Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СВЯЗИ С ЗАДАЧАМИ ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

А. Д. Коваленко

(Киев)

Ряд задач об упругом равновесии круглых пластин переменной толщины и оболочек вращения сводится к интегрированию гипергеометрических уравнений (класса Фукса и вырожденных), некоторые частные решения которых являются логарифмическими. В связи с построением решений таких задач, описываемых гипергеометрическими уравнениями второго порядка, в работе [1] введена гипергеометрическая функция второго рода $\Phi(a, b; c; z)$ и выведены для нее основные функциональные соотношения, аналогичные соотношениям для гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$.

Функциональные соотношения для функции $\Phi(a, b; c; z)$ нашли применение в теории круглых пластин переменной толщины, конических оболочек линейно-переменной толщины [2, 3, 4] и др.

Позже эту функцию рассмотрел Нерлунд [5], который одновременно ввел функцию

$$\Psi(a, b; c; z) = \Phi(a, b; c; z) + [\psi(a) + \psi(b) - \psi(c) - -\psi(1)]\, F(a, b; c; z)$$

$$(\psi(a) = d \ln \Gamma(a)/da) \tag{0.1}$$

В работе [5] функции Φ и Ψ обозначены через G и g. Здесь обозначение $\Psi(a, b; c; z)$ применено в соответствии с обозначением $\Psi(a; c; z)$ для логарифмического решения вырожденного гипергеометрического уравнения, принятым в ([6], стр. 248).

Функциональные соотношения для функции $\Psi(a, b; c; z)$, которую будем также называть гипергеометрической функцией второго рода, имеют более простой вид, чем для функции $\Phi(a, b; c; z)$.

В последнее время в связи с задачами о несимметричной деформации круглых пластин переменной толщины и пологих конических оболочек вращения, которые описываются гипергеометрическими уравнениями высшего порядка, в работах [3, 4,7–10] введены обобщенные гипергеометрические функции второго рода и рассмотрены некоторые их свойства.

Для обобщенной гипергеометрической функции второго рода, содержащей член $\ln z$, принято обозначение ${}_p\Phi_q(\alpha_1,\ldots, \alpha_p; \beta_1,\ldots, \beta_q; z)$. По аналогии с функциями (0.1) для этого случая введена функция

$$\begin{gathered}{}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots, \alpha_p; \beta_1,\ldots, \beta_q; z) = {}_p\Phi_q(\alpha_1,\ldots, \alpha_p; \beta_1,\ldots, \beta_q; z) + \\ + [\psi(\alpha_1) + \ldots + \psi(\alpha_p) - \psi(\beta_1) - \ldots - \psi(\beta_q) - \psi(1)]\, {}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p; \beta_1,\ldots \beta_q; z)\end{gathered} \tag{0.2}$$

Для обобщенных гипергеометрических функций второго рода, содержащих члены с $\ln z$ и $(\ln z)^2$, члены с $\ln z$, $(\ln z)^2$ и $(\ln z)^3$ и т. д., приняты соответственно обозначения ${}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_1,\ldots, \alpha_p; \beta_1,\ldots, \beta_q; z)$, ${}_p\Phi_q^{(3)}(\alpha_1,\ldots, \alpha_p; \beta_1,\ldots, \beta_q; z)$ и т. д.

Цель настоящей статьи — обобщение результатов, полученных автором и его сотрудниками, по свойствам гипергеометрических функций второго рода и рассмотрение примеров, иллюстрирующих эффективное их использование в задачах о напряженном состоянии пластин и оболочек.

§ 1. Некоторые основные свойства гипергеометрических функций. Фундаментальная система частных решений гипергеометрического уравнения

$$z(1 - z)\frac{d^2W}{dz^2} + [c - (a + b + 1)z]\frac{dW}{dz} - abW = 0 \tag{1.1}$$

в окрестности $z=0$ при $c=1+m$ $(m=0, 1, \ldots)$ и $a, b \neq 1, 2, \ldots, m$ определяется функциями

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{z^n}{n!} \tag{1.2}$$

$$\Phi(a, b; c; z) = \ln z\, F(a, b; c; z) + \sum_{n=1}^{c-1} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\,[c-n]_n}{[a-n]_n [b-n]_n} z^{-n} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{z^n}{n!} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{1}{a+s-1} + \frac{1}{b+s-1} - \frac{1}{c+s-1} - \frac{1}{s} \right) \tag{1.3}$$

$$([a]_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \ [a]_0 = 1)$$

Целесообразно рассмотреть в качестве логарифмического решения уравнения (1.1) также линейную комбинацию (0.1) частных решений (1.2) и (1.3).

Функции $\Phi(a, b; c; z)$ и $\Psi(a, b; c; z)$ являются однозначными аналитическими функциями z в области $|\arg z| < \pi$ с разрезом вдоль действительной оси от $-\infty$ до 0. Внутри единичного круга $|z| < 1$ они могут быть представлены в виде выражений (1.3) и (0.1), содержащих сходящиеся ряды, а вне круга сходимости определяются путем аналитического продолжения указанных выражений.

Выражение (1.3) для функции $\Phi(a, b; c; z)$ теряет смысл, когда один из параметров a, b равен одному из чисел $1, 2, \ldots, c-1$, а выражение (0.1) для функции $\Psi(a, b; c; z)$ теряет смысл, когда, кроме того, a или b равен нулю или целому отрицательному числу. В этих случаях частные решения уравнения (1.1) — рациональные функции. Исключая их из рассмотрения, будем предполагать, что $a, b \neq c-1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots$.

Для функции $\Phi(a, b; c; z)$ в работе [1] выведены формулы дифференцирования и интегрирования, формула преобразования, зависимости между функциями от аргументов z и $1-z$, а также некоторые рекуррентные соотношения между функциями, у которых параметры a, b, c соответственно отличаются на целые числа, и полная система рекуррентных соотношений между смежными функциями.

Если в указанных формулах и соотношениях перейти по формуле (0.1) к функциям $\Psi(a, b; c; z)$, то большинство из них принимает более простой вид. Ниже приводятся основные функциональные соотношения для $\Psi(a, b; c; z)$, нашедшие эффективное применение при построении решений задач об осесимметричной деформации круглых пластин переменной толщины и оболочек вращения (конических оболочек линейно-переменной толщины и сферических оболочек постоянной толщины):

формула дифференцирования

$$\frac{d}{dz} \Psi(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} \Psi(a+1, b+1; c+1; z) \tag{1.4}$$

формула преобразования при $a+b = 0, \pm 1, \ldots$

$$\Psi(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} \Psi(c-a, c-b; c; z) \tag{1.5}$$

система 15 соотношений между смежными функциями

$$\begin{aligned}
&1.\ [c-2a-(b-a)z]\Psi + a(1-z)\Psi(a+1) - (c-a)\Psi(a-1) = 0 \\
&2.\ (b-a)\Psi + a\Psi(a+1) - b\Psi(b+1) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&14.\ [b-1-(c-a-1)z]\Psi + \\
&\qquad + (c-b)\Psi(b-1) - (c-1)(1-z)\Psi(c-1) = 0 \\
&15.\ c[c-1-(2c-a-b-1)z]\Psi + \\
&\qquad + (c-a)(c-b)z\Psi(c+1) - c(c-1)(1-z)\Psi(c-1) = 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\Psi = \Psi(a, b; c; z), \quad \Psi(a \pm 1) = \Psi(a \pm 1, b; c; z)$$
$$\Psi(b \pm 1) = \Psi(a, b \pm 1; c; z), \ \Psi(c \pm 1) = \Psi(a, b; c \pm 1; z)$$

которая по внешнему виду полностью совпадает с 15 соотношениями Гаусса для смежных функций $F(a, b; c; z)$ ([11], стр. 130);

линейная зависимость между гипергеометрическими функциями от z и $1 - z$ при $a + b = 0$; $\pm 1, \ldots$

$$\Psi(a, b; c; z) = (-1)^c \frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(1-b)\,(c-1)!}{\Gamma(c-a-b+1)} (1-z)^{c-a-b} \times \\ \times F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \tag{1.7}$$

$$(c = 1 + m;\ m = 0, 1, \ldots;\ a, b \neq 1, 2, \ldots;\ |\arg z| < \pi,\ |\arg(1-z)| < \pi)$$

Формулы (1.4) и (1.5) также совпадают с соответствующими формулами для $F(a, b; c; z)$. Заметим, что условие $a + b = 0, \pm 1, \ldots$ для формулы (1.5) и зависимости (1.7) в рассматриваемых задачах выполняется.

Путем повторного применения соотношений (1.6) можно вывести линейные соотношения между $\Psi(a, b; c; z)$ и двумя функциями вида $\Psi(a + l, b + m; c + n; z)$, где l, m, n — целые числа, в которых коэффициенты являются полиномами от z. Эти соотношения по своему внешнему виду также совпадают с соответствующими рекуррентными соотношениями для $F(a, b; c; z)$. Интегральное представление и формула для аналитического продолжения $\Psi(a, b; c; z)$ получаются как частные случаи формул (4.7) и (4.8) для ${}_p\Psi_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; z)$.

§ 2. Логарифмические решения гипергеометрических уравнений высшего порядка. Гипергеометрическое уравнение $(q + 1)$-го порядка имеет вид

$$\left\{z \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz} + \beta_1 - 1\right) \ldots \left(z \frac{d}{dz} + \beta_q - 1\right) - \\ - z\left(z \frac{d}{dz} + \alpha_1\right) \ldots \left(z \frac{d}{dz} + \alpha_p\right)\right\} W = 0 \tag{2.1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и $\beta_1, \ldots, \beta_q$ — произвольные комплексные параметры, а p и q — целые положительные числа ($p \leqslant q + 1$). При $p = q + 1$ уравнение (2.1) является уравнением класса Фукса с тремя регулярными особыми точками $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$. При $p \leqslant q$ уравнение (2.1) есть вырожденное гипергеометрическое уравнение $(q + 1)$-го порядка с одной регулярной особой точкой $z = 0$ и иррегулярной особой точкой $z = \infty$. Если ни один из параметров β_r $(r = 1, 2, \ldots, q)$ и ни одна из разностей $\beta_s - \beta_t$ $(s \neq t;\ s, t = 1, 2, \ldots, q)$ не равны нулю или целому числу, то фундаментальная система частных решений уравнения (2.1) имеет вид [12,13]

$$W_1 = {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\ z) \tag{2.2}$$

$$W_{n+1} = z^{1-\beta_n} {}_pF_q(1 + \alpha_1 - \beta_n, \ldots, 1 + \alpha_p - \beta_n;\ 2 - \beta_n \\ 1 + \beta_1 - \beta_n^*, \ldots, 1 + \beta_q - \beta_n;\ z) \quad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\ z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_1]_n \ldots [\alpha_p]_n}{[\beta_1]_n \ldots [\beta_q]_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2.3}$$

Здесь ${}_pF_q$ — обобщенная гипергеометрическая функция, а звездочка обозначает, что при $s = t$ параметр $1 + \beta_s - \beta_t$ опускается.

Ряд (2.3) сходится для всех конечных значений z, если $p \leqslant q$, и при $|z| < 1$, если $p = q + 1$. При целых положительных значениях нескольких параметров β_s $(s = 1, 2, \ldots, q)$ уравнение (2.1) имеет соответствующее число логарифмических решений, определяемых обобщенными гипергеометрическими функциями второго рода разного вида.

Если, например, $\beta_1 = 1 + m$ ($m = 0, 1 \ldots$), то, применяя метод предельного перехода [2] или метод Фробениуса [14], можно найти следующее второе частное решение:

$$\begin{aligned}
W_2 &= {}_p\Phi_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m, \beta_2, \ldots, \beta_q;\ z) = \\
&= \ln z\, {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m, \beta_2, \ldots, \beta_q;\ z) + \\
&+ \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\,[1+m-n]_n [\beta_2 - n]_n \ldots [\beta_q - n]_n}{[\alpha_1 - n]_n \ldots [\alpha_p - n]_n} z^{-n} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_1]_n \ldots [\alpha_p]_n}{[1+m]_n [\beta_2]_n \ldots [\beta_q]_n} \frac{z^n}{n!} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_1 + s - 1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_p + s - 1} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{m+s} - \frac{1}{\beta_2 + s - 1} - \ldots - \frac{1}{\beta_q + s - 1} - \frac{1}{s} \right) \\
&(\alpha_r \neq 1, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, p)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

При $\beta_1 = 1 + m$ и $\beta_2 = 1 + k$ ($m, k = 0, 1, \ldots;\ m \leqslant k$) третье частное решение определяется по методу Фробениуса в виде [10]

$$\begin{aligned}
W_3 &= {}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m, 1+k, \ldots, \beta_q;\ z) = \\
&= -(\ln z)^2\, {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k, \ldots,\ \beta_q;\ z) + \\
&+ 2 \ln z\, {}_p\Phi_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k, \ldots, \beta_q;\ z) + \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\,[1+m-n]_n [1+k-n]_n \ldots [\beta_q - n]_n}{[\alpha_1 - n]_n \ldots [\alpha_p - n]_n} A_{-n} z^{-n} + \\
&+ 2(-1)^m m! \sum_{n=m+1}^{k} \frac{(n-1)!\,(n-m-1)!\,[1+k-n]_n \ldots [\beta_q - n]_n}{[\alpha_1 - n]_n \ldots [\alpha_p - n]_n} z^{-n} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_1]_n \ldots [\alpha_p]_n}{[1+m]_n [1+k]_n \ldots [\beta_q]_n} (A_n^2 - B_n) \frac{z^n}{n!}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(\alpha_r \neq 1, \ldots, k;\ r = 1, \ldots, p)$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_1 + s - 1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_p + s - 1} - \frac{1}{m+s} - \ldots - \frac{1}{\beta_q + s - 1} - \frac{1}{s} \right) \\
B_n &= \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{1}{(\alpha_1 + s - 1)^2} + \ldots + \frac{1}{(\alpha_p + s - 1)^2} - \frac{1}{(m+s)^2} - \ldots - \frac{1}{(\beta_q + s - 1)^2} - \frac{1}{s^2} \right] \\
A_{-n} &= \sum_{s=1}^{n}{}^{*} \left(\frac{1}{m - n + s} + \ldots + \frac{1}{\beta_q - n + s - 1} - \frac{1}{\alpha_1 - n + s - 1} - \ldots \right. \\
&\left. \ldots - \frac{1}{\alpha_p - n + s - 1} - \frac{1}{s-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь звездочка означает, что при $s = 1$ слагаемое $1/(s-1)$ опускается.

Используя указанный метод, можно получить логарифмические решения уравнения (2.1) в случае, когда три и больше параметров β_s ($s = 1, 2, \ldots, q$) равны целым положительным числам. Решения эти выражаются через обобщенные гипергеометрические функции второго рода, содержащие $\ln z$ в третьей и более высоких степенях. Так, если $\beta_1 = 1 + m$, $\beta_2 = 1 + k$, $\beta_3 = 1 + l$ $(m,\ k,\ l = 0, 1, \ldots;\ m \leqslant k \leqslant l)$, то четвертое решение находится в виде

$$\begin{aligned}
W_4 &= {}_p\Phi_q^{(3)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ 1+l, \ldots,\ \beta_q;\ z) = \\
&= (\ln z)^3\ {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ 1+l, \ldots,\ \beta_q;\ z) - \\
&- 3(\ln z)^2\ {}_p\Phi_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ 1+l, \ldots, \beta_q;\ z) + \\
&+ 3\ln z\ {}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_1, \ldots,\ \alpha_p;\ 1+m, 1+k, 1+l, \ldots, \beta_q;\ z) + \\
&+ 3\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,[1+m-n]_n \ldots [\beta_q-n]_n}{[\alpha_1-n]_n \ldots [\alpha_p-n]_n}(A_{-n}^2 + B_{-n})z^{-n} + \\
&+ 6(-1)^m m! \sum_{n=m+1}^{l}\frac{(n-1)!\,(n-m-1)!\,[1+k-n] \ldots [\beta_q-n]_n}{[\alpha_1-n]_n \ldots [\alpha_p-n]_n}C_{-n}z^{-n} + 6(-1)^{m+k}\times \\
&\times m!\,k! \sum_{n=k+1}^{l}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,(n-m-1)!\,(n-k-1)!\,[1+l-n]_n \ldots [\beta_q-n]_n}{[\alpha_1-n]_n \ldots [\alpha_p-n]_n}z^{-n} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\alpha_1]_n \ldots [\alpha_p]_n}{[1+m]_n\,[1+k]_n\,[1+l]_n \ldots [\beta_q]_n}(A_n^3 - 3A_nB_n + 2C_n)\frac{z^n}{n!} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

$$(\alpha_r \neq 1, 2, \ldots, l;\ r = 1, \ldots, p)$$

где

$$C_n = \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{1}{(\alpha_1+s-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(\alpha_p+s-1)^3} - \frac{1}{(m+s)^3} - \cdots - \frac{1}{(\beta_q+s-1)^3} - \frac{1}{s^3}\right]$$

$$B_{-n} = \sum_{s=1}^{n}{}^{*}\left[\frac{1}{(\alpha_1-n+s-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\alpha_p-n+s-1)^2} - \frac{1}{(m-n+s)^2} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - \frac{1}{(\beta_q-n+s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

$$C_{-n} = \psi(1+m) - \psi(n-m) + \sum_{s=1}^{n}{}^{*}\left(\frac{1}{k-n+s} + \cdots + \frac{1}{\beta_q-n+s-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\alpha_1-n+s-1} - \cdots - \frac{1}{\alpha_p-n+s-1} - \frac{1}{s-1}\right) \qquad (2.8)$$

Обобщенные гипергеометрические функции второго рода (2.4), (2.5), (2.7) симметричны относительно параметров α_r $(r = 1, \ldots, p)$ и нецелочисленных параметров β_s. Целочисленные параметры β_s записываются в порядке неубывающей последовательности; они определяют число членов с отрицательными степенями в рядах (2.4), (2.5), (2.7).

Если при $\beta_1 = 1 + m$, $\beta_2 = 1 + k$, $\beta_3 = 1 + l$ $(m,\ k,\ l = 0,\ 1, \ldots;\ m \leqslant k \leqslant l)$ один или несколько параметров α_r $(r = 1, \ldots, p)$ равны одному из чисел $1, \ldots, l$, то число логарифмических решений уменьшается, при этом некоторые частные решения вырождаются в элементарные функции. Построение решений для различных случаев целочисленных параметров α_r $(r = 1 \ldots, p)$ и β_s $(s = 1, \ldots, q)$ здесь не рассматривается.

§ 3. Логарифмические решения неоднородного гипергеометрического уравнения высшего порядка.

Частное решение неоднородного гипергеометрического уравнения высшего порядка

$$\begin{aligned}
&\left\{z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + \beta_1 - 1\right) \ldots \left(z\frac{d}{dz} + \beta_q - 1\right) - \right. \\
&\qquad \left. - z\left(z\frac{d}{dz} + \alpha_1\right) \ldots \left(z\frac{d}{dz} + \alpha_p\right)\right\} W + Az^{\lambda} = 0
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

где A и λ — постоянные и $p \leqslant q+1$, также можно при помощи указанного метода определить в обобщенных гипергеометрических функциях (первого и второго рода) [7]. При $\lambda,\ \lambda+\beta_s-1 \neq 0,\ -1, \ldots$ частное решение уравнения (3.1) определяется функцией

$$W^{(0)} = -\frac{Az^{\lambda}}{\lambda(\lambda+\beta_1-1)\ldots(\lambda+\beta_q-1)} \times \tag{3.2}$$

$$\times\ {}_{p+1}F_{q+1}(\alpha_1+\lambda, \ldots, \alpha_p+\lambda, 1; \beta_1+\lambda, \ldots, \beta_q+\lambda, 1+\lambda;\ z)$$

При $\lambda = -m\ (m=0, 1, \ldots)$ частным решением уравнения (3.1) является обобщенная гипергеометрическая функция второго рода

$$W^{(0)} = -\frac{A\,[\alpha_1-m]_m \ldots [\alpha_p-m]_m}{[-m]_m\,[\beta_1-m]_m \ldots [\beta_q-m]_m\,(\beta_1-m-1)\ldots(\beta_q-m-1)} \times$$

$$\times_{p+1}\Phi_{q+1}(1+m, \alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\ z) \tag{3.3}$$

$$\alpha_r \neq 1, 2, \ldots, m;\ r=1, 2, \ldots, p;\ \beta_s \neq m+1,\ m, \ldots, 1, 0,\ -1, -2, \ldots;\ s=1, 2, \ldots, q)$$

Решение (3.3) теряет смысл, если один, два и т. д. из параметров $\beta_s\ (s=1, \ldots, q)$ равны целым числам $1, \ldots, m+1$. В этом случае выражение для частного решения уравнения (3.1) содержит обобщенную гипергеометрическую функцию второго рода вида (2.5), (2.7) и т. д., а именно:

при $\lambda = -k,\ \beta_1 = 1+m\ (k,\ m = 0,\ 1 \ldots;\ k \geqslant m)$

$$W^{(0)} = (-1)^{k-m+1} \frac{[\alpha_1-k]_k \ldots [\alpha_p-k]_k A}{2m!\,(k-m)!\,[-k]_k\,[\beta_2-k-1]_{k+1} \ldots [\beta_q-k-1]_{k+1}} \times \tag{3.4}$$

$$\times\ {}_{p+1}\Phi^{(2)}_{q+1}(1+k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ \beta_2, \ldots, \beta_q;\ z)$$

$$(\alpha_r \neq 1, 2, \ldots, k;\ r=1, 2, \ldots, p;\ \beta_s \neq k+1,\ k, \ldots, 1, 0,\ -1,\ -2, \ldots;\ s=2, 3, \ldots, q$$

при $\lambda = -l, \beta_1 = 1+m, \beta_2 = 1+k\ (l, k, m = 0, 1, 2, \ldots;\ l \geqslant k \geqslant m)$

$$W^{(0)} = (-1)^{k+m+1} \frac{[\alpha_1-l]_l \ldots [\alpha_p-l]_l A}{6m!\,k!\,(l-m)!\,(l-k)!\,[-l]_l\,[\beta_3-l-1]_{l+1} \ldots [\beta_q-l-1]_{l+1}} \times$$

$$\times_{p+1}\Phi^{(3)}_{q+1}(1+l,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ 1+l,\ \beta_3, \ldots, \beta_q;\ z) \tag{3.5}$$

$$(\alpha_r \neq 1, 2, \ldots, l;\ r=1, 2, \ldots, p;\ \beta_s \neq l+l, \ldots, 1, 0,\ -1,\ -2, \ldots;\ s=3.4, \ldots, q)$$

и т. д.

Если $\lambda = 1, 2, \ldots$, то, выбирая в качестве частного решения уравнения (3.1) линейную комбинацию решения (3.2) и первого из решений (2.2), можно получить частное решение неоднородного уравнения (3.1) в виде полинома от z.

Если $\lambda = -m\ (m=0,\ 1, \ldots)$ и параметр $\beta_1 = 1+k\ (k=1,\ 2, \ldots;\ k > m)$, то, составляя определенную линейную комбинацию решений (3.3) и (2.4), можно найти частное решение неоднородного уравнения (3.1) в виде полинома от $1\,/\,z$.

Аналогичные решения находятся и в случаях, соответствующих решениям (3.4) и (3.5), если соответственно

$$\lambda = -k, \quad \beta_1 = 1 + m, \quad \beta_2 = 1 + l \qquad (l > k \geqslant m)$$

$$\lambda = -l, \quad \beta_1 = 1 + m, \quad \beta_2 = 1 + k, \quad \beta_3 = l \qquad (l_1 > l \geqslant k \geqslant m)$$

§ 4. Некоторые основные свойства обобщенных гипергеометрических функций. Заметим, что в работах [2,3,4,7] некоторые свойства функции Φ $(a,\ b;\ c;\ z)$ обобщены для функций ${}_p\Phi_q(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\ \beta_q;\ z)$. При введении в функциональные соотношения для ${}_p\Phi_q(\alpha_1,\ldots\ \alpha_p;\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q;\ z)$ функции ${}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\ \beta_q;\ z)$ по формуле (0.2) получаем следующие основные функциональные соотношения:

формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dz}\,{}_p\Psi_q = \frac{\alpha_1\ldots\alpha_p}{(1+m)\,\beta_2\ldots\beta_q}\,{}_p\Psi_q(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_p+1;\ 2+m,\ \beta_2+1,\ldots,\beta_q+1;\ z) \qquad (4.1)$$

рекуррентные соотношения

$$\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_n\right){}_p\Psi_q = \alpha_n\,{}_p\Psi_q(\alpha_n+1) \qquad (4.2)$$

$$\left(z\frac{d}{dz}+\beta_m-1\right){}_p\Psi_q = (\beta_m-1)\,{}_p\Psi_q(\beta_m-1) \qquad (4.3)$$

$$z\frac{d}{dz}\,{}_p\Psi_q = \frac{\alpha_n(\beta_m-1)}{\beta_m-1-\alpha_n}\left[{}_p\Psi_q(\alpha_n+1)-{}_p\Psi_q(\beta_m-1)\right] \qquad (4.4)$$

$$(\alpha_n-\beta_m+1)\,{}_p\Psi_q = \alpha_n\,{}_p\Psi_q(\alpha_n+1)-(\beta_m-1)\,{}_p\Psi_q(\beta_m-1) \qquad (4.5)$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ m=1,2,\ \ldots,\ q$$

Здесь

$$\begin{aligned}
{}_p\Psi_q &= {}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ 1+m,\ \beta_2,\ldots,\beta_q;\ z)\\
{}_p\Psi_q(\alpha_n+1) &= {}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_n+1,\ldots,\alpha_p;\ 1+m,\ \beta_2,\ldots,\beta_q;\ z)\\
{}_p\Psi_q(\beta_m-1) &= {}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ 1+m,\ \beta_2,\ldots,\beta_m-1,\ldots,\beta_q;\ z)
\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Соотношения (4.1) — (4.5) по своему виду совпадают с соответствующими соотношениями для функции ${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\ \beta_q;\ z)$.

Интегральное представление для функции ${}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_p,\ 1+m,\ \beta_2,\ldots,\ \beta_q;\ z)$ в виде интеграла Меллина — Бернса, аналогичное интегральному представлению Бернса для функции ${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\ \beta_q)$ [15], имеет вид [9, 6]

$$(-1)^{m-1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{m!\,\Gamma(\beta_2)\ldots\Gamma(\beta_q)}\,{}_p\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ 1+m,\ \beta_2,\ldots,\beta_q;\ z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+s)\,\Gamma(-m-s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(\beta_2+s)\ldots\Gamma(\beta_q+s)}\,z^s\,ds \qquad (4.7)$$

$$\left(|\arg z| < \min\left(\pi,\ \frac{4-\mu}{2}\pi\right),\quad \mu = q+1-p,\quad |z|<1 \text{ при } p=q+1\right)$$

Здесь путь интегрирования искривлен так, чтобы полюсы подынтегральной функции в точках $s = -\alpha_1 - n,\ldots,\ -\alpha_p - n\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$ лежали слева от пути и в точках $s = -m,\ -(m-1),\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots$ лежали справа от пути. В справедливости формулы (4.7) легко убедиться с помощью вычисления интеграла как суммы вычетов подынтегральной функции в полюсах $\Gamma(-m-s)\,\Gamma(-s)$.

При $p = q+1$ из интегрального представления (4.7) можно по известному методу [16] найти следующую формулу для аналитического продолжения функции

$$_{q+1}\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q+1};\ 1+m,\beta_2,\ldots,\beta_q;\ z)$$

в область $|z|>1$:

$$(-1)^{m-1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_{q+1})}{m!\,\Gamma(\beta_2)\ldots\Gamma(\beta_q)}\,{}_{q+1}\Psi_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q+1};\ 1+m,\beta_2,\ldots,\beta_q;\ z)=$$

$$=\sum_{t=1}^{q+1}\frac{\Gamma(\alpha_t)\Gamma(\alpha_t-m)\Gamma(\alpha_1-\alpha_t)\ldots\Gamma(\alpha_{t-1}-\alpha_t)\Gamma(\alpha_{t+1}-\alpha_t)\ldots\Gamma(\alpha_{q+1}-\alpha_t)}{\Gamma(\beta_2-\alpha_t)\ldots\Gamma(\beta_q-\alpha_t)}\times$$

$$\times z^{-\alpha_t}{}_{q+1}F_q(\alpha_t,\ \alpha_t-m,\ 1+\alpha_t-\beta_2,\ldots,1+\alpha_t-\beta_q,\tag{4.8}$$

$$1+\alpha_t-\alpha_1,\ldots,1+\alpha_t-\alpha_{t-1},\ 1+\alpha_t-\alpha_{t+1},\ldots,1+\alpha_t-\alpha_{q+1};\ z^{-1})$$

где $|\arg z|<\pi$, $|z|>1$.

§ 5. Некоторые основные функциональные соотношения для обобщенных гипергеометрических функций. Непосредственное дифференцирование степенного ряда (2.5) приводит к следующим формулам:

$$\frac{d}{dz}\,{}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ldots,\beta_q;\ z)=\tag{5,1}$$

$$=\frac{\alpha_1\ldots\alpha_p}{(1+m)(1+k)\ldots\beta_q}[{}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_p+1;\ 2+m,2+k,\ldots,\beta_q+1;\ z)+$$

$$+2A_0\,{}_p\Phi_q(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_p+1;\ 2+m,\ 2+k,\ldots,\beta_q+1;\ z)+$$

$$+(A_0^2-B_0)\,{}_pF_q(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_p+1;\ 2+m,\ 2+k,\ldots,\beta_q+1;\ z)]$$

$$A_0=\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_p}-\frac{1}{1+m}-\frac{1}{1+k}-\cdots-\frac{1}{\beta_q}$$

$$B_0=\frac{1}{\alpha_1^2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_p^2}-\frac{1}{(1+m)^2}-\frac{1}{(1+k)^2}-\cdots-\frac{1}{\beta_q^2}$$

$$\frac{d}{dz}\,z^\lambda\,{}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ 1+m,\ 1+k,\ldots,\beta_q;\ z)=$$

$$=\lambda z^{\lambda-1}\Big[{}_{p+1}\Phi_{q+1}^{(2)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\ \lambda+1;\ 1+m,\ 1+k,\ldots,\beta_q,\ \lambda;\ z)+$$

$$+\frac{2}{\lambda}\,{}_{p+1}\Phi_{q+1}(\alpha_1\ldots,\alpha_p,\ \lambda+1;\ 1+m,\ 1+k,\ldots,\beta_q,\ \lambda;\ z)\Big]\tag{5.2}$$

Полагая $\lambda=\alpha_n\,(n+1,\ldots,p)$ или $\lambda=\beta_m-1\ (m=1,\ldots,q)$, из формулы (5.2) находим рекуррентные соотношения

$$\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_n\right){}_p\Phi_q^{(2)}=\alpha_n\,{}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_n+1)+2{}_p\Phi_q(\alpha_n+1)\tag{5.3}$$

$$\left(z\frac{d}{dz}+\beta_m-1\right){}_p\Phi_q^{(2)}=(\beta_m-1)\,{}_p\Phi_q^{(2)}(\beta_m-1)+2{}_p\Phi_q(\beta_m-1)\tag{5.4}$$

$$z\frac{d}{dz}\,{}_p\Phi_q^{(2)}=\frac{\alpha_n(\beta_m-1)}{\beta_m-1-\alpha_n}\Big[{}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_n+1)-{}_p\Phi_q^{(2)}(\beta_m-1)+$$

$$+\frac{2}{\alpha_n}\,{}_p\Phi_q(\alpha_n+1)-\frac{2}{\beta_m-1}\,{}_p\Phi_q(\beta_m-1)\Big]\tag{5.5}$$

$$(\alpha_n-\beta_m+1)\,{}_p\Phi_q^{(2)}=\alpha_n\,{}_p\Phi_q^{(2)}(\alpha_n+1)-(\beta_m-1)\,{}_p\Phi_q^{(2)}(\beta_m-1)+$$

$$+2{}_p\Phi_q(\alpha_n+1)-2{}_p\Phi_q(\beta_m-1)\tag{5.6}$$

где применены обозначения, подобные (4.6). Аналогичные формулы дифференцирования и рекуррентные соотношения выводятся для ${}_p\Phi_q^3(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\beta_q;\ z)$.

§ 6. Применение гипергеометрических функций второго рода в теории пластин и оболочек. Переходя к примерам применения гипергеометрических функций в теории пластин и оболочек, введем следующие обозначения: h — толщина оболочки, r — радиус параллельного круга срединной поверхности оболочки, R — радиус кривизны сферической оболочки, φ — угол между нормалью к срединной поверхности и осью оболочки, α — угол между меридианом и осью конической оболочки, N_r, N_θ — меридиональное и окружное усилия, $\varkappa_r$, $\varkappa_\theta$ — изменения кривизны, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона, l — меридиональная координата для конической оболочки, r, θ — полярные координаты для пластины, w — прогиб пластины, $T - T_0$ — изменение температуры, α_T — коэффициент линейного теплового расширения.

1°. *Осесимметричная деформация сферической оболочки.* Однородное уравнение рассматриваемой задачи относительно разрешающей комплексной функции

$$N = N_r + k_0\varkappa_\theta \quad (k_0 = (\nu \pm i\mu)\,Eh^3 / c_0^2 R, \quad \mu = \sqrt{c_0^2R^2/h^2 - \nu^2}, \quad c_0^2 = 12(1-\nu^2)) \tag{6.1}$$

при введении новой функции W и переменной ξ по формулам

$$N = \cos\varphi W, \quad \xi = \sin^2(\varphi/2) \tag{6.2}$$

преобразуется в уравнение (1.1), в котором

$$z = \xi; \quad a, b = {}^3/_2 \pm \delta, \quad \delta = {}^1/_2\sqrt{5 \mp 4i\mu}; \quad c = 2$$

Используя частные решения (1.2) и (0.1), находим следующее общее решение

$$W = C_1 F({}^3/_2 + \delta, {}^3/_2 - \delta; 2; \xi) + C_2\Psi({}^3/_2 + \delta, {}^3/_2 - \delta; 2; \xi) \tag{6.3}$$

Здесь C_1 и C_2 — комплексные постоянные интегрирования. Применяя дальше известную формулу преобразования для $F(a, b; c; z)$, формулу (1.5) и зависимость (1.7) для $\Psi(a, b;, c; z)$ и переходя к новым постоянным интегрирования, получаем

$$W = C'_1(1-\xi)^{-1} F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; 2; \xi) + C_2'\,\xi^{-1}F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; 2; 1-\xi) \tag{6.4}$$

При вычислении таблиц решений для всех усилий, моментов и перемещений здесь суммируются только четыре бесконечных ряда, определяющих функции

$$\operatorname{Re} F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; c; \xi), \quad \operatorname{Im} F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; c; \xi) \quad (c = 2,3).$$

2°. *Осесимметричная деформация конической оболочки линейно-переменной толщины*

$$h = h_0(1-x) \qquad x = l/l_0 \qquad (h_0, \ l_0 = \text{const}; \ 0 \leqslant x < 1, \ 0 \geqslant x > -1) \tag{6.5}$$

Однородное уравнение этой задачи относительно комплексной функции

$$N = N_r + k_0(1-x)^2\varkappa_\theta$$
$$\left(k_0 = (-1 + \nu \pm i\rho)\frac{Eh_0^3}{c_0^2 l_0 \operatorname{ctg}\alpha}, \quad \rho = \left(c_0^2\frac{l_0^2}{h_0^2}\operatorname{ctg}^2\alpha - (1-\nu)^2\right)^{1/2}\right) \tag{6.6}$$

будет уравнением (1.1), в котором

$$z = x; \quad W = N; \quad a, b = {}^1/_2 \pm \delta, \quad \delta = \sqrt{{}^9/_4 - 2\nu \mp i\rho}; \quad c = 3$$

Общее решение для функции N имеет вид

$$N = C_1 F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; 3; x) + C_2\Psi({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; 3; x) \tag{6.7}$$

Это решение пригодно для утончающейся $(0 \leqslant x < 1)$, а равно и для утолщающейся $(0 \geqslant x >> -1)$ к наружному контуру оболочки.

Для построения решения в случае $-1 \geqslant x > -\infty$ применяются формулы для аналитического продолжения функций $F(a, b; c; x)$ и $\Psi(a, b; c; x)$.

В случае $0 \leqslant x < 1$ целесообразно второе частное решение (при постоянной C_2) при помощи формул (1.7) и (1.5) представить через функции $F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; 3; x)$ и $F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; 3; 1-x)$. Тогда, если разделить решение (6.7) на действительную и мнимую части и вычислить затем при помощи функциональных соотношений для $F(a, b; c; x)$ усилия, моменты и перемещения, то можно найти для них выражения, зависящие от восьми функций [4] $\operatorname{Re} F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; c; x)$, $\operatorname{Im} F({}^1/_2 + \delta, {}^1/_2 - \delta; c; x)$ $(c = 1, 2, 3, 4)$. Суммируются только четыре ряда, определяющие функции при $c = 3, 4$, так как остальные функции вычисляются с помощью рекуррентных формул.

3°. *Циклически симметричный изгиб круглой пластины радиально-переменной цилиндрической жесткости*

$$D = D_0(1 - x), \quad x = (r/r_0)^{\alpha_0} \quad (r_0,\ D_0 = \text{const};\ \alpha_0 = {}^2/m;\ m = 2, 3,\ldots) \tag{6.8}$$

под действием контурной нагрузки и поверхностной нагрузки интенсивности

$$q = q_j r^j \cos k\theta \qquad (q_j = \text{const};\ j = 0, 1, \ldots;\ k = 2, 3, \ldots) \tag{6.9}$$

Эта задача при введении функции W по формуле

$$w = x^{(2+k)/\alpha_0} W \cos k\theta \tag{6.10}$$

сводится к интегрированию дифференциального уравнения (3.1), в котором [3]

$$z = x; \quad p = 4, \quad q = 3; \quad \beta_1 = 1 + m, \quad \beta_2 = 1 + mk$$

$$\beta_3 = 1 + m(1 + k); \quad \lambda = \frac{(j + 2 - k)m}{2} - 1, \quad A = -\frac{16 q_j r_0^{j+4}}{D_0 m^4}$$

Параметры α_n ($n = 1, 2, 3, 4,$) будут корнями уравнения

$$\alpha^4 - A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2 - A_3\alpha + A_4 = 0$$

$$A_1 = 4(k + 1)/\alpha_0 + 2, \quad A_2 = [4k^2 + 6k(\alpha_0 + 2) + \alpha_0^2 + (7 + \nu)\alpha_0 + 4]/\alpha_0^2$$

$$A_3 = [4k^2(\alpha_0 + 2) + 2k(\alpha_0^2 + 7\alpha_0 + \nu\alpha_0 + 4) + \alpha_0^2(3 + \nu) + 2\alpha_0(3 + \nu)]/\alpha_0^3$$

$$A_4 = [k^2(\alpha_0 - \nu\alpha_0 + 6 + 2\nu) + k(3 + \nu)(\alpha_0 + 2) + 2\alpha_0(1 + \nu)]/\alpha_0^3$$

В соответствии с подстановкой (6.10) и результатами § 2 и 3 общее решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} w = x^{1/2(2+k)m}\{&C_1\,{}_4F_3(\alpha_1,\ldots,\alpha_4;\ 1 + m,\ 1 + mk,\ 1 + m + mk;\ x) + \\ &+ C_2\,{}_4\Psi_3(\alpha_1,\ldots,\alpha_4;\ 1 + m,\ 1 + mk,\ 1 + m + mk;\ x) + \\ &+ C_3\,{}_4\Phi_3^{(2)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_4;\ 1 + m,\ 1 + mk,\ 1 + m + mk;\ x) + \\ &+ C_4\,{}_4\Phi_3^{(3)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_4;\ 1 + m,\ 1 + mk,\ 1 + m + mk;\ x) + W^{(q)}\}\cos k\theta \end{aligned} \tag{6.11}$$

Здесь C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) — вещественные постоянные интегрирования.

Частное решение $W^{(q)}$ неоднородного уравнения (3.1) при λ, не равном целому числу, имеет выражение

$$\begin{aligned} W^{(q)} = &-\frac{A x^{1/2(j+2-k)m-1}}{\lambda(\lambda + m)(\lambda + mk)(\lambda + m + mk)} \times \\ &\times {}_5F_4(\alpha_1 - 1 + {}^1/_2(j + 2 - k)m,\ \ldots,\ \alpha_4 - 1 + {}^1/_2(j + 2 - k)m,\ 1 \\ &{}^1/_2(j + 2 - k)m,\ {}^1/_2(j + 2 + k)m,\ {}^1/_2(j + 4 - k)m,\ {}^1/_2(j + 4 + k)m,\ x) \end{aligned} \tag{6.12}$$

В случаях $\lambda = 1, 2,\ldots$ и $\lambda = -\mu$ ($\mu = 0, 1,\ldots;\ m \leqslant \mu < mk$) частные решения $W^{(q)}$ получаются соответственно в полиномах от x и $1/x$. При вычислении изгибающих моментов используются формулы для дифференцирования обобщенных гипергеометрических функций, приведенные в § 4, 5.

4°. *Циклически симметричная термоупругая деформация пологой конической оболочки при чисто тепловых деформациях растяжения и изгиба*

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h}\int_{-1/2 h}^{1/2 h} \alpha_T(T - T_0)\,d\zeta = \varepsilon_j r^j \cos k\theta, \quad \varkappa_T = \frac{12}{h^3}\int_{-1/2 h}^{1/2 h} \alpha_T(T - T_0)\zeta\,d\zeta = \varkappa_j r^j \cos k\theta$$

$$(\varepsilon_j,\ \varkappa_j = \text{const};\ j = 0, 1, \ldots;\ k = 2, 3, \ldots) \tag{6.13}$$

Разрешающее уравнение этой задачи после разделения переменных и некоторых подстановок сводится к уравнению (3.1), в котором [4]

$$z = a_0 r \quad (a_0 = \pm i c_0 \varphi / h, \quad c_0 = \sqrt{12(1 - \nu^2)}); \quad p = 2, \quad q = 3$$

$$\alpha_1 = 1 + k, \quad \alpha_2 = 2 + k, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 1 + 2k, \quad \beta_3 = 2 + 2k, \quad \lambda = j - k$$

$$A = -\frac{iEh}{a_0^j}\left[i\varepsilon_j + \frac{(1 + \nu)h}{c_0}\varkappa_j\right](j + k)(j + k + 1)(j - k)(j - k + 1)$$

Функция W связана с разрешающей комплексной функцией этой задачи

$$N = N_r + N_\theta + k_0(\varkappa_r + \varkappa_\theta) \qquad (k_0 = \pm\, iEh^2 / c_0) \tag{6.14}$$

по формуле

$$N = z^k W \cos k\theta \tag{6.15}$$

Общее решение для функции N имеет вид

$$\begin{gathered} N = [C_1 z^k\, {}_2F_3(1+k,\ 2+k;\ 2,\ 1+2k,\ 2+2k;\ z) + \\ + C_2 z^k {}_2\Psi_3(1+k,\ 2+k;\ \ 2,\ 1+2k,\ 2+2k;\ z) + \\ + C_3 z^{-k}\, {}_2F_3(1-k,\ 2-k;\ 2,\ 1-2k,\ \ 2-2k;\ z) + \\ + C_4 z^{-k}\, {}_2\Phi_3(1-k,\ 2-k,\ 2,\ 1-2k,\ 2-2k;\ z) + N^{(T)}] \cos k\theta \end{gathered} \tag{6.16}$$

Здесь C_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ — комплексные постоянные, а функция $N^{(T)}$ при $j = 0, 1, 2, \ldots, k-2$ имеет выражение

$$\begin{gathered} N^{(T)} = \frac{A\,[j+1]_{k-j}\,[j+2]_{k-j}}{2\,(k-j-1)!\,(k-j)!\ [j+k]_{1+k-j}\,[j+k+1]_{1+k-j}}\, z^k \times \\ \times\, {}_3\Phi_4{}^{(2)}(k-j+1,\ 1+k;\ 2+k;\ 2,\ k-j+1,\ 1+2k,\ 2+2k;\ z) \end{gathered} \tag{6.17}$$

При $j = k-1, k, \ldots$ функция $N^{(T)}$ определяется в виде полиномов [4].

Зная решение для функции N, определяем по известным формулам [4] решения для всех остальных комплексных усилий и моментов; при этом используем формулы дифференцирования для обобщенных гипергеометрических функций § 4, 5.

Отметим, что гипергеометрические функции в третьем и четвертом частных решениях (при постоянных интегрирования C_3 и C_4) превращаются в элементарные функции.

Поступила 22 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Д. О гипергеометрических функциях второго рода в связи с некоторыми задачами теории упругости. Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР, 1950, № 12, стр. 185—199.
2. Коваленко А. Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Киев, Изд-во, АН УССР, 1955.
3. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. М., Физматгиз, 1959.
4. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
5. Nörlund N. E. The logarithmic solutions of the hypergeometric equation. Dan. Yid. Selsk., Mat. Fys. Skr., 1963, Bd. 2, № 5.
6. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., «Наука», 1965.
7. Коваленко А. Д. Про узагальнення розв" язків Ломеля. Доповіді АН УРСР, 1964, № 4, стр. 442—446.
8. Григоренко Я. М. Рекурентні співвідношення для логарифмічних розв" язків в задачі про згин круглих пластин. Прикл. механіка, 1957, т. 3, № 4, стр. 400—408.
9. Вовкодав І. П. Інтегральне зображення узагальненоі гіпергеометричноі функціі другого роду. Доповіді АН УРСР, 1966, № 11, стр. 1379—1382.
10. Вовкодав И. Ф. О логарифмических частных решениях уравнения циклической деформации пологой конической оболочки. Прикл. механика, 1966, т. 2, № 12, стр. 49—53.
11. Gauss C. F. Werke vol. 3, Göttingen, 1876.
12. Pochhammer L. Über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. J. reine angew. Math., 1888, Bd. 102, s. 76—159.
13. Bailey W. N. Generalized hypergeometric series, Cambridge tracts in mathemathics and mathematical physics. Cambridge, 1935, No. 32.
14. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, ДНТВУ, 1939.
15. Barnes E. W. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. Proc., London, Math. Soc., 1907, vol. 2, No. 5.
16. Уиттекер Э. Т., Ватсон Н. Дж. Курс современного анализа, ч. II. М., Физматгиз, 1963.