

НЕЖЕСТКОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

В работе [1] был введен класс нежестких оболочек, т. е. оболочек, имеющих при заданных условиях закрепления и отсутствия внешней нагрузки формы равновесия, отличные от тривиальной. Как видно из определения, важным, характерным свойством нежесткой оболочки является тот факт, что для таких оболочек нижняя критическая нагрузка есть величина отрицательная. Здесь дается строгое доказательство существования нежестких оболочек. Именно, для задачи о равновесии ненагруженной тонкой сферической оболочки с неподвижным шарнирным закреплением по краю будет показано, что существует еще одна форма равновесия, близкая к зеркально отраженной. Для доказательства применяется асимптотический метод, разработанный в [2,3].

§ 1. К постановке задачи. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений ненагруженной сферической оболочки [4,5]

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 A v - \frac{1}{2} u^2 + \rho u = 0, \quad \varepsilon^2 A u + u v - \rho v = 0 \\ A(\dots) \equiv -\rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho(\dots), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 < \mu < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\left[\frac{dv}{d\rho} - \frac{\mu}{\rho} v \right]_{\rho=1} = 0, \quad \left[\frac{du}{d\rho} + \frac{\mu}{\rho} u \right]_{\rho=1} = 0; \quad \frac{v}{\rho} \Big|_{\rho=0} < \infty, \quad \frac{u}{\rho} \Big|_{\rho=0} < \infty \quad (1.2)$$

Все величины, входящие в уравнения (1.1), (1.2), безразмерные. При этом

$$u = \frac{R}{a} \frac{dw}{dr}, \quad v = \frac{\gamma R}{ahE} \frac{dF}{dr}, \quad \varepsilon^2 = \frac{hR}{a^2 \gamma}, \quad \gamma^2 = 12(1 - \mu^2)$$

Здесь w — прогиб срединной поверхности оболочки, F — функция напряжений, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, a — радиус внешнего контура, R — радиус оболочки и $r = a\rho$. Малый параметр ε^2 характеризует относительную тонкостенность оболочки. Краевые условия соответствуют неподвижному шарнирному закреплению оболочки по краю.

Легко видеть, что задача (1.1), (1.2) имеет тривиальное решение $v = u \equiv 0$. Это решение соответствует форме равновесия с нулевыми напряжениями и деформациями. Можно поставить вопрос о том, является ли эта форма единственной. Опыты с очень тонкими оболочками показывают, что нет. Например, вмятина на плохо надутым резиновом мячике остается после того как убрана сила, под действием которой она возникла. Попробуем объяснить этот факт при помощи уравнений (1.1). Так как речь идет об очень тонких оболочках, будем рассматривать малые значения параметра ε^2 .

Положим $\varepsilon = 0$. Уравнения (1.1) перейдут в алгебраические

$$-\frac{u_0^2}{2} + \rho u_0 = 0, \quad u_0 v_0 - \rho v_0 = 0 \quad (1.3)$$

Здесь два решения. Одно из них $u_0 = v_0 \equiv 0$ — тривиальное решение, которое одновременно является и решением задачи (1.1), (1.2). Другое решение

$$v_0 = 0, \quad u_0 = 2\rho \quad (1.4)$$

соответствует форме равновесия, близкой к зеркально отраженной.

Решение (1.4) удовлетворяет уравнению (1.1), но не удовлетворяет второму краевому условию в (1.2). Поэтому естественно ожидать, что задача (1.1), (1.2), при малых ε имеет второе решение, которое всюду внутри области ведет себя подобно (1.4) и только вблизи границы претерпевает быстрые изменения — такие, что краевые условия (1.2) выполняются.

Для доказательства существования второго решения сначала строятся асимптотические разложения при малых ε в окрестности (1.4) (§ 2), а затем доказывается существование решения задачи (1.1), (1.2), для которого справедливы построенные асимптотические разложения (§ 3). Здесь применяется теорема из [2,3], применявшаяся ранее при асимптотике некоторых нелинейных задач. Наконец, в § 4 рассмотрен пример и приведены графики основных характеристик второй формы равновесия.

Отметим, что существование нежестких оболочек при граничных условиях (1.2) подтверждено также детальным численным анализом данной задачи [6].

Приведенный ниже асимптотический анализ задачи в какой-то мере проясняет существование некоторых гипотез А. В. Погорелова [7].

2. Построение асимптотики. Введем обозначения. Пусть вектор $V \equiv (v, u)$ — решение, а $P[V]$ — левая часть системы (1.1). Для второго решения строятся асимптотические разложения

$$v = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s v_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s h_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s \alpha_s + x_n, \quad u = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s u_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s g_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s \beta_s + z_n \quad (2.1)$$

Функции $v_s(\rho)$ и $u_s(\rho)$ получаются при помощи первого итерационного процесса [8]. Именно, потребуем, чтобы

$$P[V_n] = O(\varepsilon^{n+1}), \quad V_n \equiv \left(\sum_{s=0}^n \varepsilon^s v_s, \sum_{s=0}^n \varepsilon^s u_s \right)$$

Приравняв нулю коэффициенты при различных степенях ε , для определения v_0, u_0 получаем систему (1.3) (причем выбирается второе решение — (1.4)), а для определения v_s, u_s — системы линейных однородных уравнений. Поэтому

$$v_s(\rho) = u_s(\rho) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

Функции типа пограничного слоя $h_s(\rho)$ и $g_s(\rho)$ получаются при помощи второго итерационного процесса [8]. Для этого разности $v - v_0$ и $u - u_0$ ($v_0 = 0, u_0 = 2\rho$) ищем в виде

$$v = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s h_s, \quad u - 2\rho = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s g_s \quad (2.2)$$

Подставим (2.2) в (1.1), (1.2), произведем замену $\rho = 1 - r$, затем разложим все коэффициенты в ряд Тейлора в окрестности точки $r = 0$ и положим $r = \varepsilon t$. Приравняв нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ для определения h_0, g_0 , получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$h_0'' + \frac{1}{2} g_0^2 + g_0 = 0, \quad g_0'' - g_0 h_0 - h_0 = 0 \quad (2.3)$$

а для определения h_s, g_s ($s = 1, 2, \dots, n$) — системы

$$-h_s'' - g_s(1 + g_0) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l+m=s \\ (l, m \neq 0)}} g_l g_m - t h_{s-1}'' - h_{s-1}' - \sum_{k+m+2=s} t^k h_m + t g_{s-1} \quad (2.4)$$

$$-g_s'' + h_s(1 + g_0) + g_s h_0 = - \sum_{\substack{k+m=s \\ (k, m \neq 0)}} h_k g_m - t g_{s-1}'' - g_{s-1}' - \sum_{k+m+2=s} t^k g_m - t h_{s-1}$$

Аналогично из (1.2) выводим первое краевое условие для h_0 и g_0 при $t = 0$, а второе краевое условие получаем из требования, чтобы решение имело характер пограничного слоя в окрестности $\rho = 1$, т. е.

$$g_0'(0) = 0, \quad h_0'(0) = 0, \quad g_0(\infty) = 0, \quad h_0(\infty) = 0 \quad (2.5)$$

Из (2.3), (2.5) немедленно следует, что

$$h_0 = g_0 = 0 \quad (2.6)$$

Теперь из (2.4) при $s = 1$, используя (2.6), выводим

$$h_1'' + g_1 = 0, \quad g_1'' - h_1 = 0$$

с краевыми условиями

$$g_1'(0) = 2(1 + \mu), \quad h_1'(0) = 0; \quad g_1(\infty) = h_1(\infty) = 0$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} h_1'(\rho) &= -\sqrt{2}(1 + \mu) \exp\left(-\frac{1-\rho}{\sqrt{2}\varepsilon}\right) \left(\cos \frac{1-\rho}{\sqrt{2}\varepsilon} + \sin \frac{1-\rho}{\sqrt{2}\varepsilon}\right) \\ g_1(\rho) &= -\sqrt{2}(1 + \mu) \exp\left(-\frac{1-\rho}{\sqrt{2}\varepsilon}\right) \left(\cos \frac{1-\rho}{\sqrt{2}\varepsilon} - \sin \frac{1-\rho}{\sqrt{2}\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции h_s, g_s ($s \geq 2$) находятся из систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$h_s'' + g_s = f_{1s}(t), \quad g_s'' - h_s = f_{2s}(t) \quad (2.8)$$

где $f_{1s}(t)$ и $f_{2s}(t)$ — конечные полиномы, состоящие из членов вида

$$t^m \left(B \sin \frac{\sqrt{2}}{2} lt + C \cos \frac{\sqrt{2}}{2} nt \right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} kt\right)$$

где m, k, l и n — целые числа, не превосходящие s . Отметим краевые условия

$$\begin{aligned} -h_s' &= \mu \sum_{k+m=s-1} t^k h_m, & g_s' &= \mu \sum_{k+m=s-1} t^k g_m & (t=0) \\ h_s(\infty) &= g_s(\infty) = 0 & (s=2, 3, \dots, n) & & (t=\infty) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Нетрудно видеть, что h_s, g_s будут функциями типа пограничного слоя [8].

Наконец, введем бесконечно дифференцируемые монотонные функции $\alpha_s(\rho)$ и $\beta_s(\rho)$, которые компенсируют невязку (экспоненциального порядка малости) в выполнении граничных условий (1.2) при $\rho = 0$ соответственно для функций h_s и g_s

$$\alpha_s(\rho) = \begin{cases} -h_s(0) & (0 \leq \rho \leq 0.1) \\ 0 & (0.2 \leq \rho \leq 1) \end{cases}, \quad \beta_s(\rho) = \begin{cases} -g_s(0) & (0 \leq \rho \leq 0.1) \\ 0 & (0.2 \leq \rho \leq 1) \end{cases}$$

Таким образом, асимптотические разложения (2.1) можно переписать

$$v = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s h_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s \alpha_s + x_n, \quad u = 2\rho + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s g_s + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s \beta_s + z_n \quad (2.10)$$

Здесь h_1, g_1 определены в (2.7), а h_s, g_s ($s \geq 2$) находятся решением систем (2.8), (2.9). Далее в § 3 будут использованы обозначения

$$\varphi_n = v - x_n, \quad \psi_n = u - z_n \quad (2.11)$$

Заметим, что из (2.10) и явных выражений для h_s, g_s, α_s и β_s легко устанавливаются оценки¹

$$|\varphi_n| < m_1 \varepsilon \rho, \quad |\psi_n| < m_2 \varepsilon \rho \quad (2.12)$$

Для примера выведем оценку φ_1 по ρ . Имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{h_1(\rho) + \alpha_1(\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{h_1(\rho) - h_1(0)}{\rho} = \left. \frac{dh_1}{d\rho} \right|_{\rho=0}$$

§ 3. Обоснование асимптотики. Существование нетривиального решения. Введем пространства векторов $V \equiv (v, u)$, состоящие:

(1) из векторов с конечной нормой

$$(L_2) \quad \|V\|_{L_2}^2 = \int_0^1 (v^2 + u^2) d\rho$$

¹ Здесь и всюду в дальнейшем, m_i и c_i — некоторые положительные постоянные, не зависящие от ε .

(2) и замыкания множества гладких вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1.2), по норме (H)

$$\|V\|_H^2 = \int_0^1 [(Av)^2 + (Au)^2] d\rho$$

Задачу (1.1), (1.2), будем рассматривать как функциональное уравнение

$$P(V) = 0 \quad (3.1)$$

где оператор P определяется левой частью системы (1.1).

Оператор P действует из пространства H в пространство L_2 . Чтобы показать это, надо воспользоваться следующими оценками:

$$\int_0^1 (v^4 + u^4) d\rho \leq m_3 \|V\|_H^4, \quad \max(|v| + |u|) \leq m_3 \|V\|_H \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (3.2)$$

Докажем неравенства (3.2). Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} Av = f_1, & \quad \left[\frac{dv}{d\rho} - \frac{\mu}{\rho} v \right]_{\rho=1} = 0, & \quad \frac{v}{\rho} \Big|_{\rho=0} < \infty \\ Au = f_2, & \quad \left[\frac{du}{d\rho} + \frac{\mu}{\rho} u \right]_{\rho=1} = 0, & \quad \frac{u}{\rho} \Big|_{\rho=0} < \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

Легко видеть, что уравнения (3.3) соответственно эквивалентны интегральным соотношениям

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \eta d\eta \int_\eta^1 \frac{f_1}{\xi} d\xi + \rho \frac{1+\mu}{1-\mu} \int_0^1 \eta d\eta \int_\eta^1 \frac{f_1}{\xi} d\xi \\ u &= \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \eta d\eta \int_\eta^1 \frac{f_2}{\xi} d\xi + \rho \frac{1-\mu}{1+\mu} \int_0^1 \eta d\eta \int_\eta^1 \frac{f_2}{\xi} d\xi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Теперь оценки (3.2) выводятся из (3.4) двукратным применением неравенства Буняковского.

Теорема 3.1. Задача (1.1), (1.2) имеет, кроме тривиального решения $v = u \equiv 0$, другое решение, для которого справедливы асимптотические разложения (2.10), причем имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max |x_n(\rho)| &\leq m_4 \varepsilon^n \\ \max |z_n(\rho)| &\leq m_4 \varepsilon^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 \leq \rho \leq 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для доказательства существования применяется теорема Л. В. Канторовича [9] о сходимости метода Ньютона для операторных уравнений, аналогично тому, как это

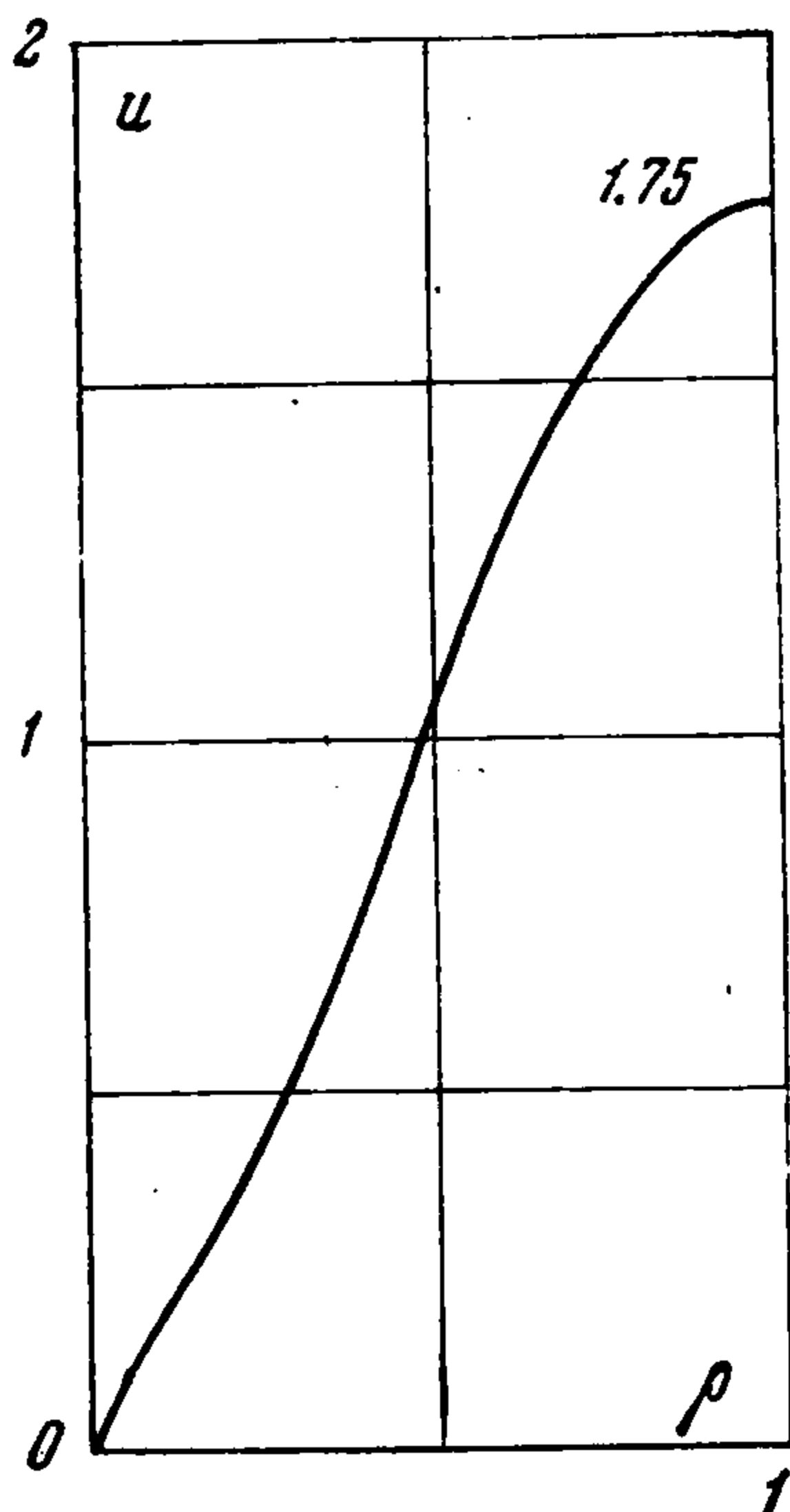
сделано в [2]. За начальное приближение принимается отрезок асимптотического ряда $V_k^* \equiv (\varphi_k, \psi_k)$.

Из теоремы Л. В. Канторовича легко выводится [2,3], следующая теорема, позволяющая установить существование в окрестности V_k^* решение уравнения (3.1) с асимптотикой V_k^* .

Теорема 3.2. Пусть оператор P определен в сфере Ω ($\|V - V_k^*\| \leq R$) пространства H и имеет в замкнутой сфере Ω_0 ($\|V - V_k^*\| \leq r < R$) непрерывную вторую производную. Пусть, кроме того, существует оператор $\Gamma_\varepsilon(V) = [P_{V_k^*}'(V)]^{-1}$ и выполняются условия

$$1) \quad \|P(V_k^*)\|_{L_2} \leq C_1 \varepsilon^{k+1}, \quad 2) \quad \|P_{V_k^*}''\| \leq C_3 \quad (3.6)$$

$$3) \quad \|\Gamma_\varepsilon\|_{(L_2 \rightarrow H)} \leq C_2 \varepsilon^{-m} \quad (2m < k+1) \quad (3.7)$$



Фиг. 1

Тогда уравнение (3.1) имеет решение V^* при достаточно малых ε

$$\varepsilon < (2C_1C_2^2C_3)^{2m-k-1}$$

и справедлива оценка

$$\|V^* - V_k^*\|_H \leq C\varepsilon^{k+1-m}$$

Покажем, что условия теоремы 3.2 выполняются, причем $m = 4$ и не зависит от k , а k можно подобрать так, что $k > 2m - 1$.

Первая оценка (3.10) устанавливается непосредственно из соотношений

$$\varepsilon^2 A\varphi_k - 1/2\psi_k^2 + \rho\psi_k = O(\varepsilon^{k+1}), \quad \varepsilon^2 A\psi_k + \varphi_k\psi_k - \rho\varphi_k = O(\varepsilon^{k+1})$$

которые легко проверяются подстановкой φ_k и ψ_k (см. (2.11)) в левую часть (1.1) (1.2).

Далее покажем, что имеет место оценка

$$\|\Gamma_\varepsilon\|_{(L_2 \rightarrow H)} \leq C_2\varepsilon^{-4} \quad (3.8)$$

Для этого рассмотрим производную Фреше на элементе V_k^*

$$\begin{aligned} & P_{V_k^*}'(V) \equiv \\ & \equiv (\varepsilon^2 Av - \psi_k u + \rho u, \varepsilon^2 Au + \psi_k v + \varphi_k u - \rho v) \end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$P_{V_k^*}'(V) = f, \quad f \equiv (f_1, f_2) \quad (3.9)$$

с краевыми условиями (1.2). Используя (2.10) и (2.14), перепишем (3.9) в виде

$$\varepsilon^2 Av - \rho u + \varepsilon s_1 u = f_1, \quad \varepsilon^2 Au + \rho v - \varepsilon s_1 v + \varepsilon s_2 u = f_2 \quad (3.10)$$

Здесь

$$s_1 = \varepsilon^{-1}(\psi_k - 2\rho), \quad s_2 = \varepsilon^{-1}\varphi_k$$

Умножим первое уравнение (3.10) на $v - u$, второе на $v + u$, проинтегрируем от нуля до единицы и сложим. В результате получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_0^1 \left(\rho v'^2 + \frac{v^2}{\rho} + \rho u'^2 + \frac{u^2}{\rho} \right) d\rho + \varepsilon^2 \mu u^2(1) - \varepsilon^2 \mu v^2(1) + \int_0^1 \rho (u^2 + v^2) d\rho - \\ & - \varepsilon \int_0^1 [s_1 (u^2 + v^2) - s_2 u (v + u)] d\rho = \int_0^1 [f_1 (v - u) + f_2 (v + u)] d\rho - 2\varepsilon^2 \mu v(1) u(1) \quad (3.11) \end{aligned}$$

Отметим, что при выводе (3.11) существенно используется равенство, справедливое для любых гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи (1.2):

$$\int_0^1 Au v d\rho - \int_0^1 Av u d\rho = 2\mu v(1) u(1) \quad (3.12)$$

Это равенство доказывается интегрированием по частям. Применяя (1.2), имеем

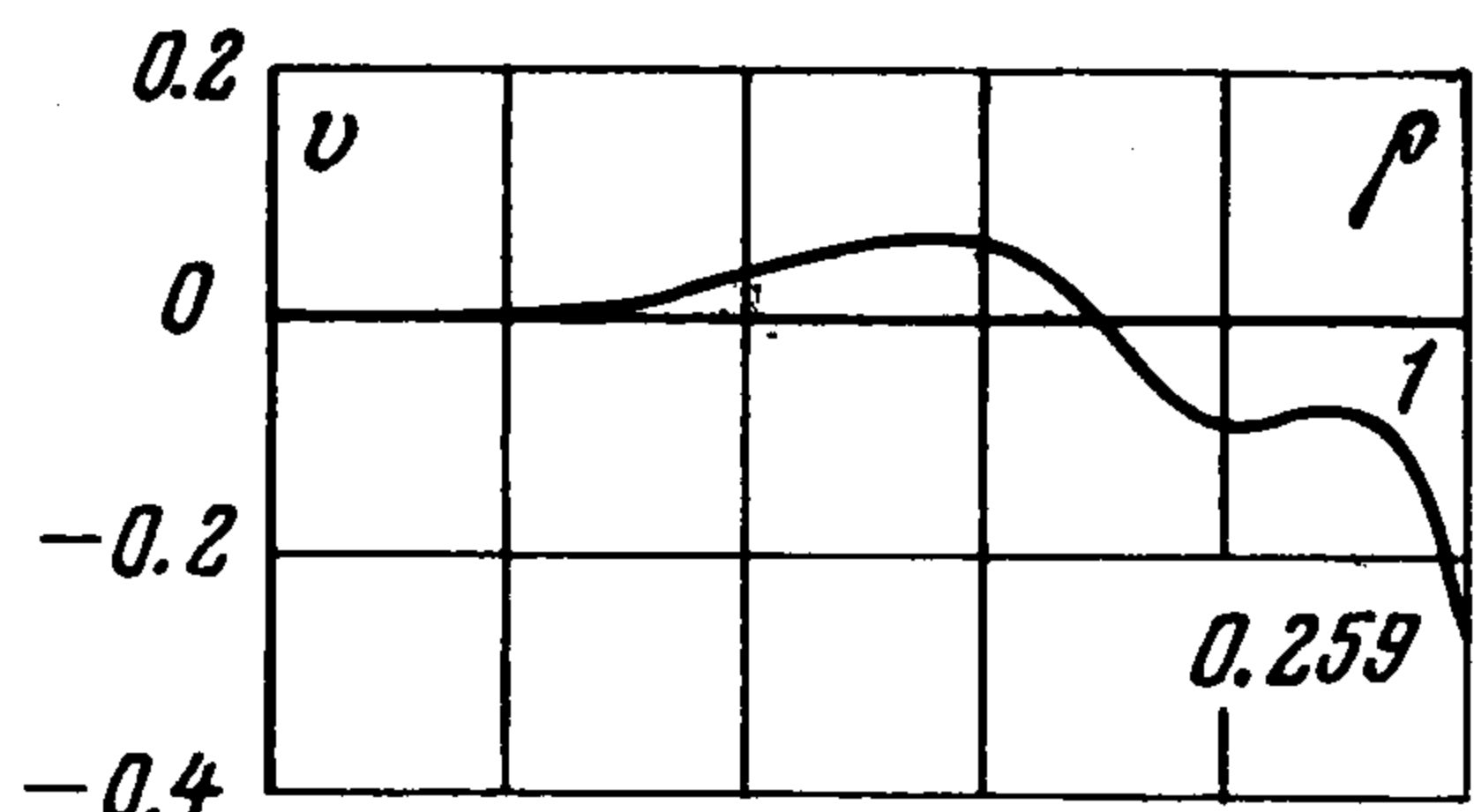
$$\int_0^1 Av u d\rho = -u(1)v(1) - u(1)v'(1) + \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho v) \frac{d}{d\rho}(\rho u) d\rho$$

Меняя местами v и u и вычитая одно равенство из другого, найдем

$$\int_0^1 Au v d\rho - \int_0^1 Av u d\rho = v'(1)u(1) - u'(1)v(1)$$

Используя (1.2), приходим к (3.12). Правая часть (3.11) оценивается выражением

$$\int_0^1 (|f_1| + |f_2|)(|v| + |u|) d\rho + \varepsilon^2 \mu (v^2(1) + u^2(1)) \quad (3.13)$$



Фиг. 2

Далее, из (2.12) следует, что для достаточно малых ε имеют место оценки

$$|s_1(\rho, \varepsilon)| < 4(1 + \mu)\rho, \quad |s_2(\rho, \varepsilon)| < 4(1 + \mu)\rho \quad (3.14)$$

Применяя (3.14) и очевидные неравенства $2uv \leq u^2 + v^2$ и $u^2 \leq u^2 + v^2$ к третьему интегралу в левой части (3.11), выводим

$$J \equiv -\varepsilon \int_0^1 [s_1(v^2 + u^2) - s_2u(v + u)] d\rho \leq 10\varepsilon(1 + \mu) \int_0^1 \rho(v^2 + u^2) d\rho \quad (3.15)$$

Теперь находим, что

$$\int_0^1 \rho(v^2 + u^2) d\rho + J \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(v^2 + u^2) d\rho \quad \text{при } \varepsilon < \frac{1}{20(1 + \mu)} \quad (3.16)$$

Учитывая (3.16), (3.13), из (3.11) выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_0^1 \left(\rho v'^2 + \frac{v^2}{\rho} + \rho u'^2 + \frac{u^2}{\rho} \right) d\rho + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(v^2 + u^2) d\rho &\leq \\ &\leq \int_0^1 (|f_1| + |f_2|)(|v| + |u|) d\rho + 2\varepsilon^2 \mu v^2(1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используя очевидное неравенство

$$\int_0^1 \left(\rho v'^2 + \frac{v^2}{\rho} \right) d\rho \geq 2 \int_0^1 v v' d\rho = v^2(1)$$

из (3.17) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(1 - 2\mu) \int_0^1 \left(\rho v'^2 + \frac{v^2}{\rho} + \rho u'^2 + \frac{u^2}{\rho} \right) d\rho + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(v^2 + u^2) d\rho &\leq \\ &\leq \int_0^1 (|f_1| + |f_2|)(|v| + |u|) d\rho \quad \left(0 < \mu < \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Отсюда имеем на интервале $0 \leq \rho \leq 1$

$$\varepsilon^2(1 - 2\mu)(\max |u|^2 + \max |v|^2) \leq 2 \|f\|_{L_2} \|V\|_{L_2} \leq 2 \|f\|_{L_2} (\max |u|^2 + \max |v|^2)^{1/2} \quad (3.18)$$

Из (3.18) выводим

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} |u| + \max_{0 \leq \rho \leq 1} |v| \leq 4\varepsilon^{-2}(1 + 2\mu)^{-1/2} \|f\|_{L_2} \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

Теперь из (3.10) получим оценку в H . Имеем

$$Av = \varepsilon^{-2}(f_1 + \rho u - \varepsilon s_1 u), \quad Au = \varepsilon^{-2}(f_2 - \rho v + \varepsilon s_1 v - \varepsilon s_2 u)$$

Используя (3.18), находим

$$|Av| \leq \varepsilon^{-2} \left[|f_1| + \frac{5 \|f\|_{L_2}}{\varepsilon^2(1 - 2\mu)} \right], \quad |Au| \leq \varepsilon^{-2} \left[|f_2| + \frac{5 \|f\|_{L_2}}{\varepsilon^2(1 - 2\mu)} \right] \quad (3.19)$$

Наконец, применяя (3.19), получим

$$\|V\|_H \leq C_2 \varepsilon^{-4} \|f\|_{L_2}, \quad \|V\|_H \leq C_2 \varepsilon^{-4} \|P_{V_k}^{*'}(V)\|_{L_2}$$

Отсюда легко выводим, что оператор $P_{V_k}^{*}'$ обратим и имеет место оценка (3.8).

Рассмотрим билинейную форму

$$P''(V')(V'') \equiv (-u'u'', u'v'' + v'u'')$$

Теперь применяя неравенства (3.2), получаем $\|P''(V')(V'')\|_{L_2} \leq C_3 \|V'\|_H \|V''\|_H$. Отсюда и следует вторая оценка в (3.6).

Итак, условия теоремы 3.2 выполняются, если $k > 7$ и ε достаточно мало ($0 < \varepsilon < \varepsilon_1$). Поэтому уравнение (3.1) имеет решение $V^* \equiv (v, u)$, для которого справедлива оценка

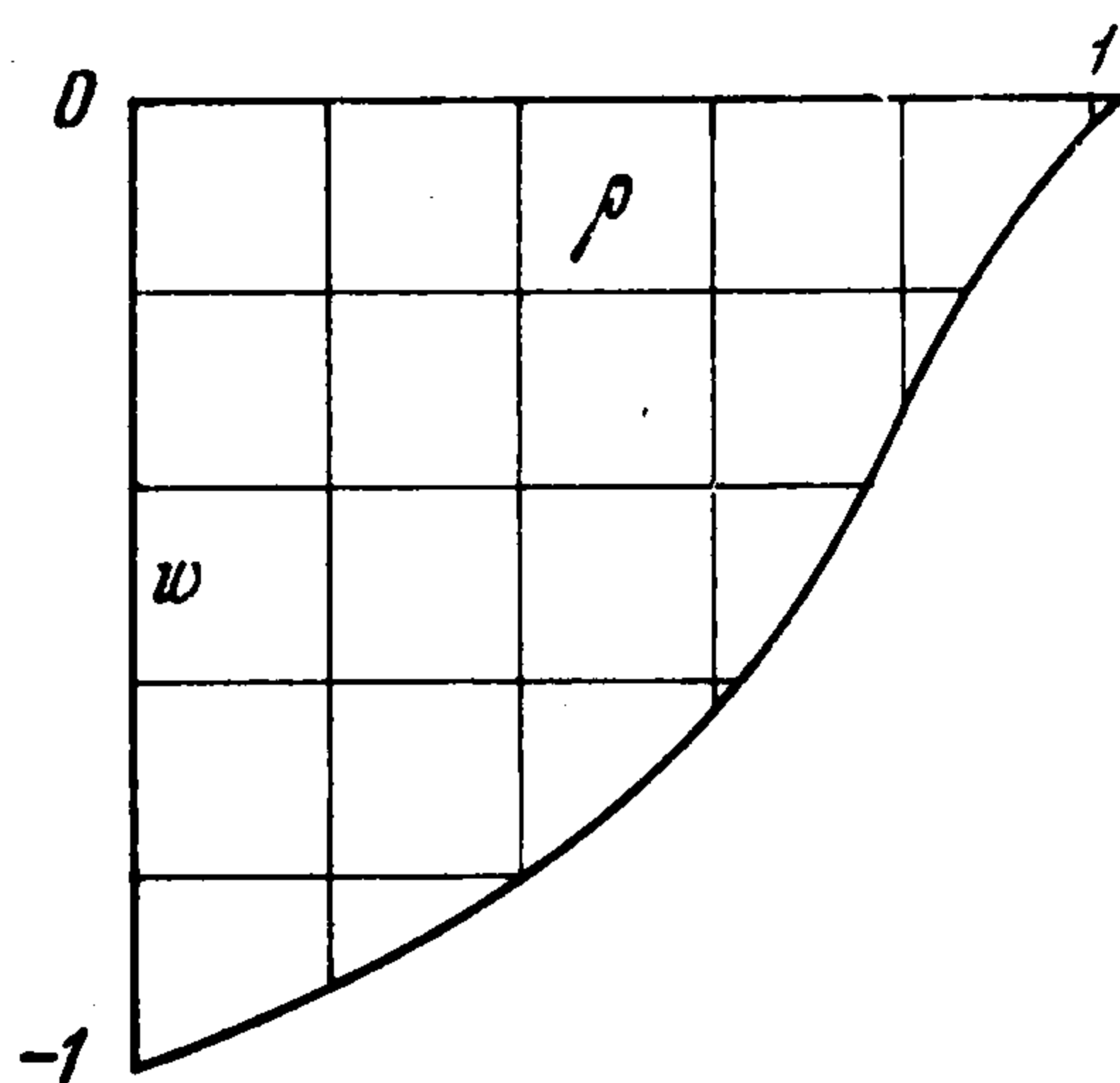
$$\|V^* - V_k^*\|_H \leq m\varepsilon^{k-3} \quad (k > 7) \quad (3.20)$$

Теперь, применяя неравенство треугольника, теоремы вложения C в H (см. (3.2)) и явные выражения для функций h_s, g_s из (3.20), получаем оценки (3.5). Отметим также, что аналогично можно получить оценки $\max |x_n'(\rho)|$ и $\max |z_n'(\rho)|$.

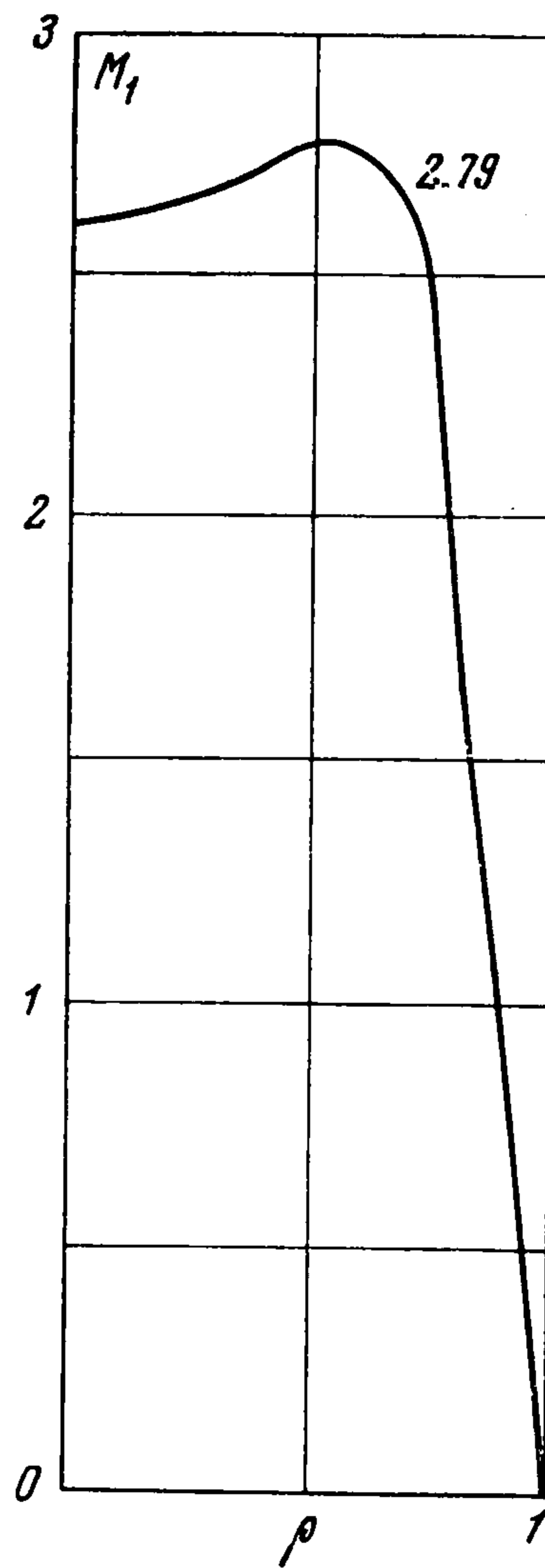
§ 4. Пример. Асимптотические разложения (2.10) дают очень простые формулы для расчета основных характеристик второй формы равновесия. Пусть $H/h=8$, H — высота оболочки. Тогда $\varepsilon^2 = 1/2h/H\gamma = 0.141$ ($\mu = 0.3$, $a^2 = 2RH$). Величины v и u вычисляем с точностью до ε включительно по формулам (2.10), (2.7) (фиг. 1,2).

Значения прогиба и момента находим по формулам (фиг. 3,4)

$$w(\rho) = \int_1^\rho u d\rho, \quad M_1 = \frac{du}{d\rho} + \frac{\mu}{\rho} u$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Автор благодарит И. И. Воровича и В. И. Юдовича за большую помощь и поддержку в работе.

Поступила 30 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
2. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично нагруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
3. Срубщик Л. С., Юдович В. И. О применении метода Ньютона в задачах асимптотического интегрирования нелинейных уравнений. Труды VI. Всесоюз. конференции по применению методов функционального анализа к решению нелинейных задач. Наука, 1966.
4. Федосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М. Оборонгиз, 1949.
5. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
6. Ворович И. И., Зипалова В. Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
7. Погорелов А. В. Строго выпуклые оболочки при закритических деформациях, т. I, Сферические оболочки, Харьков. Изд-во Харьк. ун-та. 1965.
8. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.