КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О СЖАТИИ УПРУГОГО СЛОЯ ДВУМЯ ШТАМПАМИ

Ю. Н. Кузьмин, Я. С. Уфлянд
(Ленинград)

Рассмотрена осесимметричная деформация неограниченного упругого слоя двумя жесткими штампами с плоскими круговыми сечениями различных радиусов (фигура). Задача сначала сведена к системе парных интегральных уравнений, которые затем преобразуются в систему двух регулярных интегральных уравнений Фредгольма. Решение последней системы представлено в виде рядов по степеням параметра a / h. Найдены также связи между перемещениями штампов и приложенными к ним силами.

§ 1. Постановка задачи и сведение ее к системе интегральных уравнений. Будем пользоваться известными выражениями смещений и напряжений через две гармонические функции Папковича — Нейбера

$$2Gu_z = (3-4\nu)\,\Phi - F - z\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.1}$$

$$\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} - z\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\nu)\,\Phi - F - z\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] \tag{1.2}$$

Здесь G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона [1].

Если считать заданными осевые перемещения штампов δ_a и δ_b, а трение — отсутствующим, то задача состоит в нахождении двух гармонических в области $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $-h < z < 0$ функций Φ и F, удовлетворяющих граничным условиям

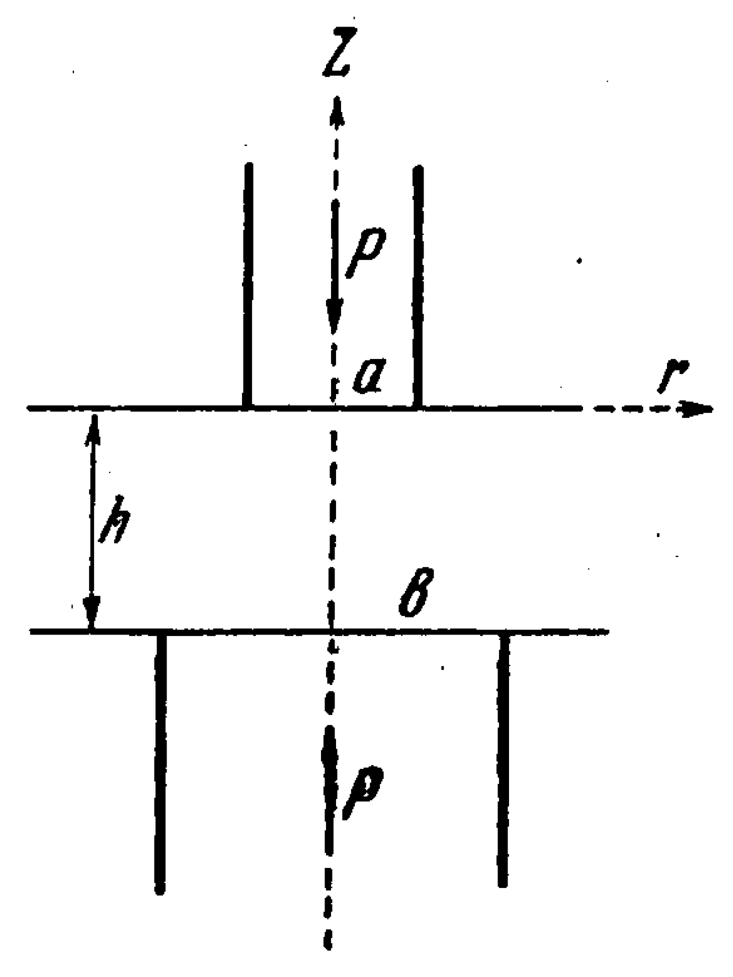
$$u_z = -\delta_a, \quad r < a; \qquad \sigma_z = 0, \quad r > a; \qquad \tau_{rz} = 0, \quad 0 \leqslant r < \infty; \qquad z = 0 \tag{1.3}$$

$$u_z = \delta_b, \quad r < b; \qquad \sigma_z = 0, \quad r > b; \qquad \tau_{rz} = 0, \quad 0 \leqslant r < \infty; \qquad z = -h \tag{1.4}$$

Кроме того, при $r \to \infty$ функции Φ и F должны стремиться к нулю. Будем искать решение задачи в виде интегральных разложений Ханкеля [2]

$$\Phi = \int_0^\infty [A \operatorname{sh} \lambda (z+h) + B \operatorname{ch} \lambda (z+h)]\, J_0(\lambda r)\, \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h} \tag{1.5}$$

$$F = \int_0^\infty \left\{[C \operatorname{sh} \lambda (z+h) + D \operatorname{ch} \lambda (z+h)]\, \frac{J_0(\lambda r)}{\operatorname{sh} \lambda h} + S(\lambda h)\right\} d\lambda$$



Фиг. 1

Условиям отсутствия касательных напряжений на границах слоя можно удовлетворить при помощи связей

$$(1-2\nu)\,(A + B \operatorname{cth} \mu) - C - D \operatorname{cth} \mu = 0$$
$$(1-2\nu)\, B - D + \mu A = 0, \quad \mu = \lambda h \tag{1.6}$$

Исключая при помощи (1.6) величины C и D и вводя вместо A и B новые неизвестные величины $M(\mu)$ и $N(\mu)$, из оставшихся граничных условий получаем следующую систему парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty \left[P(\mu)\, J_0(\lambda r) - \frac{S(\mu)}{2(1-\nu)}\right] d\lambda = -\frac{G\delta_a}{1-\nu} \qquad (0 \leqslant r < a) \tag{1.7}$$

$$\int_0^\infty \left[R(\mu)\, J_0(\lambda r) - \frac{S(\mu)}{2(1-\nu)}\right] d\lambda = \frac{G\delta_b}{1-\nu} \qquad (0 \leqslant r < b) \tag{1.8}$$

$$\int_0^\infty M(\mu)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0, \quad a < r < \infty; \qquad \int_0^\infty N(\mu)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0, \quad b < r < \infty \tag{1.9}$$

---

[1] Формулы для не входящих в граничные условия величин u_r, σ_r, σ_φ см., например, в [1], стр. 230.

[2] По поводу величины $S(\mu)$ см. (1.18). Можно показать, что выбор значения $S(\mu)$ по существу связан с условием $u_z \to 0$ при $r \to \infty$.

В (1.7), (1.8) введены обозначения

$$P=A+B\operatorname{cth}\mu=\frac{M-N}{\mu}T+M\frac{1-Q}{\mu},\quad Q=\frac{1+\mu-e^{-\mu}}{\operatorname{sh}\mu+\mu}$$

$$R=\frac{B}{\operatorname{sh}\mu}=\frac{M-N}{\mu}T-N\frac{1-Q}{\mu},\qquad T=\frac{\operatorname{sh}\mu+\mu\operatorname{ch}\mu}{\operatorname{sh}^2\mu-\mu^2}$$

Подстановка (см., например, [1], глава VIII)

$$M(\mu)=\mu\int_0^a\varphi(t)\cos\lambda t\,dt,\qquad N(\mu)=\mu\int_0^b\psi(t)\cos\lambda t\,dt \tag{1.11}$$

дает возможность удовлетворить уравнениям (1.9) и привести (1.7), (1.8) к виду

$$\int_0^r\frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}=-\frac{G\delta_a}{1-\nu}+\int_0^a\varphi(t)\,dt\int_0^\infty Q(\mu)J_0(\lambda r)\cos\lambda t\,d\lambda- \tag{1.12}$$

$$-\int_0^\infty\left\{\left[\int_0^a\varphi(t)\cos\lambda t\,dt-\int_0^b\psi(t)\cos\lambda t\,dt\right]T(\mu)J_0(\lambda r)-\frac{S(\mu)}{2(1-\nu)}\right\}d\lambda,\qquad 0\leqslant r<a$$

$$\int_0^r\frac{\psi(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}=-\frac{G\delta_b}{1-\nu}+\int_0^b\psi(t)\,dt\int_0^\infty Q(\mu)J_0(\lambda r)\cos\lambda t\,d\lambda+ \tag{1.13}$$

$$+\int_0^\infty\left\{\left[\int_0^a\varphi(t)\cos\lambda t\,dt-\int_0^b\psi(t)\cos\lambda t\,dt\right]T(\mu)J_0(\lambda r)-\frac{S(\mu)}{2(1-\nu)}\right\}d\lambda,\qquad 0\leqslant r<b$$

Для дальнейших преобразований составим условия статики

$$-P=\int_0^a\int_0^{2\pi}\sigma_z|_{z=0}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^b\int_0^{2\pi}\sigma_z|_{z=-h}\,r\,dr\,d\varphi \tag{1.14}$$

С учетом выражений

$$\sigma_z|_{z=0}=\frac{1}{h}\int_0^\infty M(\mu)J_0(\lambda r)\,d\lambda,\qquad \sigma_z|_{z=-h}=\frac{1}{h}\int_0^\infty N(\mu)J_0(\lambda r)\,d\lambda \tag{1.15}$$

а также соотношения [2]

$$\int_0^\infty J_1(\lambda a)\cos\lambda t\,d\lambda=\frac{1}{a},\qquad t<a \tag{1.16}$$

условия (1.14) могут быть приведены к виду

$$\int_0^a\varphi(t)\,dt=\int_0^b\psi(t)\,dt=-\frac{P}{2\pi} \tag{1.17}$$

Если теперь положить

$$S(\mu)=2(1-\nu)T(\mu)\left[\int_0^a\varphi(t)\cos\lambda t\,dt-\int_0^b\psi(t)\cos\lambda t\,dt\right] \tag{1.18}$$

и воспользоваться (1.17), то в (1.12), (1.13) можно осуществить перестановку порядка интегрирования и получить следующую систему уравнений относительно искомых функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = -\frac{G\delta_a}{1-\nu} + \int_0^a \varphi(t)\,dt \int_0^\infty Q(\mu) J_0(\lambda r)\cos\lambda t\,d\lambda + \tag{1.19}$$

$$+\int_0^a \varphi(t)\,dt \int_0^\infty T(\mu)(1-\cos\lambda t)[1-J_0(\lambda r)]\,d\lambda -$$

$$-\int_0^b \psi(t)\,dt \int_0^\infty T(\mu)(1-\cos\lambda t)[1-J_0(\lambda r)]\,d\lambda, \qquad 0 \leqslant r < a$$

$$\int_0^r \frac{\psi(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = -\frac{G\delta_b}{1-\nu} + \int_0^b \psi(t)\,dt \int_0^\infty Q(\mu) J_0(\lambda r)\cos\lambda t\,d\lambda + \tag{1.20}$$

$$+\int_0^b \psi(t)\,dt \int_0^\infty T(\mu)(1-\cos\lambda t)[1-J_0(\lambda r)]\,d\lambda -$$

$$-\int_0^a \varphi(t)\,dt \int_0^\infty T(\mu)(1-\cos\lambda t)[1-J_0(\lambda r)]\,d\lambda, \qquad 0 \leqslant r < b$$

Решая (1.19), (1.20) как интегральные уравнения Шлёмильха с известными правыми частями и пользуясь равенством

$$\frac{d}{dt}\int_0^t [1-J_0(\lambda r)]\frac{r\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} = 1-\cos\lambda t \tag{1.21}$$

приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi(t) = -\frac{2G\delta_a}{\pi(1-\nu)} + \frac{2}{\pi}\int_0^a [L(t,\tau)+K(t,\tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^b K(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t < a \tag{1.22}$$

$$\psi(t) = -\frac{2G\delta_b}{\pi(1-\nu)} + \frac{2}{\pi}\int_0^b [L(t,\tau)+K(t,\tau)]\,\psi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^a K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t < b \tag{1.23}$$

симметричные ядра которой даются формулами

$$L(t,\tau) = \int_0^\infty Q(\mu)\cos\lambda t\cos\lambda\tau\,d\lambda, \quad K(t,\tau) = \int_0^\infty T(\mu)(1-\cos\lambda t)(1-\cos\lambda\tau)\,d\lambda \tag{1.24}$$

§ 2. Определение связей между перемещениями штампов и приложенными силами

Уравнения (1.22), (1.23) целесообразно преобразовать в две системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= 1 + \varepsilon\int_0^1 (R+S)\,\omega_1(y)\,dy\,dy - \varepsilon\int_0^\gamma S\omega_3(y)\,dy \\ \omega_3(x) &= \varepsilon\int_0^\gamma (R+S)\,\omega_3(y)\,dy - \varepsilon\int_0^1 S\omega_1(y)\,dy \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\omega_2(x) = \varepsilon \int_0^1 (R+S)\,\omega_2(y)\,dy - \varepsilon \int_0^\gamma S\omega_4(y)\,dy$$
$$\omega_4(x) = 1 + \varepsilon \int_0^\gamma (R+S)\,\omega_4(y)\,dy - \varepsilon \int_0^1 S\omega_2(y)\,dy \tag{2.2}$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\varepsilon = \frac{a}{h}, \qquad \gamma = \frac{b}{a}, \qquad x = \frac{t}{a}, \qquad y = \frac{\tau}{a} \tag{2.3}$$

$$\omega_1(x) + \frac{\delta_b}{\delta_a}\omega_2(x) = -\frac{\pi(1-\nu)}{2G\delta_a}\varphi(t), \qquad \omega_3(x) + \frac{\delta_b}{\delta_a}\omega_4(x) = -\frac{\pi(1-\nu)}{2G\delta_a}\psi(t) \tag{2.4}$$

$$R = R(x, y, \varepsilon) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(\mu)\cos\mu\varepsilon x\cos\mu\varepsilon y\,d\mu \tag{2.5}$$

$$S = S(x, y, \varepsilon) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty T(\mu)(1-\cos\mu\varepsilon x)(1-\cos\mu\varepsilon y)\,d\mu \tag{2.6}$$

Теперь условия статики (1.17) можно преобразовать к равенствам

$$P = \frac{4Ga}{1-\nu}\left[\delta_a\int_0^1 \omega_1(x)\,dx + \delta_b\int_0^1 \omega_2(x)\,dx\right], \qquad P = \frac{4Ga}{1-\nu}\left[\delta_a\int_0^\gamma \omega_3(x)\,dx + \delta_b\int_0^\gamma \omega_4(x)\,dx\right] \tag{2.7}$$

из которых и получаются искомые выражения для перемещений штампов

$$\delta_a = \frac{(1-\nu)P}{4Ga\Delta}\left[\int_0^\gamma \omega_4(x)\,dx - \int_0^1 \omega_2(x)\,dx\right], \qquad \delta_b = \frac{(1-\nu)P}{4Ga\Delta}\left[\int_0^1 \omega_1(x)\,dx - \int_0^\gamma \omega_3(x)\,dx\right] \tag{2.8}$$

$$\Delta = \int_0^1 \omega_1(x)\,dx\int_0^\gamma \omega_4(x)\,dx - \int_0^1 \omega_2(x)\,dx\int_0^\gamma \omega_3(x)\,dx \tag{2.9}$$

Для получения конкретных результатов при различных значениях геометрических параметров $\varepsilon = a/h$ и $\gamma = b/a$ следует применить какие-либо численные методы для определения функций $\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ из систем (2.1), (2.2).

Для малых значений параметра ε можно вывести простые зависимости путем разложения ядер R, S и искомых функций ω_k в ряды по степеням ε

$$R = \sum_{n=0}^\infty R_{2n}\varepsilon^{2n}, \qquad S = \sum_{n=0}^\infty S_{2n}\varepsilon^{2n}, \qquad \omega_k = \sum_{n=0}^\infty \omega_k^{(n)}\varepsilon^n \tag{2.10}$$

Приводим значения нескольких первых коэффициентов указанных рядов

$$R_0 = \frac{2r_0}{\pi}, \qquad R_2 = -\frac{r_2}{\pi}(x^2+y^2), \qquad R_4 = \frac{r_4}{12\pi}(x^4+6x^2y^2+y^4)$$

$$S_0 - S_2 = 0, \quad S_4 = \frac{\sigma_4}{2\pi}x^2y^2, \quad \omega_1^{(0)} = 1, \quad \omega_1^{(1)} = \frac{2r_0}{\pi}, \quad \omega_1^{(2)} = \left(\frac{2r_0}{\pi}\right)^2$$

$$\omega_1^{(3)} = \left(\frac{2r_0}{\pi}\right)^3 - \frac{r_2}{\pi}\left(x^2+\frac{1}{3}\right), \qquad \omega_1^{(4)} = \left(\frac{2r_0}{\pi^2}\right)^4 - \frac{2}{\pi}(x^2+1)\,r_0r_2$$

$$\omega_1^{(5)} = \left(\frac{2r_0}{\pi}\right)^5 - \frac{4}{\pi^3}\left(x^2+\frac{5}{2}\right)r_0^2r_2 + \frac{r_4}{12\pi}\left(x^4+2x^2+\frac{1}{5}\right) + \frac{\sigma_4}{6\pi}x^2$$

$$\omega_k^{(n)} \equiv 0 \quad (k=2,\,3;\; n=0,\,1,\,2,\,3,\,4), \qquad \omega_2^{(5)} = -\frac{\sigma_4}{6\pi}\gamma^3 x^2, \qquad \omega_3^{(5)} = -\frac{\sigma_4}{6\pi}x^2$$

$$\omega_4^{(0)} = 1, \qquad \omega_4^{(1)} = \frac{2r_0\gamma}{\pi}, \qquad \omega_4^{(2)} = \left(\frac{2r_0\gamma}{\pi}\right)^2$$

$$\omega_4^{(3)} = \left(\frac{2r_0\gamma}{\pi}\right)^3 - \frac{r_2\gamma}{\pi}\left(x^2+\frac{\gamma^2}{3}\right), \qquad \omega_4^{(4)} = \left(\frac{2r_0\gamma}{\pi}\right)^4 - \frac{2\gamma^2}{\pi^2}(x^2+\gamma^2)\,r_0 r_2$$

$$\omega_4^{(5)} = \left(\frac{2r_0\gamma}{\pi}\right)^5 - \frac{4\gamma^3}{\pi^3}\left(x^2+\frac{5}{3}\gamma^2\right)r_0^2 r_2 + \frac{r_4\gamma}{12\pi}\left(x^4+2x^2\gamma^2+\frac{\gamma^4}{5}\right)+\frac{\sigma_4}{6\pi}x^2\gamma^3$$

$$r_m = \int_0^\infty Q(\mu)\,\mu^m\,d\mu, \qquad \sigma_m = \int_0^\infty T(\mu)\,\mu^m\,d\mu \tag{2.11}$$

В рассматриваемом приближении из (2.8), (2.9) получаем формулы[1]

$$\delta_a = \frac{(1-\nu)P}{4Ga}\left[1-\frac{2r_0}{\pi}\varepsilon+\frac{2r_2}{3\pi}\varepsilon-\left(\frac{\sigma_4}{18\pi}+\frac{4r_4}{45\pi}\right)\varepsilon^5+\frac{\sigma_4}{18\pi}\gamma^2\varepsilon^5+O(\varepsilon^7)\right] \tag{2.12}$$

$$\delta_b = \frac{(1-\nu)P}{4Gb}\left[1-\frac{2r_0}{\pi}\gamma\varepsilon+\frac{2r_2}{3\pi}\gamma^3\varepsilon^3-\left(\frac{\sigma_4}{18\pi}+\frac{4r_4}{45\pi}\right)\varepsilon^5\gamma^5+\frac{\sigma_4}{18\pi}\gamma^3\varepsilon^5+O(\varepsilon^7)\right] \tag{2.13}$$

Формула (2.13) получается из (2.12) перестановкой местами величин a и b, как и должно быть. Поэтому в дальнейшем анализируется только формула (2.12).

Предельный переход в (2.12) при $h\to\infty$ $(\varepsilon\to 0)$ дает известную зависимость

$$\delta = \frac{(1-\nu)P}{4Ga}$$

справедливую в случае вдавливания одиночного штампа в полупространство. Следующие три поправочных члена в формуле (2.12), не связанные с параметром $\gamma = b/a$, характеризуют влияние плоскости $z=-h$, свободной от напряжений и нагруженной осевой силой P. Наконец, последнее слагаемое в (2.12) уже учитывает наличие на плоскости $z=-h$ второго штампа конечного радиуса b.

Подсчитывая интегралы (2.11), находим

$$r_0 = 2.335, \qquad r_2 = 12.65, \qquad r_4 = 262.2, \qquad \sigma_4 = 296.8$$

после чего из (2.12) получим

$$\delta_a = \frac{(1-\nu)P}{4Ga}\left[1-1.49\varepsilon+2.68\varepsilon^3-12.67\varepsilon^5+5.25\gamma^2\varepsilon^5+O(\varepsilon^7)\right] \tag{2.14}$$

В частности, для значения $\varepsilon = 1/4$ получим

$$\frac{4Ga\delta_a}{(1-\nu)P} \approx 0.657 + 0{,}00510\,\gamma^2 \tag{2.15}$$

Последнее выражение показывает, что в этих условиях влияние размеров второго штампа начинает ощутимо сказываться только при значительных отношениях $\gamma = b/a$ (порядка 3—4).

Заметим, в заключение, что при $\gamma = 1$ рассматриваемая задача из соображений симметрии может быть трактована как задача о вдавливании штампа радиуса a в упругий слой толщины $1/2\,h$, покоящийся без трения на жестком неподвижном основании. Решение этой задачи было получено в работе [3] методом парных интегральных уравнений, причем формула (2.15) для $\gamma = 1$ дает значение $4Ga\delta_a = 0.662\,(1-\nu)\,P$, совпадающее с соответствующим значением работы [3] (см. табл. 3 при $p = 0.5$).

Поступила 6 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций М., Изд-во иностр. лит., 1949.
3. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, стр. 320.