НИЖНЯЯ И ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. Д. Вылекжанин (Йошкар-Ола)

В статье получены изопериметрические неравенства для оценки снизу и сверху геометрической жесткости кручения призматического стержня односвязного выпуклого поперечного сечения при установившейся ползучести, характеризуемой степенным законом.

1. Пусть D — односвязная область поперечного сечения призматического стержня, ограниченная контуром C. Как известно [1], задача об установившейся ползучести скручиваемого стержня сводится к решению дифференциального уравнения для функции напряжений $F = F(x, y)$ в области D:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h(T)\frac{\partial F}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[h(T)\frac{\partial F}{\partial y}\right] + 2\omega = 0 \qquad \left(T = +\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\right) \tag{1.1}$$

$$F(x, y) = 0 \text{ на } C \tag{1.2}$$

Здесь ω — угловая скорость кручения на единицу длины стержня. В случае степенной зависимости имеем

$$h(T) = BT^{m-1} \tag{1.3}$$

где m и B — постоянные, характерные для данного материала: m — показатель ползучести, B — величина, выражаемая через коэффициент ползучести B_1 и m. Показатель ползучести m больше единицы. При степенной зависимости функция напряжений может быть представлена в форме

$$F = \left(\frac{\omega}{B}\right)^{\mu}\Psi, \qquad \mu = \frac{1}{m} \qquad (0 < \mu < 1) \tag{1.4}$$

где $\Psi = \Psi(x, y)$ не зависит от ω и B. Обозначая через M — крутящий момент, имеем при помощи условия статической эквивалентности

$$M = 2\iint_D F\,dx\,dy = \left(\frac{\omega}{B}\right)^{\mu} 2\iint_D \Psi\,dx\,dy = \left(\frac{\omega}{B}\right)^{\mu} D_{\mu}, \qquad D_{\mu} = 2\iint_D \Psi\,dx\,dy$$

Здесь величина D_μ может быть названа геометрической жесткостью стержня. Эта величина при фиксированном μ зависит лишь от размеров и формы поперечного сечения стержня. При помощи (1.1) — (1.4) получаем следующее дифференциальное уравнение для функции Ψ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) = -2 \tag{1.5}$$

с граничным условием

$$\Psi = 0 \text{ на } C \tag{1.6}$$

2. Пусть $f = f(x, y)$ — непрерывная с непрерывными первыми производными в D функция, удовлетворяющая условию

$$f = 0 \text{ на } C \tag{2.1}$$

а в остальном — произвольная. Учитывая (1.5), рассмотрим и преобразуем следующее выражение:

$$2\iint_D f\,dx\,dy = -\iint_D \left\{f\left[\frac{\partial}{\partial x}(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_y)\right]\right\}dx\,dy =$$

$$= \iint_D [f_x(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_x) + f_y(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_y)]\,dx\,dy - \qquad \left(f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$-\iint_D \left[\frac{\partial(f|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(f|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_y)}{\partial y}\right]dx\,dy$$

Последний интеграл при переходе к криволинейному в силу условия (2.1) исчезает, и имеем

$$2\iint_D f\,dx\,dy = \iint_D [f_x(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_x) + f_y(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_y)]\,dx\,dy \tag{2.2}$$

Так как $\Psi(x, y)$ есть частный случай функции $f(x, y)$, то при помощи (2.2) имеем

$$D_\mu = 2\iint_D \Psi\,dx\,dy = \iint_D |\operatorname{grad}\Psi|^{(1+\mu)/\mu}\,dx\,dy \tag{2.3}$$

Применяя к правой части (2.2) последовательно неравенства Коши и Гельдера, получаем

$$2\iint_D f\,dx\,dy = \iint_D [f_x(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_x) + f_y(|\operatorname{grad}\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\Psi_y)]\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint_D (|\operatorname{grad}\Psi|^{2(1-\mu)/\mu}\Psi_x^2 + |\operatorname{grad}\Psi|^{2(1-\mu)/\mu}\Psi_y^2)^{1/2}(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D |\operatorname{grad}\Psi|^{1/\mu}\,|\operatorname{grad} f|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\iint_D |\operatorname{grad}\Psi|^{(1+\mu)/\mu}\,dx\,dy\right)^{1/(1+\mu)} \left(\iint_D |\operatorname{grad} f|^{(1+\mu)/\mu}\,dx\,dy\right)^{\mu/(1+\mu)} \tag{2.4}$$

Возведя обе части неравенства (2.4) в степень $(1+\mu)$, получаем с учетом (2.3)

$$D_\mu \geqslant 2^{1+\mu}\left(\iint_D f\,dx\,dy\right)^{1+\mu}\left(\iint_D |\operatorname{grad} f|^{(1+\mu)/\mu}\,dx\,dy\right)^{-\mu} \tag{2.5}$$

Равенство в (2.5) достигается в случае, когда $f(x, y)$ пропорциональна функции $\Psi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (1.5).

3. Будем предполагать область D выпуклой, введя обозначения: A — площадь D, L — периметр D.

Для получения нижней границы величины D_μ применим метод статьи [2].

Множество тех внутренних точек выпуклой области D, чье кратчайшее расстояние от границы D равно заданному числу t, есть выпуклая кривая, называемая внутренней параллелью на расстоянии t. Обозначим ее длину через $L(t)$, площадь, ограниченную ей, через $A(t)$. Для наших целей достаточно ограничиться случаем выпуклого многоугольника, так как переход отсюда к общему утверждению известен [3]. Пусть ρ — радиус наибольшего круга, вписанного в D. Функции $A(t)$ и $L(t)$ определены в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \rho$, они строго убывающие и очевидно, что

$$A(0) = A, \quad A(\rho) = 0, \quad L(0) = L, \quad A'(t) = -L(t), \quad L'(t) \leqslant 0 \tag{3.1}$$

Выберем в качестве функций $f(x, y)$ в (2.5) функции, линии уровня которых являются внутренними параллелями области D. Для таких функций имеем

$$f(x, y) = g(t) \tag{3.2}$$

и соотношения (2.5) и (2.1) переходят соответственно в соотношения

$$D_\mu \geqslant 2^{1+\mu}\left(\int_0^\rho g(t)L(t)\,dt\right)^{1+\mu}\left(\int_0^\rho [g'(t)]^{(1+\mu)/\mu}L(t)\,dt\right)^{-\mu} \tag{3.3}$$

$$g(0) = 0 \tag{3.4}$$

Используя (3.1.4), с помощью интегрирования по частям, получаем в виду (3.4)

$$\int_0^\rho g(t)L(t)\,dt = -\int_0^\rho g(t)A'(t)\,dt = \int_0^\rho g'(t)A(t)\,dt$$

Теперь (3.3) перепишем в виде

$$D_\mu \geqslant 2^{1+\mu} \left(\int_0^\rho g'(t)\, A(t)\, dt\right)^{1+\mu} \left(\int_0^\rho [g'(t)]^{(1+\mu)/\mu} L(t)\, dt\right)^{-\mu} \tag{3.5}$$

Наилучший выбор испытуемой функции в (3.5) будет достигнут, если положим

$$g'(t) = \left[\frac{A(t)}{L(t)}\right]^\mu \tag{3.6}$$

При таком выборе из (3.5) получаем

$$D_\mu \geqslant 2^{1+\mu} \int_0^\rho \frac{[A(t)]^{1+\mu}}{[L(t)]^\mu}\, dt \tag{3.7}$$

Оценим интеграл в (3.7). Для этого заметим, что в силу (3.1.4):

$$\int_0^\rho \frac{[A(t)]^{1+\mu}}{[L(t)]^\mu}\, dt = -\int_0^\rho \left[\frac{A(t)}{L(t)}\right]^{1+\mu} A'(t)\, dt \tag{3.8}$$

Отметим также справедливость неравенства

$$A(t) < (\rho - t)\, L(t) \tag{3.9}$$

которое следует из (3.1.4), если учесть, что $L(t)$ — убывающая функция. Тогда интегрированием по частям (3.8), используя (3.9), (3.1.1) и (3.1.5) получаем

$$\int_0^\rho \frac{[A(t)]^{1+\mu}}{[L(t)]^\mu}\, dt = \frac{1}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} - \frac{1+\mu}{2+\mu}\int_0^\rho \left[\frac{A(t)}{L(t)}\right]^{2+\mu} L'(t)\, dt > \frac{1}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} \tag{3.10}$$

Следовательно, при помощи неравенства (3.7) имеем

$$D_\mu > \frac{2^{1+\mu}}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} \tag{3.11}$$

4. Для получения верхней границы величины D_μ воспользуемся методом статьи [4]. По-прежнему ограничимся случаем выпуклого многоугольника. Разделим многоугольную область D со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на подобласти $D_1, D_2, \ldots, D_n$ следующим образом: точка p принадлежит к внутренности D_i, если существует точка q на a_i такая, что расстояние от p до q меньше расстояния p от любой другой точки на границе D.

Очевидны следующие факты, касающиеся формы подобластей:

(а) подобласть D_i может быть включена в прямоугольник с основанием a_i и высотой ρ.

(б) любой перпендикуляр к a_i разрезает границу D_i не более чем в двух точках.

Пусть теперь $u = u(x, y)$ есть функция, обращающая в максимум функционал, стоящий в правой части (2.5). Тогда, применяя неравенство Гельдера, получаем:

$$\begin{aligned} D_\mu &= 2^{1+\mu}\left(\sum\nolimits_i \iint_{D_i} u\, dx\, dy\right)^{1+\mu} \left[\sum\nolimits_i \iint_{D_i} (u_x^2 + u_y^2)^{(1+\mu)/2\mu} dx\, dy\right]^{-\mu} \leqslant \\ &\leqslant 2^{1+\mu} \sum\nolimits_i \left\{\left(\iint_{D_i} u\, dx\, dy\right)^{1+\mu} \cdot \left[\iint_{D_i} (u_x^2 + u_y^2)^{(1+\mu)/2\mu} dx\, dy\right]^{-\mu}\right\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$(u_x = \partial u / \partial x, \quad u_y = \partial u / \partial y)$$

Допустим теперь без потери общности, что сторона a_i лежит на оси x, и ее конечные точки есть $(0, 0)$ и $(a_i, 0)$. Из свойств (а) и (б) ясно, что граница D_i может быть представлена уравнениями

$$y = 0, \qquad y = f_i(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a_i) \tag{4.2}$$

Для дальнейшего будет необходимо следующее соотношение, полученное применением неравенства Гельдера:

$$\left(\int_0^s v(\tau)\,d\tau\right)^{1+\mu} = \left(\int_0^s (s-\tau)\,v'(\tau)\,d\tau\right)^{1+\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^s (s-\tau)^{1+\mu}\,d\tau\right)\left(\int_0^s [v'(\tau)]^{(1+\mu)/\mu}\,d\tau\right)^{\mu} = \frac{s^{2+\mu}}{2+\mu}\left(\int_0^s [v'(\tau)]^{(1+\mu)/\mu}\,d\tau\right)^{\mu}$$

где $v(\tau)$ и $v'(\tau)$ — непрерывны в $(0, s)$, причем $v(0) = 0$. Отсюда имеем

$$\left(\int_0^s v(\tau)\,d\tau\right)^{1+\mu}\left(\int_0^s [v'(\tau)]^{(1+\mu)/\mu}\,d\tau\right)^{-\mu} \leqslant \frac{s^{2+\mu}}{2+\mu} \tag{4.3}$$

Используя неравенства Гельдера и (4.3), находим

$$D_\mu{}^i = 2^{1+\mu}\left(\iint_{D_i} u\,dx\,dy\right)^{1+\mu}\left(\iint_{D_i}(u_x^2+u_y^2)^{(1+\mu)/2\mu}\,dx\,dy\right)^{-\mu} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1+\mu}\left(\iint_{D_i} u\,dx\,dy\right)^{1+\mu}\left(\iint_{D_i} u_y{}^{(1+\mu)/\mu}\,dx\,dy\right)^{-\mu} =$$

$$= 2^{1+\mu}\left(\int_0^{a_i} dx\int_0^{f_i(x)} u\,dy\right)^{1+\mu}\left(\int_0^{a_i} dx\int_0^{f_i(x)} u_y{}^{(1+\mu)/\mu}\,dy\right)^{-\mu} \leqslant \tag{4.4}$$

$$\leqslant 2^{1+\mu}\int_0^{a_i}\left[\left(\int_0^{f_i(x)} u\,dy\right)^{1+\mu}\left(\int_0^{f_i(x)} u_y{}^{(1+\mu)/\mu}\,dy\right)^{-\mu}\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1+\mu}}{2+\mu}\int_0^{a_i}[f_i(x)]^{2+\mu}\,dx = 2^{1+\mu}\int_0^{a_i} dx\int_0^{f_i(x)} y^{1+\mu}\,dy = 2^{1+\mu}\iint_{D_i} t^{1+\mu}\,dx\,dy$$

Здесь $t = t(p)$ — наименьшее расстояние переменной точки $p \in D$ от границы D. Складывая, получаем следующее неравенство

$$D_\mu \leqslant 2^{1+\mu}\iint_D t^{1+\mu}\,dx\,dy \tag{4.5}$$

Из (4.4) имеем

$$D_\mu{}^i \leqslant \frac{2^{1+\mu}}{2+\mu}\int_0^{a_i}[f_i(x)]^{2+\mu}\,dx < \frac{2^{1+\mu}}{2+\mu}\,\rho^{1+\mu}\int_0^{a_i} f_i(x)\,dx = \frac{2^{1+\mu}}{2+\mu}\,\rho^{1+\mu}\iint_{D_i} dx\,dy$$

Складывая, получаем оценку сверху для величины D_μ в терминах величины ρ и A:

$$D_\mu < \frac{2^{1+\mu}}{2+\mu}\,\rho^{1+\mu} A \tag{4.6}$$

Получим теперь оценку сверху для величины D_μ в терминах A и L. Если D — выпуклый многоугольник, то $L(t)$ кусочно линейна, убывает и выпукла сверху [5]. Ясно, что существует линейная функция $\lambda(t) = L - \alpha t$ $(\alpha > 0)$ такая, что

$$A = \int_0^\rho L(t)\,dt = \int_0^\rho \lambda(t)\,dt \tag{4.7}$$

Ясно также, что

$$\lambda(\rho) \geqslant L(\rho) \geqslant 0 \tag{4.8}$$

и существует число β $(0 < \beta < \rho)$ с тем свойством, что

$$L(t) - \lambda(t) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant \beta) \qquad L(t) - \lambda(t) \leqslant 0 \quad (\beta \leqslant t \leqslant \rho)$$

Из этого имеем

$$\int_0^\rho [L(t) - \lambda(t)]\, t^{1+\mu}\, dt \leqslant \int_0^\beta [L(t) - \lambda(t)]\, \beta^{1+\mu}\, dt + \int_\beta^\rho [L(t) - \lambda(t)]\, \beta^{1+\mu}\, dt = 0$$

$$\int_0^\rho L(t)\, t^{1+\mu}\, dt \leqslant \int_0^\rho \lambda(t)\, t^{1+\mu}\, dt \tag{4.9}$$

Используя неравенства (4.5), (4.9) и выражение для площади

$$A = \frac{1}{2}[\lambda(0) + \lambda(\rho)]\,\rho = \left(L - \frac{\alpha\rho}{2}\right)\rho$$

получаем

$$D_\mu - \frac{2^{2+\mu}}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} \leqslant 2^{1+\mu}\int_0^\rho L(t)\, t^{1+\mu}\, dt - \frac{2^{2+\mu}}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1+\mu}\int_0^\rho \lambda(t)\, t^{1+\mu}\, dt - \frac{2^{2+\mu}}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} = 2^{1+\mu}\left(L\frac{\rho^{2+\mu}}{2+\mu} - \alpha\frac{\rho^{3+\mu}}{3+\mu}\right) -$$

$$\frac{2^{2+\mu}}{2+\mu}\frac{(L - {}^1/_2\,\alpha\rho)^{2+\mu}\rho^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} = -\frac{(2\rho)^{2+\mu}L}{2+\mu}\left[\left(1 - \frac{\alpha\rho}{2L}\right)^{2+\mu} + \frac{2+\mu}{3+\mu}\frac{\alpha\rho}{2L} - \frac{1}{2}\right] \tag{4.10}$$

Исследуем выражение в квадратных скобках (4.10). Введем обозначения: $\alpha\rho/2L\gamma$ $2 + \mu = \nu$ $(2 < \nu < 3)$. В силу (4.8) имеем: $\lambda(\rho) = L - \alpha\rho \geqslant 0$. Отсюда $\alpha\rho\ / L \leqslant 1$, следовательно, $0 < \gamma \leqslant {}^1/_2$. Выражение в квадратных скобках (4.10), обозначенное через $\varphi(\gamma, \nu)$, теперь запишем в виде

$$\varphi(\gamma, \nu) = (1 - \gamma)^\nu + \gamma\nu\, /\, (1 + \nu) - {}^1/_2$$

Можно показать обычными средствами анализа, что функция $\varphi(\gamma, \nu)$ в области $0 < \gamma \leqslant {}^1/_2$, $2 < \nu < 3$ положительна. Тогда выражение в правой части (4.10) отрицательно. Следовательно, справедливо неравенство

$$D_\mu \leqslant \frac{2^{2+\mu}}{2+\mu}\frac{A^{2+\mu}}{L^{1+\mu}} \tag{4.11}$$

Полученные изопериметрические неравенства (3.11), (4.5), (4.6) и (4.11), по-видимому, еще не использовались в литературе. Если распределение напряжений в скручиваемом стержне является упругим ($\mu = 1$), то в этом частном случае величина D_μ, определяемая как максимум функционала, стоящего в правой части (2.5), совпадает с жесткостью кручения однородного изотропного упругого призматического стержня, и полученные в статье результаты переходят в результаты статей [2,4].

Поступила 18 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
2. Polya G. Two More Inequalities Between Physical and Geometrical Quantities. J. Indian Math. Soc., 1960, vol. 24, No 314.
3. Bol G. Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel, Abhandl. aus dem mathematischen. Seminar der Universität Hamburg, 1947, 15.
4. Makai E. On the Principal Frequency of a Membrane and the Torsional Rigidity of a Beam. Studies Math. Analysis and Related Topics. Stanford, Calif. Univ. Press, 1962, p. 227—231.
5. Bol G. Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen. Jahresbericht der Deutschem Mathematiker Vereinigung, 1941, 51.