К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЭЛАСТОДИНАМИКИ

Н. А. Кильчевский, Е. Ф. Левчук

(Киев)

Целью работы является развитие нового способа решения динамических задач теории упругости посредством введения функций кинетических напряжений [1–3]. Здесь указаны уравнения, которым удовлетворяют функции кинетических напряжений и найдена форма общего решения этих уравнений.

Рассмотрим квадрат линейного элемента некоторого риманового пространства, которое будем называть производящим

$$ds^2 = [1 + \varepsilon\varphi_{kk}(x^j, t)]\, dx^k dx^k - c^2 [1 + \varepsilon\varphi_4 (x^j, t)]\, dt^2 \quad (k, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где ε — произвольный малый параметр, c^2 — константа, подлежащая определению, $\varphi_{kk}(x^j, t) = \varphi_k(x^1, x^2, x^3, t)$ — функции кинетических напряжений. Из (1) видно, что при $\varepsilon = 0$ риманово пространство вырождается в евклидово. Примем, что это евклидово пространство содержит изучаемую непрерывную среду. Функциональные производные от компонент фундаментального метрического тензора производящего риманового пространства определяют при $\varepsilon \to 0$ тензор кинетических напряжений.

Примем, что тензор энергии — импульсов пропорционален функциональной производной от основного геометрического инварианта [4]. Положим

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon^{-1}(R^{\mu\nu} - {}^1/_2\, g^{\mu\nu} R) \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульсов, остальные обозначения известны.

В результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ из соотношений (2) получаем общее решение уравнений движения элемента сплошной среды [2]

$$\sigma_{ii} - \rho v_{ii}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(\varphi_j + \varphi_4)}{\partial x^k \partial x^k} + \frac{\partial^2(\varphi_k + \varphi_4)}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_k + \varphi_j)\right] \tag{3}$$

$$\sigma_{kj} - \rho v_k v_j = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\varphi_i + \varphi_4)}{\partial x^k \partial x^k} \tag{4}$$

$$\rho v^i = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2(\varphi_k + \varphi)}{\partial x^i \partial t} \tag{5}$$

$$\rho = \frac{1}{2c^2}\left[\frac{\partial^2(\varphi_3 + \varphi_2)}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_3)}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x^3 \partial x^3}\right] \tag{6}$$

Здесь σ_{ik} — тензор напряжений, $\mathbf{v}$ — скорость элемента сплошной среды, ρ — ее плотность; Индексы i, k, j образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3. В дальнейшем в выражениях (3) — (6) пренебрегаем нелинейными членами в компонентах трехмерной части тензора кинетических напряжений. Общность представлений 3) — (6) вытекает, в частности, из возможности введения в евклидовом пространстве произвольной системы криволинейных ортогональных координат.

В случае сжимаемой среды ее плотность приближенно представима соотношением

$$\rho = \rho_0 (1 - \operatorname{div} \mathbf{u}), \qquad \rho_0 = \text{const} \tag{7}$$

Равенства (5) в сочетании с соотношением (7) приводят к таким значениям линейной части компонент вектора скорости:

$$v^i = -\frac{1}{2\rho_0 c^2}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^i \partial t} \qquad (i = 1, 2, 3; \quad \Phi_i = \varphi_j + \varphi_k) \tag{8}$$

Основные подстановки (3) — (6) не зависят от уравнений состояния, т. е. они применимы к изучению динамики упругих и пластических твердых тел, а также вязкой жидкости. Рассмотрим теперь, как частный случай, эластодинамику. В этом случае уравнения состояния совпадают с обобщенным законом Гука.

Из закона Гука и соотношений (3), (4), (8), после исключения нелинейных членов и очевидных преобразований найдем следующие уравнения:

$$2\varphi_4 - \varphi_i + \frac{\rho_0 c^2 - 2\mu}{\rho_0 c^2}\Phi_j + \frac{\rho_0 c^2 - 2\mu}{\rho_0 c^2}\Phi_k = \alpha_j(x^1, x^2, x^3, t) \tag{9}$$

$$\nabla^2\Phi_i - \frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\theta_1 + \frac{c^2}{2\mu}\left[4f_{ii} - \frac{\partial^2\alpha_k}{\partial x^k\partial x^k} - \frac{\partial^2\alpha_j}{\partial x^j\partial x^j}\right] \tag{10}$$

$$\left(\theta_1 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^3\partial x^3}\right)$$

Здесь α_j — неопределенные функции интегрирования. Равенства (6) и (7) приводят к соотношению

$$\rho_0(1 - \operatorname{div}\mathbf{u}) = \frac{1}{2c^2}\theta_1 \tag{11}$$

Напомним, что

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1}{3k}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \tag{12}$$

Принимая во внимание (12) и (3), из соотношения (11) получим

$$\nabla^2\varphi_4 - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{3\lambda + 2\mu + \rho_0 c^2}{2\rho_0 c^2}\theta_1 + 3\lambda + 2\mu \qquad (\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) \tag{13}$$

Следовательно, функции $\Phi_k(x^j, t)$ и $\varphi_4(x^j, t)$ должны удовлетворять системе уравнений (9) — (10) и (13). Эти уравнения содержат неопределенную постоянную c^2 и неопределенные функции интегрирования. Для определения c^2 составим уравнения (10) иным способом. Из равенства (8] найдем

$$u^i = -\frac{1}{2\rho_0 c^2}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x^i} + \frac{\partial\gamma_i}{\partial x^i} \tag{14}$$

Здесь $\partial\gamma_i / \partial x^i$ — функции интегрирования. Подставляя (14) в обобщенный закон Гука и приравнивая нормальные напряжения выражениям (3), вновь найдем

$$\nabla^2\Phi_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2} = -\frac{\lambda + 2\mu - \rho_0 c^2}{\rho_0 c^2}\theta_1 + \left[(2\lambda + 4\mu) + \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta_i}{\partial x^i\partial x^i}\right] \tag{15}$$

$$\theta_2 = \frac{\partial^2\beta_1}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\beta_2}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta_3}{\partial x^3\partial x^3} \tag{16}$$

Здесь β_i — произвольные функции интегрирования. Уравнения (10) и (15) должны быть идентичны, как определяющие один и тот же физический процесс. Сравнивая эти уравнения, находим

$$c^2 = \mu / \rho_0 \tag{17}$$

При этом выражения в квадратных скобках в правых частях уравнений (10) и (15) будут равны между собой. Как будет показано ниже, общность полученных уравнений не нарушается, если выбрать частные выражения произвольных функций интегрирования так, чтобы исключить их из уравнений (10) и (15). Тогда найдем

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_i = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\theta_1 \tag{18}$$

При найденном значении c^2 система уравнений (9) сводится к уравнению вида

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 2\varphi_4 - (\lambda + {}^2/_3\,\mu)\,\delta_{km}x^k x^m \tag{19}$$

Легко заметить, что уравнение (13), определяющее φ_4, является следствием уравнений (18) и соотношений (17) и (19). Полагая далее

$$\Phi_i = \Psi_i + \mu/3\,(x^i)^2 + a\,[(x^k)^2 + (x^j)^2] + bt^2 \tag{20}$$

и определяя коэффициенты a и b из условий устранения однородного поля статических напряжений, получим окончательно

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2(\Psi_i + \Psi_k)}{\partial x^k \partial x^k} + \frac{\partial^2(\Psi_j + \Psi_i)}{\partial x^j \partial x^j} - \frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}\right\} \tag{21}$$

$$\sigma_{jk} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\Psi_j + \Psi_k)}{\partial x^j \partial x^k}, \qquad u_i = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial \Psi_i}{\partial x^i} \tag{22}$$

Здесь Ψ_i — новые функции кинетических напряжений. Из соотношений (20) и уравнений (18) следует, что функции кинетических напряжений Ψ_i являются решениями системы трех дифференциальных уравнений

$$\Box_2 \Psi_i = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Delta_1 \qquad \left(\Box_2 = \nabla^2 - \frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^3 \partial x^3}\right) \tag{23}$$

Итак, решение задачи эластодинамики сводится к решению системы уравнений (23) в сочетании с соотношениями (21), (22), из которых вытекают краевые и начальные условия для функций Ψ_i. Общность полученного решения подтверждается тем, что посредством дифференцирования уравнений (23) и подстановок соотношений (22) получаем однородные уравнения Ляме.

Обратно, из уравнений Ляме и соотношений (22) после интегрирования по x^i ($i = 1, 2, 3$) вновь находим уравнения (23). Неопределенные функции интегрирования, появляющиеся при этом, не влияют на поле смещений и напряжений. Элементарное доказательство этого, почти очевидного, факта опускаем.

Система уравнений (23) отличается от уравнений Ляме тем, что правые части этих уравнений одинаковы, что позволяет выразить две искомые функции через третью

$$\Psi_1 = \Psi_3 + F_1, \qquad \Psi_2 = \Psi_3 + F_2 \tag{24}$$

Функции F_1 и F_2 являются решениями уравнений

$$\Box_2 F_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{25}$$

После подстановки выражений (24) в третье уравнение (23) найдем

$$\Box_1 \Psi_3 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2 \partial x^2}\right) \qquad \left(\Box_1 = \nabla^2 - \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tag{26}$$

Отсюда вытекает

$$\Box_2 \Box_1 \Psi_3 = 0 \tag{27}$$

Уравнение (27) совпадает с одним из уравнений, указанных в статье А. И. Лурье [5], нашедшего общее решение линейных уравнений эластодинамики.

Как видно из равенства (25), (27) и выражений (22), решение задачи эластодинамики при заданных на поверхности тела смещениях допускает автономное определение функций Ψ_i. В остальных случаях эти функции связаны краевыми условиями.

В заключение напомним, что подстановки типа (3) — (6) позволяют распространить изложенный метод на другие случаи динамики сплошной среды, а также на случай нелинейных задач. В этом случае вместо напряжений σ_{ik} следует рассматривать кинетические напряжения, не пренебрегая нелинейными членами в (3) — (6).

Поступила 19 IV 1966.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кильчевский Н. А. О функциях напряжений, скоростей и плотности в статических и динамических задачах механики сплошных средин. Докл. АН СССР, 1953, т. 92, № 5.
2. Кильчевский Н. А. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. М., Гостехиздат, 1954.
3. Кильчевский Н. А. Континуальные проблемы аналитической механики. Тр. II Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., М., Изд-во Наука, 1965, т. I.
4. Эддингтон А. С. Теория относительности. М.— Л., Гостехиздат, 1934.
5. Лурье А. И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Тр. Ленингр. индустриальн. ин-та, 1937, № 6. вып. 3.