

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Н. А. Алфутов, Л. И. Балабух

(Москва)

В дифференциальное уравнение устойчивости пластин и в соответствующий энергетический критерий Брайэна входят начальные напряжения в средней плоскости.

Эти напряжения в общем случае определяются из решения плоской задачи. При действии на пластину сложных контурных нагрузок, например сосредоточенных сил, решение плоской задачи является весьма сложным.

В то же время энергетический критерий потери устойчивости допускает представление, в котором, кроме потенциальной энергии изгиба пластины, входит только работа заданных внешних сил.

Поэтому возникает естественный вопрос, нужно ли вообще знать распределение истинных начальных напряжений при решении задачи устойчивости. В работе показано, что можно находить критические значения внешних нагрузок без определения начального напряженного состояния пластины.

Получена новая форма энергетического критерия потери устойчивости, в которую не входят начальные напряжения. Показано, что при определении дополнительных тангенциальных перемещений, на которых совершают работу внешние нагрузки при потере устойчивости пластины, нельзя в общем случае пользоваться условиями нерастяжимости средней плоскости.

Предлагаемый метод определения критических нагрузок без предварительного решения плоской задачи иллюстрируется на примерах. Рассматривается известная задача Зоммерфельда об устойчивости прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами.

1. Пусть u, v, w — составляющие вектора полного перемещения точек средней плоскости пластины в прямоугольной системе координат x, y, z . Оси x, y лежат в плоскости пластины. Деформации в средней плоскости пластины

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.1)$$

Считаем, что напряжения в средней плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

и, следовательно,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

На контуре пластины напряжения связаны с нагрузками X, Y зависимостями

$$\sigma_x l + \tau m = X, \quad \sigma_y m + \tau l = Y \quad (l = \cos \alpha, m = \sin \alpha) \quad (1.4)$$

Здесь α — угол, образованный внешней нормалью к контуру пластины с осью x . Соответственно на контуре

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_0^s X ds, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\int_0^s Y ds \quad (1.5)$$

Закон Гука для напряжений и деформаций в средней плоскости

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \quad \gamma = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau \quad (1.6)$$

где E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

Пусть к моменту, предшествующему потере устойчивости,

$$w = 0, \quad v = v_0, \quad u = u_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{x0}, \dots \quad (1.7)$$

После потери устойчивости

$$v = v_0 + v_1, \quad u = u_0 + u_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + \varepsilon_{x1}, \dots \quad (1.8)$$

Функция напряжений φ_0 удовлетворяет бигармоническому уравнению $\nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 = 0$.
Функция напряжений φ_1 удовлетворяет известному уравнению Кармана

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_1 = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.9)$$

Линеаризованное уравнение равновесия искривленного элемента пластины в проекции на нормаль

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = h \left(\sigma_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \right) \quad (1.10)$$

где h — толщина пластины.

Известный энергетический критерий Брайэна [1, 2] безразличного равновесия при потере устойчивости пластины имеет вид

$$V + \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (1.11)$$

где V — потенциальная энергия изгиба пластины

$$V = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (1.12)$$

Напряжения σ_{x0} , σ_{y0} , τ_0 должны быть определены из решения плоской задачи теории упругости. Обозначим

$$U = \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (1.13)$$

2. Производные от поперечного прогиба w , входящие в (1.13), можно выразить через дополнительные перемещения u_1 , v_1 и дополнительные напряжения σ_{x1} , σ_{y1} , τ_1 . Из (1.1) и (1.6) следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 &= \varepsilon_{x1} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_{x1} - \mu \sigma_{y1}) - \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 &= \varepsilon_{y1} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_{y1} - \mu \sigma_{x1}) - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_1 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_1 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$$

На основании (2.1) и зависимостей (2.2)

$$\frac{1}{E} (\sigma_{x0} - \mu \sigma_{y0}) = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \frac{1}{E} (\sigma_{y0} - \mu \sigma_{x0}) = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

для начального напряженного состояния, можно выражение (1.13) преобразовать к следующему виду

$$\begin{aligned} U = h \iint & \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \sigma_{x1} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \sigma_{y1} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \tau_1 \right] dx dy - h \iint \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \sigma_{x0} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial v_1}{\partial y} \sigma_{y0} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \tau_0 \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя формулы Грина интегрирования по частям, получим

$$U = h \oint [u_0 \sigma_{x1} l + v_0 \sigma_{y1} m + u_0 \tau_1 m + v_0 \tau_1 l] ds - h \iint \left[u_0 \left(\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right) + v_0 \left(\frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) \right] dx dy - h \oint [u_1 \sigma_{x0} l + v_1 \sigma_{y0} m + u_1 \tau_0 m + v_1 \tau_0 l] ds + h \iint \left[u_1 \left(\frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \right) + v_1 \left(\frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (2.4)$$

В силу условий (1.2), которые выполняются как для начальных, так и для дополнительных напряжений, двойные интегралы обращаются в нуль. Множители при перемещениях u_0 , v_0 и u_1 , v_1 в выражениях под контурными интегралами преобразуются, согласно (1.4), к контурным нагрузкам. Таким образом, энергетический критерий безразличного равновесия при потере устойчивости можно записать в форме

$$V + h \oint [u_0 X_1 + v_0 Y_1] ds - h \oint [u_1 X_0 + v_1 Y_0] ds = 0 \quad (2.5)$$

Здесь X_0 , Y_0 и u_0 , v_0 — начальные контурные нагрузки и перемещения; X_1 , Y_1 и u_1 , v_1 — дополнительные контурные нагрузки и соответствующие перемещения

Если на контуре пластины заданы усилия X_0 , Y_0 (первая краевая задача), то дополнительные контурные усилия X_1 , Y_1 равны нулю, и энергетический критерий потери устойчивости (2.5) принимает вид

$$V - h \oint [u_1 X_0 + v_1 Y_0] ds = 0 \quad (2.6)$$

Если на контуре пластины заданы перемещения u_0 , v_0 (вторая краевая задача), то на контуре обращаются в нуль дополнительные перемещения u_1 , v_1 , и вместо условия (2.6) получим

$$V + h \oint [u_0 X_1 + v_0 Y_1] ds = 0 \quad (2.7)$$

Для первой задачи граничные условия $X_1 = Y_1 = 0$ можно записать также в виде

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.6) можно рассматривать как энергетический критерий потери устойчивости в форме С. П. Тимошенко.

3. Введем в рассмотрение вместо действительных начальных напряжений σ_{x0} , σ_{y0} , τ_0 статически возможные напряжения σ_{x0}^+ , σ_{y0}^+ , τ_0^+ . Они удовлетворяют уравнениям равновесия (1.2) и граничным условиям (1.4), но могут не удовлетворять уравнению совместности деформаций $\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$. Для любой системы статически возможных напряжений можно написать тождество

$$\oint [u_1 X_0 + v_1 Y_0] ds = \iint \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \sigma_{x0}^+ + \frac{\partial v_1}{\partial y} \sigma_{y0}^+ + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \tau_0^+ \right] dx dy \quad (3.1)$$

Следовательно, энергетический критерий (2.6) С. П. Тимошенко можно написать в форме

$$V - h \iint \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \sigma_{x0}^+ + \frac{\partial v_1}{\partial y} \sigma_{y0}^+ + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \tau_0^+ \right] dx dy = 0 \quad (3.2)$$

Исключая с помощью уравнений (2.1) производные от перемещений u_1 и v_1 , получим

$$V + \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{x0}^+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y0}^+ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_0^+ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy - \frac{h}{E} \iint (\sigma_{x0}^+ + \sigma_{y0}^+) (\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) dx dy + \frac{h(1+\mu)}{E} \iint (\sigma_{x0}^+ \sigma_{y1} - 2\tau_0^+ \tau_1 + \sigma_{y0}^+ \sigma_{x1}) dx dy = 0 \quad (3.3)$$

Последний интеграл в левой части уравнения (3.3) обращается в нуль. Это легко доказать, заменив $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_1$ их выражениями через производные от функции Эри φ_1 и проведя интегрирование по частям. Контурный интеграл пропадет в силу граничных условий (2.8), а интеграл по площади — в силу уравнений равновесия (1.2) для напряжений $\sigma_{x0}^+, \sigma_{y0}^+, \tau_0^+$.

Таким образом, энергетическому уравнению (2.6) можно придать форму

$$V + \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{x0}^+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y0}^+ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_0^+ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy - \frac{h}{E} \iint (\sigma_{x0}^+ + \sigma_{y0}^+) (\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) dx dy = 0 \quad (3.4)$$

Если статически возможные напряжения совпадают с истинными напряжениями, то

$$\iint (\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) (\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) dx dy = \iint \nabla^2 \varphi_0 \nabla^2 \varphi_1 dx dy = \iint (\nabla^2 \nabla^2 \varphi_0) \varphi_1 dx dy = 0 \quad (3.5)$$

и уравнение (3.4) переходит в исходное уравнение (1.11). Уравнение (3.4) является новым энергетическим критерием устойчивости, выраженным через статически возможные напряжения $\sigma_{x0}^+, \sigma_{y0}^+, \tau_0^+$. При использовании этого критерия не требуется решать плоскую задачу теории упругости для определения начальных напряжений $\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \tau_0$. Неизвестную функцию φ_1 следует определять из решения уравнения Кармана (1.9) при граничных условиях (2.8) для заданной функции поперечного прогиба w .

Необходимость решения нелинейного уравнения (1.9), на первый взгляд, кажется странной. Для разъяснения особенностей полученной задачи рассмотрим уравнения для u_1 и v_1 . Из (1.1) и (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из рассмотрения уравнений (3.6) и уравнения (1.9) следует, что вторые слагаемые правых частей этих уравнений, определяемые дополнительной функцией Эри φ_1 , имеют тот же порядок малости, что и первые слагаемые, выражающиеся через квадраты и произведения производных от поперечного прогиба пластины.

В ряде работ по устойчивости пластин, начиная с ранних работ С. П. Тимошенко, перемещения u_1 и v_1 на контуре пластины находились из так называемых условий нерастяжимости средней плоскости пластины

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.7)$$

Однако система уравнений (3.7) будет совместной, только когда

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.8)$$

т. е. когда правая часть уравнения (1.9) обращается в нуль и $\varphi_1(x, y) = 0$. Но условие (3.8) выполняется только при изгибе пластины по развертывающейся поверхности, например в случае цилиндрического изгиба. Формальное определение перемещения $u_1(x, y)$ или $v_1(x, y)$ на контуре пластины путем интегрирования одного из первых двух уравнений системы (3.7) является незаконным, если не выполняется (3.8).

Интересно отметить, что из энергетического условия (2.6) можно, формально пользуясь уравнениями (3.7), получить уравнение Брайэна (1.11). Именно так это уравнение

получил С. П. Тимошенко. Однако из уравнений (3.7) в общем случае нельзя получить правильные величины перемещений $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$. Отметим также одно интересное свойство истинных напряжений $\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \tau_0$, отличающее их от статически возможных напряжений $\sigma_{x0}^+, \sigma_{y0}^+, \tau_0^+$. Вычитая из уравнения (1.11) уравнение (2.6), получим

$$\iint \left[\sigma_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \oint [u_1 X_0 + v_1 Y_0] ds = 0$$

Заменяя контурный интеграл интегралом по площади и учитывая (1.1), получим

$$\iint (\sigma_{x0} \epsilon_{x1} + \sigma_{y0} \epsilon_{y1} + \tau_0 \gamma_1) dx dy = 0 \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) можно рассматривать как своеобразное условие ортогональности истинных начальных напряжений и возникающих в момент потери устойчивости дополнительных деформаций средней плоскости пластины.

Для произвольных статически возможных начальных напряжений условие (3.9) не выполняется. Условие ортогональности (3.9) можно также написать в виде

$$\iint \nabla^2 \varphi_0 \nabla^2 \varphi_1 dx dy = 0 \quad (3.10)$$

Обозначив через φ_0^+ функцию Эри для статически возможных начальных напряжений, получим из (3.4)

$$V + \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{x0}^+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y0}^+ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_0^+ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy - \frac{h}{E} \iint \nabla^2 \varphi_0^+ \nabla^2 \varphi_1 dx dy = 0 \quad (3.11)$$

К этому уравнению следует добавить уравнение (1.9) и граничные условия (2.8).

Схема решения задачи определения критических значений внешних нагрузок, приложенных к контуру пластины в ее плоскости, состоит в следующем. При заданных внешних нагрузках на контуре пластины определяется наиболее простая, статически возможная система напряжений $\sigma_{x0}^+, \sigma_{y0}^+, \tau_0^+$. Поперечный прогиб пластины задается в виде линейного агрегата

$$w = \sum f_w w_m(x, y) \quad (3.12)$$

так, как это делается при решении задач методом Ритца.

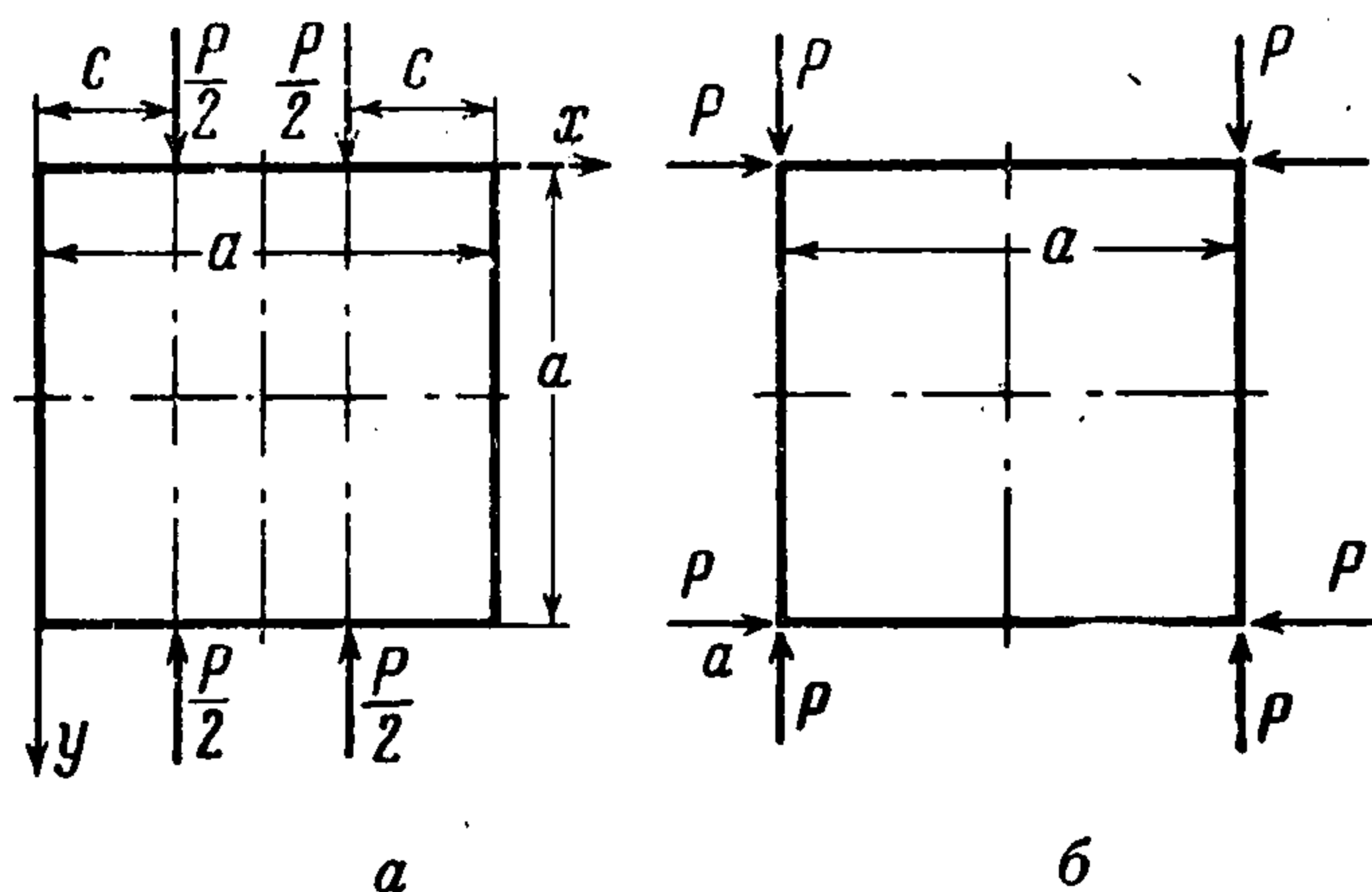
Вычисляется правая часть уравнения (1.9) и точно или приближенно оно решается при однородных граничных условиях (2.8) на контуре. Решение этой вспомогательной задачи аналогично решению задачи о поперечном изгибе защемленной по контуру пластины. Определив $\varphi_1(x, y)$ и $\nabla^2 \varphi_1(x, y)$, можно вычислить последнее слагаемое левой части уравнения (3.11) и применить затем обычную процедуру метода Ритца — Тимошенко для нахождения критических значений параметров, определяющих величины внешних контурных нагрузок X_0, Y_0 . Вместо уравнения (3.11) можно рассматривать исходное уравнение (2.6) метода С. П. Тимошенко. Но перемещения u_1 и v_1 на контуре пластины следует определять путем интегрирования правильных уравнений (3.6), а не из ошибочных уравнений (3.7).

Таким образом, использование энергетического метода С. П. Тимошенко в форме уравнения (2.6) не требует предварительного определения действительного поля напряжений в пластине до потери устойчивости, но его правильное применение требует решения уравнения Кармана (1.9) и определения тангенциальных перемещений с учетом дополнительных напряжений $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_1$, возникающих при выпучивании пластины.

Во многих случаях, особенно при действии на пластину сосредоточенных сил, решение уравнения (1.9) при простых граничных условиях (2.8) много проще, чем решение бигармонического уравнения $\nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 = 0$ при сложных граничных условиях.

Энергетическое уравнение (2.6) можно рассматривать как следствие закона сохранения энергии при бифуркации форм равновесия пластины. Но при таком рассмотре-

нии этого уравнения и полученных в данной статье результатов возникает кажущееся противоречие. Из уравнения (2.6) следует, что при потере устойчивости пластиной вся работа внешних сил на дополнительных перемещениях переходит в потенциальную энергию изгиба. А из уравнений (3.6) следует, что надо учитывать дополнительные напряжения в средней плоскости пластины. Это противоречие легко разъясняется, если заметить, что потенциальная энергия этих дополнительных напряжений будет величиной более высокого порядка малости. Но при определении дополнительных тангенциальных перемещений точек средней плоскости эти напряжения необходимо учитывать.



Фиг. 1

4. В качестве иллюстрации применения общих зависимостей рассмотрим задачу устойчивости квадратной свободно опертой пластины, сжатой сосредоточенными силами (фиг. 1а). Граничные условия для $w(x, y)$:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \\ w = 0, \quad \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad \text{при } y = 0, y = a \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для функции $\varphi_1(x, y)$ справедливы граничные условия (2.8).

Зададимся приближенными выражениями для w и φ_1 в форме

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad \varphi_1 = c_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} \quad (4.2)$$

Интегрируя уравнение (1.9) по методу Галеркина, находим $c_1 = -f_1^2 E / 4$. Согласно (1.12) получим $V = \pi^2 f_1^2 D / 2a^2$. В силу симметрии задачи можно далее рассматривать только половину пластины при $x \leq a/2$. Статически возможные напряжения выбираем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{y0}^+ &= -\frac{P}{2he} \quad \text{при } \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) < x < \left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \sigma_{y0}^+ &= 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \varepsilon/2, \quad (c + \varepsilon/2) \leq x \leq a/2 \\ \sigma_{x0}^+ &= 0, \quad \tau_0^+ = 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда, учитывая, что

$$\nabla^2 \varphi_1 = C_1 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a}\right) \quad (4.4)$$

из уравнения (3.7) получим

$$\frac{\pi^4}{a^2} \frac{f_1^2 D}{2} - \frac{\pi^2 f_1^2 P_*}{4a} \sin \frac{2\pi c}{a} - \frac{\pi^2 f_1^2 P_*}{16a} \cos \frac{2\pi c}{a} = 0 \quad (4.5)$$

где P_* — критическая сила. Отсюда

$$\bar{P}_* = \frac{P_* a}{4\pi^2 D} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi c}{a}} \quad (4.6)$$

В частности при $c = \frac{1}{2} a$ и при $c = 0$ соответственно получим $\bar{P}_* = \frac{2}{3}$ и $\bar{P}_* = 2$. Пользуясь уравнениями (3.6), получим на контуре пластины

$$\bar{v}_1 = \frac{8av_1}{\pi^2 f_1^2} = 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{a} \quad \text{при } y = 0 \quad (4.7)$$

и из условия (2.6) опять приходим к формуле (4.6).

Задача устойчивости прямоугольной пластины, нагруженной сосредоточенными силами, имеет интересную историю. Впервые она была рассмотрена Зоммерфельдом [3] в 1906 году; затем ее решали С. П. Тимошенко [1], А. П. Филиппов [4], А. И. Лурье [5] и другие авторы в нескольких различных вариантах и при различных граничных условиях. Для квадратной шарнирно опертой пластинки, сжатой двумя сосредоточенными силами (при $c = 1/2a$ в рассмотренной выше задаче) все эти авторы получали значение $\bar{P}_* = 0.478$, что существенно ниже значения $\bar{P}_* = 2/3 \approx 0,667$, даваемого формулой (4.6).

В самое последнее время появилось несколько новых работ, где эта же задача решалась с использованием вычислительных машин. В этих работах численно определялось поле начальных действительных напряжений, а затем также численно решалась задача устойчивости. В частности, для квадратной шарнирно опертой пластины (при $c = 1/2a$) таким способом было получено $\bar{P}_* = 0.650$ [6] и $\bar{P}_* = 0.675$ [7].

Значение $\bar{P}_* = 0.478$, полученное ранее, объясняется тем что вместо действительного поля начальных напряжений использовалось статически допустимое поле начальных напряжений (4.3), а определение критических нагрузок велось фактически по формуле (3.11), но без учета последнего интеграла.

Если рассмотренную выше задачу попытаться решить, воспользовавшись условием нерастяжимости средней плоскости, и определить $v_1(x, y)$ из одного только второго уравнения системы (3.7), то вместо зависимости (4.7) и формулы (4.6) получим

$$\bar{v}_1 = 1 - \cos \frac{2\pi x}{a}, \quad \bar{P}_* = \frac{1}{1 - \cos 2\pi c/a} \quad (4.8)$$

При $c = 1/2a$ получим $\bar{P}_* = 0.5$, а при $c \rightarrow 0$ приходим к абсурдному результату $\bar{P}_* \rightarrow \infty$. Этот же самый результат $\bar{P}_* \rightarrow \infty$ получится и при решении задачи по формуле (3.11), если в ней не учитывать последнего интеграла.

Аналогичный пример (фиг. 1б), когда условие нерастяжимости средней плоскости приводит к бесконечно большим критическим нагрузкам, был приведен в работе [8]. Но из этого остроумного примера авторы работы [8] сделали, строго говоря, неверный вывод о том, что при решении этой задачи надо определять действительные начальные напряжения в пластине. Используя ранее полученные приближенные зависимости (4.2), (4.3) и (4.5), легко найти, не определяя начальных напряжений, что $\bar{P}_* = 1/2$.

Отметим, что полученные результаты легко обобщаются на задачи устойчивости и колебаний пластин, нагруженных массовыми силами, и, в частности, на задачу о собственных колебаниях вращающегося диска, растянутого центробежными силами.

Поступила 2 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
2. Reissner H. Energiekriterium der Knicksicherheit Z. angew. Math. Mech., 1925, Bd 5, стр. 475.
3. Sommerfeld A. Über die Knicksicherheit der Stege von Walzenprofilen. Z. f. Math. u. Physik, 1906, Bd. 54.
4. Филиппов А. П. Устойчивость пластин, сжатых сосредоточенными силами. Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. н., 1933, № 7.
5. Лурье А. И. Устойчивость пластинки, сжатой сосредоточенными силами. Тр. Ленингр. индустриальн. ин-та, 1939, № 3, вып. 1.
6. Yamaki. Buckling of a Rectangular Plate under Loccally Distributed Forces Applied on two Opposite Endes. The Reports of the Institute of high Speed Mechanics, Tohoku Univ., 1954, vol. 4.
7. Романенко Ф. А. Устойчивость плоской формы равновесия неоднородных пластин при действии дискретных нагрузок. Прикладная механика. Отд. матем. и киберн. АН УССР, 1966, т. 2, вып. 1.
8. Александров А. В., Лащенко Б. Я. О применении энергетического метода в задачах устойчивости упругих систем. Строительная механика и расчет сооружений, 1965, № 5.