АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

В. М. Александров, А. В. Белоконь

(Ростов-на-Дону)

Рассмотрен специальный класс интегральных уравнений первого рода с разностным нерегулярным ядром сложной структуры, зависящим от безразмерного параметра λ. Строится асимптотическое решение этого интегрального уравнения при больших значениях λ в виде двойного ряда по степеням λ^{-1} и $\ln\lambda$.

Полученные результаты использованы для изучения осесимметричных задач о взаимодейсвтии жесткого бандажа с поверхностью упругого бесконечного цилиндра, а также о взаимодействии жесткой втулки с поверхностью бесконечной цилиндрической шахты в упругом пространстве.

Наконец, при обычных предположениях теории Герца на основе решения двух первых задач рассмотрена задача о взаимодействии упругого бандажа с упругим бесконечным цилиндром.

§ 1. Исследование структуры решения интегрального уравнения и построение асимптотического решения при больших значениях параметра λ. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\int_{-1}^{1}\left\{-\ln\frac{|x-t|}{\lambda}+a_{20}\frac{|x-t|}{\lambda}+a_{30}+F\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)\right\}\varphi(t)\,dt=\pi f(x)\qquad(|x|\leqslant 1)\tag{1.1}$$

$$F(y)=\ln|y|F_1(y)+|y|F_2(y)+F_3(y)\tag{1.2}$$

Функции $F_i(y)$ будут непрерывны со всеми производными при всех значениях $-2/\lambda\leqslant y=(x-t)/\lambda\leqslant 2/\lambda$ и при $y\to 0$ ведут себя, как $O(y^2)$.

Отсюда следует, что функция $F(y)\in H_1^\alpha(-1,1)$, $0<\alpha<1$, где через $H_n^\alpha(-\beta,\beta)$ обозначено пространство функций, n-я производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α при $|x|\leqslant\beta$.

Будем также далее предполагать, что $f(x)\in H_p^\alpha(-1,1)$, $\alpha>0$, $p\geqslant 1$.

Следуя [1], представим уравнение (1.1) в виде эквивалентного ему интегрального уравнения второго рода

$$\omega(x)=\frac{P}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\int_{-1}^{1}\left\{a_{20}\operatorname{sgn}(t-y)+\right.$$

$$\left.+\lambda F_t'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\right\}\frac{\omega(y)}{\lambda\sqrt{1-y^2}}dy,\qquad \omega(x)=\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\tag{1.3}$$

Величина P определяется либо из условия удовлетворения найденного из (1.3) решения уравнению (1.1), либо, что равносильно первому, по формуле [1]

$$P=\frac{1}{\ln 2\lambda+a_{30}}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\left[a_{20}\frac{|t-x|}{\lambda}+F\left(\frac{t-x}{\lambda}\right)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}\tag{1.4}$$

причем

$$P=\int_{-1}^{1}\frac{\omega(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\tag{1.5}$$

Докажем теперь, что если решение уравнения (1.1) в классе $L(-1, 1)$ существует, то при любом значении $\lambda \in (0, \infty)$ функция $\omega(x) \in C(-1, 1)$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что интегральный оператор, стоящий в правой части (1.3), действует из пространства $C(-1,1)$ в $C(-1,1)$.

В работе [1] показано, что интеграл

$$J(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \in C_m(-1,1), \quad \text{если } \gamma(t) \in H_m^{\alpha}(-1,1), \quad \alpha > 0 \tag{1.6}$$

На основании этого можем заключить, что

$$\frac{P}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int_{-1}^{1} F_i'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right) \frac{\omega(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \in C(-1,1 \tag{1.7}$$

если принять во внимание указанные выше свойства функций $f(x)$ и $F(t)$, а также предположить, что $\omega(t) \in C(-1,1)$. Таким образом, остается показать, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(t-y) \frac{\omega(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \in C(-1,1) \tag{1.8}$$

Если $\omega(y) \in C(-1,1)$. Для этого перепишем внутренний интеграл в (1.8) в виде

$$N(t) = 2\int_{-1}^{t} \frac{\omega(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy - \int_{-1}^{1} \frac{\omega(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \tag{1.9}$$

Очевидно,

$$N'(t) = 2\omega(t)\,(1-t^2)^{-1/2}$$

Это означает, что

$$N(t) \in H_0^{\alpha}(-1,1), \alpha = 1/2$$

Отсюда на основании (1.6) следует справедливость условия (1.8). Таким образом, доказано, что $\omega(x) \in C(-1,1)$.

Перейдем к построению асимптотического при больших λ решения интегрального уравнения (1.1) или, что то же (1.3). Разложим функции $F_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, входящие в соотношение (1.2) в степенные ряды в окрестности $t = 0$ вида

$$F_i(t) = a_{i1}t^2 + a_{i2}t^4 + a_{i3}t^6 + \ldots \tag{1.10}$$

Пусть радиусы сходимости этих рядов равны соответственно ρ_i. Тогда все дальнейшее, основанное на формулах (1.10), будет по крайней мере, иметь смысл при

$$\lambda > 2 \,/\, \operatorname{Inf} \rho_i \tag{1.11}$$

Подставим $F_i(t)$ в форме (1.10) в (1.2) и затем (1.2) в (1.3). Будем искать решение уравнения (1.3) в виде

$$\omega(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{mn}(x)\,\lambda^{-m}\ln^n\lambda \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в уравнение (1.3) и приравнивая члены правой и левой частей при одинаковых степенях λ^{-1} и $\ln\lambda$, получим для $\omega_{mn}(x)$ выражения при всех $n >$

$> [m / 2]$ (здесь $[y]$ — целая часть y) в следующем виде

$$\omega_{00}(x) = \frac{P}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \tag{1.13}$$

$$\omega_{10}(x) = \frac{a_{20}}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int\limits_{-1}^{1} \frac{\omega_{00}(\tau)\operatorname{sgn}(t-\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$$

$$\omega_{20}(x) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int\limits_{-1}^{1} [(t-\tau)(2a_{11}\ln|t-\tau| + 2a_{31} + a_{11})\,\omega_{00}(\tau) +$$

$$+ a_{20}\operatorname{sgn}(t-\tau)\,\omega_{10}(\tau)]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

$$\omega_{21}(x) = -\frac{2a_{11}}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int\limits_{-1}^{1} \frac{(t-\tau)\,\omega_{00}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$$

$$\omega_{30} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int\limits_{-1}^{1} \{[2a_{11}(t-\tau)\ln|t-\tau| + (a_{11}+2a_{31})(t-\tau)]\,\omega_{10}(\tau) +$$

$$+ a_{20}\operatorname{sgn}(t-\tau)\,\omega_{20}(\tau) + 3a_{21}(t-\tau)^2\operatorname{sgn}(t-\tau)\,\omega_{00}(\tau)\}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

$$\omega_{31}(x) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int\limits_{-1}^{1} [-2a_{11}(t-\tau)\,\omega_{10}(\tau) +$$

$$+ a_{20}\operatorname{sgn}(t-\tau)\,\omega_{21}(\tau)]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad \text{и т. д.}$$

Ограничимся далее рассмотрением важного частного случая $f(x) = \delta = \text{const}$. Вычисляя последовательно квадратуры в соотношениях (1.13), будем иметь

$$\omega_{00}(x) = \pi^{-1}P, \qquad \omega_{10}(x) = 4\pi^{-3}a_{20}PS_1(x) \tag{1.14}$$

$$\omega_{20}(x) = \pi^{-1}P\,[(a_{11}(^3/_2 - \ln 2) + a_{31})(1-2x^2) + 32\pi^{-4}a_{20}^2(S_2(x) - D)$$

$$\omega_{21}(x) = -\pi^{-1}Pa_{11}(1-2x^2), \qquad \omega_{31}(x) = -2\pi^{-3}a_{11}a_{20}S_4(x)$$

$$\omega_{30}(x) = P\pi^{-3}\{^8/_9 a_{11}a_{20}S_3(x) + [6a_{21}(1+2x^2) - 128\pi^{-4}a_{20}^3 D]\,S_1(x) +$$

$$+ [9a_{21} + 2(a_{11}(^3/_2 - \ln 2) + a_{31})a_{20}]\,S_4(x) + {}^8/_3 a_{21} + 64\pi^{-4}a_{20}^3\,S_5(x)\}$$

Здесь [1]

$$S_1(x) = (1-2x^2) + 2\sqrt{1-x^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)\arccos x]}{(2k+1)^2} \tag{1.15}$$

$$S_2(x) = (1-x^2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_{2k}(x)}{(4k^2-1)^2}, \qquad D = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k}{(4k^2-1)^3} = 0.1508$$

$$S_3(x) = -(1-2x^2) + 144\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+3)\arccos x]}{(2k+1)^2(2k+3)^2(2k+5)^2}$$

$$S_4(x) = \frac{1}{3} + (1-2x^2) + x(1-x^2)\ln\frac{1-x}{1+x}, \qquad S_5(x) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt\int\limits_{0}^{t}\frac{S_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$U_{2k+2}(x) = -2(1-2x^2)\,U_{2k}(x) + 16k/(4k^2-1) - U_{2k-2}(x)$$

$$U_0(x) \equiv 0, \qquad U_2(x) = 4 + 2x\ln\frac{1-x}{1+x}$$

[1] Ряд, входящий в выражение для $S_1(x)$ затабулирован в работе [2]

Таким образом, для случая $f(x) = \delta$ получено асимптотическое решение вида (1.12) с точностью до членов $O(\lambda^{-4})$.

Ряды, входящие в соотношение (1.15), могут быть затабулированы по x раз и навсегда. Как показали расчеты с погрешностью, не превосходящей 0.7%, функция $S_2(x)$ при всех $x \in [-1,1]$ может быть заменена следующим выражением:

$$S_2^*(x) = \left(0.4356 + 0.1321\, x^2 + 0.2494\, x \ln \frac{1-x}{1+x}\right)(1-x^2) \tag{1.16}$$

Следует отметить, что аппроксимируя таким образом $S_2(x)$, не меняем характера ее структуры, ибо, как нетрудно видеть, функция $S_2(x)$ имеет вид

$$\left[f_1(x) + f_2(x) \ln \frac{1-x}{1+x}\right](1-x^2)$$

Здесь $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные при $x \in [-1,1]$ функции. Используя формулу (1.16), получим для $S_5(x)$ следующее приближенное выражение:

$$S_5^*(x) = 0.3547 - 0.8463\, x^2 10 + 0.3442\, x^4 + x(1-x^2) \ln \frac{1-x}{1+x} \times$$
$$\times (0.1180 + 0.03305\, x^2) - 0.04156\,(1-x^2)^2 \ln^2 \frac{1-x}{1+x} 10 + 0.3026 S_1(x) \tag{1.17}$$

Наконец, используя соотношения (1.4), (1.14) — (1.17), получим для величины P в случае $f(x) = \delta$ формулу

$$\pi\delta P^{-1} = \ln 2\lambda\, [1 - a_{11}\lambda^{-2} + 0.1801\, a_{11}a_{20}\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})] + a_{80} + 0.8106 a_{20}\lambda^{-1} +$$
$$+ (a_{31} + a_{11} - 0.03287\; a_{20}^2)\lambda^{-2} +$$
$$+ (1.442\; a_{21} - 0{,}2702\; a_{11}a_{20} - 0.1807\; a_{31}a_{20} - 0.02450\, a_{20}^3)\, \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4}) \tag{1.18}$$

§ 2. Осесимметричные контактные задачи для бесконечного круглого упругого цилиндра и упругого пространства с бесконечной круглой цилиндрической шахтой. Рассмотрим задачи о взаимодействии жесткого бандажа с поверхностью цилиндра и жесткого вкладыша с поверхностью шахты. Будем предполагать, что в области контакта силы трения отсутствуют, а вне области контакта отсутствует пригрузка.

Методами операционного исчисления указанные задачи могут быть приведены к определению контактных давлений $q(z)$ из интегрального уравнения [3–5]:

$$\int_{-a}^{a} q(\tau) K\left(\frac{\tau - z}{R}\right) d\tau = \pi\Delta\gamma \qquad \left(\begin{array}{l} |z| \leqslant a \\ \Delta = 1/2\, E(1-\nu^2)^{-1} \end{array}\right) \tag{2.1}$$

Здесь a — полуширина бандажа или втулки, R — радиус цилиндра или шахты, γ — величина внедрения бандажа или вкладыша в поверхность цилиндра или шахты. Ядро $K(t)$ имеет вид

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut\, du \qquad \left(t = \frac{\tau - z}{R}\right) \tag{2.2}$$

для задачи (а) взаимодействия бандажа и поверхности цилиндра

$$L(u) = [u^2(\Omega_1^2 - 1) - 2(1-\nu)]^{-1} u \qquad (\Omega_1(u) = I_0(u) \,/\, I_1(u)) \tag{2.3}$$

для задачи (б) взаимодействия вкладыша и поверхности шахты

$$L(u) = [u^2(1 - \Omega_2^2) + 2(1-\nu)]^{-1} u \qquad (\Omega_2(u) = K_0(u) \,/\, K_1(u)) \tag{2.4}$$

Здесь $I_0(u)$, $I_1(u)$ и $K_0(u)$, $K_1(u)$ — функции Вебера и Макдональда.

Легко видеть, что функции $L(u)$, определяемые формулами (2.3) и (2.4) при больших значениях и могут быть представлены следующими асимптотическим разложениями

$$L(u) = 1 + c_1 u^{-1} + c_2 u^{-2} + c_3 u^{-3} + O(u^{-4}) \tag{2.5}$$

Приводим значения постоянных c_i при $\varkappa = 0.3$

для задачи (*а*)

$$c_1 = 0.4000, \quad c_2 = -1.285, \quad c_3 = -1.452$$

для задачи (*б*)

$$c_1 = -0{,}4000 \quad c_2 = -0{,}965 \quad c_3 = 1.986$$

Если теперь воспользоваться интегралами

$$-\ln|t| = \int_0^\infty \frac{\cos ut - e^{-u}}{u}\,du, \qquad \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} t = \int_0^\infty \frac{\sin ut}{u}\,du \tag{2.6}$$

то можно представить ядро $K(t)$ в виде

$$K(t) = -\ln|t| - {}^1/_2\,\pi c_1|t| + {}^1/_2\,c_2t^2\ln|t| - {}^3/_4\,c_2t^2 + {}^1/_{12}\,\pi c_3|t|^3 + \int_0^\infty \Big\{[u^3L(u) - u^3 - c_1u^2 - c_2u - c_3]\cos ut + u^3e^{-u} + c_1u^2 - c_2u\left(\frac{1}{2}u^2t^2e^{-u} - 1\right) - c_3\left(\frac{1}{2}u^2t^2 - 1\right)\Big\}\frac{du}{u^4} \tag{2.7}$$

Отсюда получаем следующее асимптотическое представление для ядра $K(t)$ при малых t (или, что одно и то же, при больших $\lambda = R\,/\,a$):

$$K(t) = -\ln|t| + a_{20}|t| + a_{30} + a_{11}t^2\ln|t| + a_{31}t^2 + a_{21}|t|^3 \tag{2.8}$$

Здесь

$$a_{20} = -\frac{\pi}{2}c_1, \quad a_{11} = \frac{c_2}{2}, \quad a_{21} = \frac{\pi}{12}c_3, \quad a_{30} = \int_0^\infty \frac{L(u) - 1 + e^{-u}}{u}\,du$$

$$a_{31} = -\frac{3}{4}c_2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty [u^2 - u^2L(u) + c_1u + c_2(1 - e^{-u})]\,\frac{du}{u} \tag{2.9}$$

Вычисления дают:

для задачи (*а*) ($\nu = 0.3$):

$$a_{20} = -0.628, \quad a_{11} = -0.642, \quad a_{21} = -0.380, \quad a_{30} = -0.552, \quad a_{31} = 1.501$$

для задачи (*б*)

$$a_{20} = 0.628, \quad a_{11} = -0.482, \quad a_{21} = 0.520, \quad a_{30} = -0.459, \quad a_{31} = -0.336$$

Произведем в уравнении (2.1) замены переменных и введем обозначения:

$$\tau = at, \qquad z = ax, \qquad q(at) = \varphi(t), \qquad \Delta\gamma\,/\,a = \delta \tag{2.10}$$

Тогда с учетом (2.8) уравнение (2.1) примет вид (1.1), (1.2), (1.10).

Отсюда следует, что асимптотическое при больших λ решение рассматриваемых контактных задач дается формулами (1.14) — (1.18). При этом следует еще заметить, что

$$Q = \int_{-a}^{a} q(t)\,dt = aP \tag{2.11}$$

Для проверки полученных в данной работе результатов и выяснения границ их применения, методом, изложенным в [4], были получены приближенные решения рассматриваемых контактных задач при $\nu = 0.3$:

для задачи (*а*)

$$(\lambda = 2) \quad \omega(x) = \delta\,(1.229 - 0.421x^2 + 0.0901\,x^4) \tag{2.12}$$
$$(\lambda = 4) \quad \omega(x) = \delta\,(0.688 - 0.0847\,x^2 + 0.0243\,x^4)$$

для задачи (*б*)

$$(\lambda = 2) \quad \omega(x) = \delta\,(0.931 - 0{,}182\,x^2 - 0.0517\,x^4) \tag{2.13}$$
$$(\lambda = 4) \quad \omega(x) = \delta\,(0.605 - 0{,}0634x^2 - 0.0213\,x^4)$$

Таблица 1

		$\omega(0)\delta^{-1}$		$\omega(0,5)\delta^{-1}$		$\omega(1)\delta^{-1}$		$P(\pi\delta)^{-1}$	
	λ	2	4	2	4	2	4	2	4
а	(1.14)—(1.18)	1.075	0.686	1.075	0.667	0.923	0.627	1.038	0.653
	(2.12)	1.229	0.688	1.129	0.668	0.898	0.628	1.053	0.655
б	(1.14)—(1.18)	0.988	0.603	0.888	0.586	0.666	0.520	0.803	0.565
	(2.13)	0.931	0.605	0.882	0.588	0.697	0.520	0.821	0.565
в	(3.3)	1.026	0.642	0.961	0.624	0.762	0.571	0.894	0.606
	(3.4)	1.062	0.643	0.990	0.625	0.786	0.570	0.922	0.607

В табл. 1 даны для сравнения некоторые результаты расчетов, проведенные по формулам (1.14) — (1.18) и (2.12). (2.13). Судя по приведенным данным, полученно в настоящей работе приближенное решение в форме

$$\omega(x) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{[i/2]} \omega_{ij}(x)\, \lambda^{-i} \ln^j \lambda + O(\lambda^{-4}) \tag{2.14}$$

дает хорошие результаты для рассмотренных контактных задач при всех значениях параметра $\lambda \in [2, \infty]$. Самое большое расхождение, достигающее 5 %, наблюдается при $\lambda = 2$.

3. Осесимметричная задача о взаимодействии упругого бандажа с бесконечным круглым упругим цилиндром. Рассмотрим задачу о взаимодействии упругого бандажа радиуса R^*, с поверхностью упругого цилиндра радиуса $R = R^* + \varepsilon$, $(\varepsilon / R \ll 1)$. Пусть упругие постоянные бандажа и цилиндра соответственно E, ν и E^*, ν^*. Силы трения между поверхностями бандажа и цилиндра будем предполагать отсутствующими, а вне бандажа поверхность цилиндра не нагруженной. Условие контакта между бандажем и цилиндром, очевидно, можно записать в виде

$$u(R, z) - u(R^*, z) = -\varepsilon, \qquad |z| \leqslant a \tag{3.1}$$

где $u(R, Z)$ — радиальные перемещения точек поверхности цилиндра, $u(R^*, z)$ — радиальные перемещения точек поверхности бандажа, a — полуширина бандажа. В области контакта $|z| \leqslant a$ действует неизвестное нам еще контактное давление $q(z)$. Поставим задачу определить это давление.

Таблица 2

x	$S_1(x)$	$S^*_2(x)$	$S_3(x)$	$S_4(x)$	$S^*_5(x)$
0	0.8320	0.4356	—1.628	1.333	0.6065
0.1	0.8178	0.4276	—1.578	1.293	0.5898
0.2	0.7750	0.4039	—1.429	1.175	0.5403
0.3	0.7029	0.3650	—1.192	0.9843	0.4604
0.4	0.6003	0.3127	—0.8818	0.7286	0.3536
0.5	0.4650	0.2487	—0.5087	0.4211	0.2260
0.6	0.2938	0.1765	—0.1098	$0.8110 \cdot 10^{-1}$	$-0.8170 \cdot 10^{-1}$
0.7	$0.8156 \cdot 10^{-1}$	0.1007	+0.2593	+0.2661	$-0.6830 \cdot 10^{-1}$
0.8	—0.1805	$0.2945 \cdot 10^{-1}$	+0.6380	—0.5794	—0.2146
0.9	—0.5117	$-0.2245 \cdot 10^{-1}$	+0.8267	—0.7903	—0.3458
1.0	—1.000	0.000	1.000	—0.6667	—0.4500

Предположим теперь, как это делается в известной теории Герца о контакте двух упругих тел, что радиальные перемещения поверхности бандажа от давления $q(z)$ могут быть с достаточной степенью точности аппроксимированы радиальными перемещениями от того же давления поверхности бесконечной цилиндрической шахты радиуса R в упругом пространстве. Тогда, воспользовавшись формулами (2.1) — (2.4), без труда составим интегральное уравнение для определения контактного давления. Запишем это уравнение в форме (2.1) с ядром вида (2.2), причем

$$L(a)=\frac{\Delta a}{\Delta+\Delta^*}\left[u^2(\Omega_1{}^2-1)-2(1-\nu)\right]^{-1}+\frac{\Delta u}{\Delta+\Delta^*}\left[u^2(1-\Omega_2{}^2)+2(1-\nu^*)\right]^{-1}$$

$$\Delta^*={}^1/_2\,E^*(1-\nu^{*2})^{-1},\qquad \gamma=\Delta^*(\Delta+\Delta^*)^{-1}\varepsilon \tag{3.2}$$

При малых t ядро $K(t)$ рассматриваемой задачи, подобно тому, как это сделано в § 2, может быть представлено в форме (2.8). Если для дальнейшего положить $\nu=\nu^*=0.3$, то коэффициенты асимптотического разложения (2.8) будут иметь вид

$$a_{20}=-0.628\mu^*+0.628\mu,\qquad a_{11}=-0.642\mu^*-0.482\mu$$

$$a_{21}=-0.380\mu^*+0.520\mu,\qquad a_{30}=-0.552\mu^*-0.459\mu$$

$$a_{31}=1.501\mu^*-0.336\mu,\quad \mu^*=\Delta^*(\Delta+\Delta^*)^{-1},\quad \mu=\Delta(\Delta+\Delta^*)^{-1}$$

При известных коэффициентах a_{ij} решение задачи по-прежнему определяется формулами (1.14) — (1.18). Лишь в одном частном, но важном для практики случае эти формулы значительно упрощаются. Именно, положим $\Delta^*=\Delta$, тогда

$$\mu^*=\mu={}^1/_2\ \text{и}\ a_{20}=0,\ a_{11}=-0.562,\ a_{21}=0.070,\ a_{30}=-0.506,\ a_{31}=0.582$$

Учитывая обращение в нуль коэффициента a_{20}, получим в соответствии с формулами (1.14) — (1.18) решение задачи в виде

$$\omega(x)=Q(\pi a)^{-1}\{1+\lambda^{-2}({}^3/_2\,a_{11}+a_{31})(1-2x^2)-a_{11}\lambda^{-2}\ln 2\lambda\,(1-2x^2)+$$
$$+\pi^{-2}\lambda^{-3}[6a_{21}(1+2x^2)S_1(x)+9a_{21}S_4(x)+{}^8/_3\,a_{21}+O(\lambda^{-4}),\qquad Q=aP$$

$$\pi\delta P^{-1}=\ln 2\lambda\,[1-a_{11}\lambda^{-2}+O(\lambda^{-4})]+a_{30}+(a_{31}+a_{11})\lambda^{-2}+1{,}442a_{21}\,\lambda^{-3}+O(\lambda^{-4})$$

$$q(z)=\omega(z/a)\,a\,(a^2-z^2)^{-1/2},\quad \delta=\Delta\varepsilon/2a \tag{3.3}$$

Приближенные решения задачи, полученные методом работы [4] при ранее принятых условиях $E=E^*$, $\nu=\nu^*=0.3$, имеют вид

$$(\lambda=2)\qquad \omega(x)=\delta(1.062-0.294\,x^2+0.0176\,x^4) \tag{3.4}$$

$$(\lambda=4)\qquad \omega(x)=\delta(0.643-0.0712\,x^2-0.00160\,x^4)$$

В табл. 1. даны для сравнения некоторые результаты расчетов, приведенные по формулам (3.3) и (3.4). Из этих данных видно, что формулы (3.3), как и в предыдущих задачах, можно с надежностью применять в инженерных расчетах, если $\lambda\geqslant 2$.

Для удобства практического использования полученных в данной работе результатов в табл. 2 даны значения функций $S_i(x)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$), определяемых соотношениями (1.15).

Авторы благодарны И. И. Воровичу за внимание к работе.

Поступила 10 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. Пыхтеев Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши. ПММ 1959, т. 23, вып. 6.
3. Воронин Т. А. Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.
4. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
5. Александров В. М. О взаимодействии упругого бандажа с бесконечным упругим цилиндром. Научные сообщения за 1962 год (серия точных и естественных наук). Изд-во Ростовск. ун-та. 1963.