно на $A_1\omega_1$, $A_2\omega_2$, $A_3\omega_3$ и складывая, получим очевидный интеграл

$$L = \int m dt \tag{4}$$

Аналогично, умножая эти уравнения на $\alpha_1, \omega_2, \omega_3$ и складывая, получим второй интеграл

$$E / L^2 = \text{const} \tag{5}$$

Записав полученные интегралы в виде

$$\begin{aligned} A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2 &= L^2 \\ A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 &= DL^2 \qquad (D = \text{const}) \end{aligned} \tag{6}$$

легко заметить, что они по форме совершенно идентичны соответствующим интегралам в задаче Эйлера и отличаются лишь тем, что здесь L явная функция времени, выражаемая зависимостью (4). Можно, однако, привести эти интегралы, а также и исходные уравнения (3) к виду, полностью совпадающему с соответствующими соотношениями случая Эйлера, если воспользоваться следующей заменой переменных:

$$\omega_1 = \Omega_1 L, \qquad \omega_2 = \Omega_2 L, \qquad \omega_3 = \Omega_3 L, \qquad \tau = \int L dt \tag{7}$$

где τ — новая независимая переменная.

Обозначая дифференцирование по τ штрихом, получим для Ω_1, Ω_2, Ω_3 следующую систему:

$$A_1\Omega_1' + (A_3 - A_2)\,\Omega_2\Omega_3 = 0$$
$$A_2\Omega_2' + (A_1 - A_3)\,\Omega_1\Omega_3 = 0 \qquad (8)$$
$$A_3\Omega_3' + (A_2 - A_1)\,\Omega_1\Omega_2 = 0$$

Находя отсюда Ω_1, Ω_2, Ω_3 в виде эллиптических функций от τ, нетрудно получить затем из (7) и ω_1, ω_2, ω_3 в виде явных функций времени. Легко видеть, что переменность L по сравнению со случаем Эйлера приводит лишь к пропорциональному изменению всех компонент вектора угловой скорости, не нарушая соотношения между ними. Это позволяет достаточно наглядно представить характер траектории фазовой точки в пространстве ω_1, ω_2, ω_3 при любом законе изменения внешнего момента.

Переходя к определению углов, заметим, что из выражений (2) с учетом соотношений

$$\alpha_1 = \sin\vartheta\sin\varphi, \qquad \alpha_2 = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \alpha_3 = \cos\vartheta \qquad (9)$$

где ϑ и φ — эйлеровы углы нутации и чистого вращения, следует:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\Omega_1}{A_2\Omega_2}, \qquad \cos\vartheta = A_3\Omega_3 \qquad (10)$$

т. е. эйлеровы углы ϑ и φ выражаются через τ в точности так же, как и в случае Эйлера через t. Что же касается угла прецессии ψ, то исключив из соотношения

$$\psi^{\cdot} = \frac{\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi}{\sin\vartheta} \qquad (11)$$

углы ϑ и φ посредством (10) и перейдя к новому аргументу τ, получим

$$\psi' = \frac{A_1\Omega_1^2 + A_2\Omega_2^2}{A_1^2\Omega_1^2 + A_2^2\Omega_2^2} \qquad (12)$$

Это равенство по форме совершенно идентично соответствующему уравнению в эйлеровом случае. Таким образом, и угол ψ выразится через τ точно так же, как в эйлеровом случае через t. Все это означает, что геометрический характер движения твердого тела под действием произвольного по величине внешнего момента, параллельного вектору кинетического момента тела, полностью тождествен картине эйлерова движения, и единственное отличие состоит лишь в иной зависимости углов от времени, т. е. сводится к замене реального времени t на величину, пропорциональную

$$\tau = \int\!\!\int m\,dt\,dt \qquad (13)$$

Поэтому указанный режим движения может рассматриваться как обобщение классического эйлерова движения и к нему применима та же геометрическая интерпретация, что и в случае Эйлера.

Заметим, что в известных курсах механики Аппеля и Мак-Миллана в качестве примера указывается один частный случай приведения уравнений движения твердого тела под действием внешнего момента к форме уравнений эйлерова движения, а именно, тот случай, когда действующий на тело момент параллелен и пропорционален его кинетическому моменту. Как видно из изложенного выше, последнее требование оказывается совершенно излишним.

Интересно также отметить, что если действующий на тело момент постоянен по модулю, то, как можно показать, процесс разгона (или торможения) тела будет оптимальным по быстродействию (при ограничении на модуль управляющего момента).

Таким образом, рассмотренные режимы движения твердого тела могут представлять известный практический интерес.

Поступила 8 IV 1967