Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян

(Ереван)

В работе приводятся некоторые формулы разложения произвольной функции в ряд по функциям

$$\chi_k(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & (k=0) \\ \alpha \sin \gamma_k t + \gamma_k \cos \gamma_k t & (k = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{0.1}$$

$$\eta_k(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & (k=0) \\ \alpha \cos \gamma_k t - \gamma_k \sin \gamma_k t & (k = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{0.2}$$

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$
$$\gamma_k = k\pi/t_1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{0.3}$$

Здесь $P_k(x)$ — полиномы Лежандра, α — заданное число.

Функции $\eta_k(t)$ и $\chi_k(t)$ встречаются при решении плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора, задачи кручения конического вала и т. д., когда решения представляются в виде рядов Фурье и точно удовлетворяются граничные условия на линиях $\theta = \mathrm{const}$. В случае плоской задачи для кольцевого сектора $\alpha = 1$, а для задачи кручения конического вала $\alpha = 3/2$.

Исследование функций $y_k(x)$ и $z_k(x)$ вызвано необходимостью решения «парных» уравнений, содержащих функции $\chi_k(t)$ следующего вида:

$$a_0\chi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{\pm 1} a_k \chi_k(t) = f(t) \qquad (0 < t < \beta)$$
$$ca_0\chi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t) = g(t) \qquad (\beta < t < t_1) \tag{0.4}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — заданные функции, c — известное число, а коэффициенты a_k подлежат определению.

1. В работах [1, 2] было доказано, что система функций $\{\chi_k(t)\}$ образует замкнутую и ортогональную систему в интервале $0 < t < t_1$ среди функций, удовлетворяющих условиям Дирихле. Отсюда вытекает, что любую функцию $f(t) \in L_2(0, t_1)$ можно разложить в ряд Фурье по функциям $\chi_k(t)$. При этом в точках непрерывности функции $f(t)$ будем иметь

$$f(t) = a_0\chi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t) \qquad (0 < t < t_1) \tag{1.1}$$

где коэффициенты разложения определяются формулами

$$a_0 = \frac{2\alpha}{e^{2\alpha t_1} - 1} \int_0^{t_1} f(t)\,\chi_0(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{t_1(\gamma_k^2 + \alpha^2)} \int_0^{t_1} f(t)\,\chi_k(t)\,dt \tag{1.2}$$

При получении формул (1.2) было использовано значение интеграла

$$\int_0^{t_1} \chi_k(t)\,\chi_p(t)\,dt = \begin{cases} {}^1/_2 t_1(\gamma_k^2+\alpha^2) & (k=p\neq 0)\\ {}^1/_2\alpha^{-1}(e^{2\alpha t_1}-1) & (k=p=0)\\ 0 & (k\neq p)\end{cases} \tag{1.3}$$

Функции $\eta_k(t)$ почти ортогональны, так как при $k,\ p\neq 0$

$$\int_0^{t_1} \eta_k(t)\,\eta_p(t)\,dt = \begin{cases} -\alpha\,[1-(-1)^{p+k}] & (p\neq k)\\ {}^1/_2 t_1(\gamma_k^2+\alpha^2) & (p=k)\end{cases} \tag{1.4}$$

Несмотря на это обстоятельство, имеет место разложение

$$f(t) = b + b_0 e^{-\alpha(t_1-t)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_k(t) \tag{1.5}$$

Здесь $f(t)\in L_2(0,\ t_1)$ и неизвестные коэффициенты определяются единственным образом по следующим формулам:

$$b = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f(x)\,dx, \qquad b_0 = -\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t_1}\int_0^{t_1} f(x)\,e^{\alpha x}dx$$
$$b_k = \frac{2}{t_1(\gamma_k^2+\alpha^2)}\int_0^{t_1} f(x)\,\eta_k(x)\,dx \tag{1.6}$$

Если подставить значения a_k из (1.2) в (1.1), обозначить $\gamma_k = k\pi/t_1 = x$, $\pi/t_1 = dx$ и формально перейти к пределу при t_1, стремящемся к бесконечности, получим следующую формулу интегрального преобразования:

$$f(t) = -2\alpha e^{\alpha t} q(\alpha)\int_0^{\infty} f(x)\,e^{\alpha x}dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\chi(x,t)}{x^2+\alpha^2}dx\int_0^{\infty} f(y)\,\chi(x,y)\,dy \tag{1.7}$$

Здесь

$$\chi(x,t) = \alpha\sin xt + x\cos xt, \qquad q(\alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha<0)\\ 0 & (\alpha\geqslant 0)\end{cases} \tag{1.8}$$

Аналогичным образом получается и другая формула интегрального преобразования

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\eta(x,t)}{x^2+\alpha^2}\,dx\int_0^{\infty} f(y)\,\eta(x,y)\,dy \quad (\eta(x,t)=\alpha\cos xt - x\sin xt,\ \ \alpha\geqslant 0)$$

2. Рассмотрим теперь функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$. Пользуясь выражениями (0.3) и формулами Мелера и Дирихле — Лапласа для интегральных представлений полиномов Лежандра [3]

$$P_k(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos(k+{}^1/_2)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin(k+{}^1/_2)\varphi\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}} \tag{2.1}$$

легко показать, что

$$y_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos k\varphi\,\cos{}^1/_2\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin k\varphi\,\cos{}^1/_2\varphi\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$
$$z_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\sin k\varphi\,\sin{}^1/_2\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\cos k\varphi\,\sin{}^1/_2\varphi\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}} \tag{2.2}$$

Из (0.3) и рекуррентных дифференциальных уравнений для полиномов Лежандра следует, что функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$y_k(-x) = (-1)^{k+1} z_k(x), \qquad z_k(-x) = (-1)^{k+1} y_k(x)$$
$$\frac{dy_k(x)}{dx} = \frac{k}{1-x} z_k(x), \qquad \frac{dz_k(x)}{dx} = -\frac{k}{1+x} y_k(x) \tag{2.3}$$

Из последних двух соотношений (2.3) следует, что функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ будут решениями уравнений: (2.4)

$$(1+x)\frac{d}{dx}\left[(1-x)\frac{dy_k}{dx}\right] + k^2 y_k = 0, \qquad (1-x)\frac{d}{dx}\left[(1+x)\frac{dz_k}{dx}\right] + k^2 z_k = 0$$

Составляя теперь интегралы Ломмеля для этих функций, из (2.4) получим

$$\int \frac{y_n y_k}{1+x} dx = -\frac{1-x}{n^2-k^2}(y_n' y_k - y_k' y_n) = -\frac{n y_k z_n - k y_n z_k}{n^2-k^2}$$
$$\int \frac{z_n z_k}{1-x} dx = -\frac{1+x}{n^2-k^2}(z_n' z_k - z_k' z_n) = \frac{n y_n z_k - k y_k z_n}{n^2-k^2} \tag{2.5}$$
$$\int \frac{y_n dx}{1+x} = -\frac{z_n}{n}, \qquad \int \frac{z_n dx}{1-x} = \frac{y_n}{n}$$

Воспользуемся значениями

$$y_n(-1) = z_n(1) = 0, \qquad y_n(1) = (-1)^{n+1} z_n(-1) = 2$$

Из (2.5) получим, что функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ ортогональны в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с весом соответственно $(1+x)^{-1}$ и $(1-x)^{-1}$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \frac{y_n y_k}{1+x} dx = \int_{-1}^{1} \frac{z_n z_k}{1-x} dx = \begin{cases} 2/n & (n=k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \tag{2.6}$$

Функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ суть решения уравнений (2.4), поэтому их можно представить также в виде гипергеометрических рядов

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} n(1+x) F(1+n, 1-n, 2, {}^1/_2(1+x))$$
$$z_n(x) = n(1-x) F(1+n, 1-n, 2, {}^1/_2(1-x)) \tag{2.7}$$

Отметим, что гипергеометрическая функция, входящая в (2.7), была использована К. Трантером [4] при решении парных рядов-уравнений по синусам.

Если учесть результаты, полученные Г. Ватсоном [5] для асимптотических разложений гипергеометрической функции при больших значениях параметров α и β, то можно показать, что при $n \to \infty$ и $|x| < 1$ функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ стремятся к нулю, как $O(n^{-1/2})$.

Из (0.3) или же из (2.7) видно, что эти функции являются полиномами n-й степени (ряд (2.7), начиная с n — 1-го члена, обрывается), а из (2.6) и теоремы Вейерштрасса следует, что функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ образуют полную и ортогональную систему в классе $L_2(-1, 1)$, т. е. любую функцию $f(x) \in L_2(-1, 1)$ можно представить в виде рядов

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z_n(x) \tag{2.8}$$

Здесь коэффициенты разложения в силу (2.6) вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,y_n(x)}{1+x}\,dx, \qquad b_n = \frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,z_n(x)}{1-x}\,dx \tag{2.9}$$

Приведем некоторые примеры разложения (2.8), которые понадобятся в дальнейшем

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos\varphi)\cos n\beta = \begin{cases}\sqrt{2}\cos{}^1/_2\beta\,(\cos\beta-\cos\varphi)^{-1/2} & (\beta<\varphi)\\ 0 & (\beta>\varphi)\end{cases}$$

$$1-\sum_{n=1}^{\infty} z_n(\cos\varphi)\cos n\beta = \begin{cases}\sqrt{2}\sin{}^1/_2\beta\,(\cos\varphi-\cos\beta)^{-1/2} & (\beta>\varphi)\\ 0 & (\beta<\varphi)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos\varphi)\sin n\beta = \begin{cases}\sqrt{2}\cos{}^1/_2\beta\,(\cos\varphi-\cos\beta)^{-1/2} & (\beta>\varphi)\\ 0 & (\beta<\varphi)\end{cases} \tag{2.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n(\cos\varphi)\sin n\beta = \begin{cases}\sqrt{2}\sin{}^1/_2\beta\,(\cos\beta-\cos\varphi)^{-1/2} & (\beta<\varphi)\\ 0 & (\beta>\varphi)\end{cases}$$

В справедливости этих разложений при $0<\beta,\ \varphi<\pi$ можно убедиться, если учесть интегральные представления (2.2) и формулы (2.9).

Перейдем к рассмотрению парных рядов-уравнений (0.4). Отметим, что парными рядами различных видов в основном занимались Ж. Кук [6], К. Трантер [4, 6], Б. Нобль [7], Н. Снеддон [8, 9] и Сривастав [8]. Некоторые результаты в этой области получены также в работах [10–12].

3. Легко видеть, что путем линейного преобразования и введения новых неизвестных системе (0.4) можно придать вид

$$\begin{aligned} b_0 e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \chi_k(t) &= f(t) \qquad (0<t<\beta)\\ b b_0 e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_k(t) &= g(t) \qquad (\beta<t<\pi)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь b и α — заданные числа, $f(t)$ — кусочно непрерывная функция, а функция $g(t)$ — непрерывная и имеет кусочно непрерывную первую производную. Функция $\chi_k(t)$ в системе (3.1) имеет уже вид

$$\chi_k(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & (k=0)\\ \alpha\sin kt + k\cos kt & (k=1,2,\ldots)\end{cases} \tag{3.2}$$

Воспользуемся операциями

$$1-\alpha\int_0^t dt, \qquad \frac{d}{dt}-\alpha$$

Первую операцию применим к первому уравнению (3.1), а вторую — ко второму уравнению (3.1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}(k^2+\alpha^2)\,b_k\cos kt &= F_1(t) \qquad (0<t<\beta)\\ \sum_{k=1}^{\infty}(k^2+\alpha^2)\,b_k\sin kt &= G_1(t) \qquad (\beta<t<\pi)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$F_1(t) = F_1^*(t) + C, \qquad G_1(t) = \alpha g(t) - g'(t)$$
$$F_1^*(t) = f(t) - \alpha \int_0^t f(x)\, dx, \qquad C = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_0 \tag{3.4}$$

Умножим первое уравнение (3.3) на $\cos {}^1/_2\, t\, (\cos t - \cos\theta)^{-1/2}$, а затем проинтегрируем по t от нуля до θ. Второе уравнение (3.3) умножим на $\cos {}^1/_2\, t\, (\cos\theta - \cos t)^{-1/2}$ и проинтегрируем по t от θ по π. После ряда формальных выкладок, в силу (2.2), из (3.3) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + \alpha^2)\, b_k y_k(\cos\theta) = F(\theta) \qquad (0 < \theta < \beta)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + \alpha^2)\, b_k y_k(\cos\theta) = G(\theta) \qquad (\beta < \theta < \pi) \tag{3.5}$$

Здесь

$$F(\theta) = 2C + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{F_1^*(t) \cos {}^1/_2\, t\, dt}{(\cos t - \cos\theta)^{1/2}}, \qquad G(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{G_1(t) \cos {}^1/_2\, t\, dt}{(\cos\theta - \cos t)^{1/2}} \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (2.9) находим неизвестные коэффициенты

$$b_k = \frac{k}{2(k^2 + \alpha^2)} \left[\int_0^\beta F(\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_\beta^\pi G(\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \right] \tag{3.7}$$

которые выражены через неизвестную C.

Простой подстановкой легко можно убедиться, что полученное решение (3.7) при любом значении C удовлетворяет уравнениям (3.3) и первому уравнению (3.1). Для того чтобы удовлетворялось и второе уравнение (3.1), нужно подходящим образом выбрать коэффициент b_0. Для определения значения b_0 поступим следующим образом. Умножим второе уравнение (3.1) на $e^{\alpha t}$, проинтегрируем по t от t до π и умножим полученное соотношение на $e^{-\alpha t}$

$$bb_0 e^{\alpha\pi} \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi - t)}{\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt = e^{-\alpha t} \int_t^\pi g(x)\, e^{\alpha x} dx \tag{3.8}$$

Подставляя значения b_k из (3.7) в (3.8), после некоторых преобразований получим

$$bb_0 e^{\alpha\pi} \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi - t)}{\alpha} - \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi - t)}{\sqrt{2} \operatorname{sh} \alpha\pi} D_1 + \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi - t)}{\sqrt{2} \operatorname{sh} \alpha\pi} \int_t^\pi \operatorname{ch} \alpha\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \times$$
$$\times \int_\varphi^\pi \frac{G(\theta) \operatorname{tg} {}^1/_2\, \theta\, d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} - \frac{\operatorname{sh} \alpha t}{\sqrt{2} \operatorname{sh} \alpha\pi} \int_t^\pi \operatorname{ch} \alpha(\pi - \varphi) \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \int_\varphi^\pi \frac{G(\theta) \operatorname{tg} {}^1/_2\, \theta\, d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} =$$
$$= e^{-\alpha t} \int_t^\pi g(x)\, e^{\alpha x}\, dx \qquad (\beta < t < \pi) \tag{3.9}$$

Здесь (3.10)

$$D_1=\int_0^\beta F(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta\int_0^\theta\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\varphi\cos{}^1/_2\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi+\int_\beta^\pi G(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta\int_0^\theta\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\varphi\cos{}^1/_2\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi$$

При получении (3.9) было использовано также значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ky_k(\cos\theta)\sin kt}{k^2+\alpha^2}=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sh}\,\alpha\pi}\int_0^\theta\frac{Q(t,\varphi)\cos{}^1/_2\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi$$

$$Q(t,\varphi)=\begin{cases}\ \ \mathrm{sh}\,\alpha(\pi-t)\,\mathrm{ch}\,\alpha\varphi & (t>\varphi)\\ -\mathrm{sh}\,\alpha t\ \mathrm{ch}\,\alpha(\pi-\varphi) & (t<\varphi)\end{cases}\tag{3.11}$$

Воспользуемся теперь формулой обращения для интегральных уравнений типа Абеля

$$\int_\varphi^a\frac{\mathrm{tg}\,{}^1/_2\theta\,d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\int_\theta^a\frac{f(t)\cos{}^1/_2t\,dt}{(\cos\theta-\cos t)^{1/2}}=\frac{\pi}{2\cos{}^1/_2\varphi}\int_\varphi^a f(t)\,dt$$

$$\int_\beta^\varphi\frac{\mathrm{tg}\,{}^1/_2\theta\,d\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}\int_\beta^\theta\frac{f(t)\cos{}^1/_2t\,dt}{(\cos t-\cos\theta)^{1/2}}=\frac{\pi}{2\cos{}^1/_2\varphi}\int_\beta^\varphi f(t)\,dt\tag{3.12}$$

$$(0\leqslant\beta<\varphi<a\leqslant\pi)$$

В справедливости этих формул можно убедиться, если учесть значение интеграла

$$\int_\varphi^t\frac{\mathrm{tg}\,{}^1/_2\theta\,d\theta}{\sqrt{(\cos\varphi-\cos\theta)(\cos\theta-\cos t)}}=\frac{\pi}{2\cos{}^1/_2\varphi\cos{}^1/_2t}$$

Для определения коэффициента b_0 из (3.10) получим следующее соотношение:

$$bb_0-g(\pi)\,e^{-\alpha\pi}=\frac{\alpha e^{-\alpha\pi}}{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\pi}D_1\tag{3.13}$$

Сумму коэффициентов b_k, входящую в (3.10) и (3.13), будем вычислять по формуле

$$2\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\int_0^\beta F(\theta)\,S(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta+\int_\beta^\pi G(\theta)\,S(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{2(C+b_0)}{\alpha^2}\tag{3.14}$$

где

$$S(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ky_k(\cos\theta)}{k^2+\alpha^2}=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sh}\,\alpha\pi}\int_\theta^\pi\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(\pi-\varphi)\cos{}^1/_2\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}\,d\varphi\tag{3.15}$$

Таким образом для определения постоянных b_0 и C получили уравнения (3.13) и (3.14).

В частном случае, когда имеем парные ряды по косинусам (т. е. когда $\alpha=0$ и $C=-b_0$), полученные соотношения упрощаются.

Вычислим значения рядов, входящих в систему (3.1). Воспользуемся формулами обращения (3.12) и значением ряда

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\chi_k(t)\, y_k(\cos\theta)}{k^2+\alpha^2} = Q_2(\theta) + \frac{\sqrt{2}\cos{}^1\!/_2\, t}{(\cos t - \cos\theta)^{1/2}} \qquad (t<\theta) \tag{3.16}$$

$$\Sigma = Q_2(\theta) \qquad (t>\theta)$$

$$Q_2(\theta) = -\frac{\sqrt{2}\,\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\pi}\int_0^\theta \frac{Q_1(t,\varphi)\cos{}^1\!/_2\,\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi, \qquad Q_1(t,\varphi) = \begin{cases} e^{-\alpha(\pi-t)}\operatorname{ch}\alpha\varphi & (t>\varphi) \\ e^{\alpha t}\operatorname{ch}\alpha(\pi-\varphi) & (t<\varphi)\end{cases} \tag{3.17}$$

Для второй суммы системы (3.1) при $0 \leqslant t < \beta$ получим

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\chi_k(t) = \cos\frac{t}{2}\left[\int_t^\beta \frac{F(\theta)\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,\theta d\theta}{(\cos t-\cos\theta)^{1/2}} + \int_\beta^\pi \frac{G(\theta)\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,\theta d\theta}{(\cos t-\cos\theta)^{1/2}}\right] -$$

$$-\sqrt{2}\, e^{\alpha t}\left[bb_0 - g(\pi)e^{-\alpha\pi}\right] - \alpha e^{\alpha t}\left[\int_t^\beta F(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\int_t^\theta \frac{e^{-\alpha\varphi}\cos{}^1\!/_2\,\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \int_\beta^\pi G(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\int_t^\theta \frac{e^{-\alpha\varphi}\cos{}^1\!/_2\,\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\right] \qquad (0\leqslant t\leqslant\beta) \tag{3.18}$$

Вычислим теперь значение ряда, входящего в первое уравнение (3.1). В конкретных случаях, когда заданы функции $f(t)$ и $g(t)$, значение этого ряда можно получить прямой подстановкой (3.7) в (3.1), используя при этом формулы (2.10) и (3.16). В общем случае значение указанного ряда можно получить следующим образом: введем обозначение

$$h(t) = b_0 e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \chi_k(t) \qquad (\beta<t<\pi) \tag{3.19}$$

Тогда из первого уравнения системы (3.1) и из (3.19) в силу формул (1.1) и (1.2) будем иметь

$$b_0 = \frac{2\alpha}{e^{2\alpha\pi}-1}\left[\int_0^\beta f(x)\,e^{\alpha x}\,dx + \int_\beta^\pi h(x)\,e^{\alpha x}\,dx\right]$$

$$b_k = \frac{2}{\pi k(k^2+\alpha^2)}\left[\int_0^\beta f(x)\,\chi_k(x)\,dx + \int_\beta^\pi h(x)\,\chi_k(x)\,dx\right] \tag{3.20}$$

Подставляя значения коэффициентов b_k из (3.20) во второе уравнение (3.5), после изменения порядка суммирования и интегрирования получим

$$\int_0^\beta f(x)\,S(\theta,x)\,dx + \int_\beta^\pi h(x)\,S(\theta,x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,G(\theta) \qquad (\beta<\theta<\pi) \tag{3.21}$$

Здесь

$$S(\theta,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k(\cos\theta)\,\chi_k(x)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos\theta)\cos kx + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k(\cos\theta)\sin kx}{k} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos{}^1\!/_2\,x}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}} - 1 + \alpha\left(2\arcsin\frac{\sin{}^1\!/_2\,x}{\sin{}^1\!/_2\,\theta} - x\right) \qquad (x<\theta) \tag{3.22}$$

$$S(\theta,x) = -1+\alpha(\pi-x) \qquad (x>\theta)$$

Учитывая (3.22), уравнение (3.21) представим в виде

$$\sqrt{2}\int\limits_{\beta}^{\theta}\left(h(x)-\alpha\int\limits_{\beta}^{x}h(y)\,dy\right)\frac{\cos{}^1/_2\,x\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}=\frac{\pi}{2}G(\theta)+C_1-$$

$$-\int\limits_{0}^{\beta}\left(f(x)+\alpha\int\limits_{x}^{\beta}f(y)\,dy\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cos{}^1/_2\,x}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}-1\right)dx \qquad (\beta<\theta<\pi) \quad (3.23)$$

Здесь

$$C_1=\int\limits_{\beta}^{\pi}\left(h(x)-\alpha\int\limits_{\beta}^{x}h(y)\,dy\right)dx \qquad (3.24)$$

Пользуясь формулами (3.12), уравнение (3.23) приведем к виду

$$\int\limits_{\beta}^{\varphi}\left(h(x)-\alpha\int\limits_{\beta}^{x}h(y)\,dy\right)dx=G_2(\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{C_1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\beta-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{1/2} \qquad (3.25)$$

Здесь

$$G_2(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{\beta}^{\varphi}\left\{\frac{\pi}{2}G(\theta)-\int\limits_{0}^{\beta}\left(f(x)+\alpha\int\limits_{x}^{\beta}f(y)\,dy\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\sqrt{2}\cos{}^1/_2\,x}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}-1\right)dx\right\}\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\theta\,d\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}} \qquad (3.26)$$

Значение C_1 будем определять из второго уравнения (3.1).

Дифференцируя равенство (3.24) по φ, для определения неизвестной функции $h(x)$ получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$h(x)-\alpha\int\limits_{\beta}^{x}h(y)\,dy=G_3(x) \qquad (3.27)$$

где $G_3(x)$ — известная функция

$$G_3(x)=\frac{d}{dx}\left[G_2(x)\cos\frac{x}{2}\right]+\frac{2C_1\sin{}^1/_2\,x}{\pi\sqrt{2}(\cos\beta-\cos x)^{1/2}} \qquad (3.28)$$

Из интегрального уравнения (3.27) для функции $h(x)$ получим следующее окончательное выражение:

$$h(x)=G_3(x)+\alpha\int\limits_{\beta}^{x}G_3(y)\,e^{\alpha(x-y)}\,dy \qquad (3.29)$$

Подставляя $h(x)$ из (3.29) в (3.20), получим значения неизвестных коэффициентов b_k.

Из (3.29) видно, что функция $h(x)$ в точке $x=\beta$ имеет ту же особенность, что и функция $G_3(x)$.

Эту особенность легко можно выделить из (3.28) и (3.26), для этого в последней формуле нужно интегрировать по частям.

4. В приложениях часто встречаются парные уравнения следующего типа

$$b_0e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} kb_k\chi_k(t) = f(t) \qquad (0 < t < \beta)$$

$$bb_0e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) b_k\chi_k(t) = g(t) \qquad (\beta < t < \pi) \tag{4.1}$$

где α, b и N_k — заданные числа, $f(t)$ — кусочно непрерывная, а $g(t)$ — кусочно гладкая функция. Предполагается, что числа N_k ограничены сверху и при возрастании индекса стремятся к нулю, хотя бы как $O(k^{-1})$.

Перепишем второе уравнение (4.1) в виде

$$bb_0e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} N_kb_k\chi_k(t) \qquad (\beta < t < \pi) \tag{4.2}$$

и, считая, что правая часть уравнения (4.2) известна, применим формулу (3.7) к системе (4.1). После несложных преобразований получим

$$\frac{2(k^2+\alpha^2)}{k} b_k = \sum_{p=1}^{\infty} (p^2+\alpha^2) N_pb_pI_{kp}(\beta) + \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

Здесь

$$I_{kp}(\beta) = \int_\beta^\pi y_k(\cos\theta)\, y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{kz_k(\cos\beta)\, y_p(\cos\beta) - pz_p(\cos\beta)\, y_k(\cos\beta)}{p^2-k^2}$$

$$nI_{nn}(\beta) = 1 + P_{n-1}P_n - \frac{1}{2}\left(P_{n-1}^2 - P_n^2\right) + 2\sin^2\beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k(\cos\beta)\, P_k'(\cos\beta)}{k+1}$$

$$\beta_k = 2C\,\frac{z_k(\cos\beta)}{k} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\int_0^\beta F_2(\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_\beta^\pi G_2(\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta\right]$$

$$F_2(\theta) = \int_0^\theta \left[f(y) - \alpha\int_0^y f(x)\, dx\right] \frac{\cos y/2dy}{(\cos y - \cos\theta)^{1/2}}, \qquad C = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_0 \tag{4.4}$$

$$G_2(\theta) = \int_0^\pi [\alpha g(y) - g'(y)] \frac{\cos y/2dy}{(\cos\theta - \cos y)^{1/2}}$$

Для определения коэффициента b_0 следует найденные из (4.3) значения b_k подставить в (4.2). Поступая аналогичным образом, как при получении формулы (3.13) и пользуясь при этом значением ряда (3.16) и интеграла

$$\int_\varphi^\pi \frac{y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}{}^1\!/_2\theta d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos{}^1\!/_2\varphi}\,\frac{\cos k\varphi - (-1)^k}{k} \tag{4.5}$$

которое получается из первой формулы (2.2), если рассматривать ее как интегральное уравнение типа (3.12), из (4.2) и (4.3) получим

$$bb_0e^{\alpha\pi} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\alpha\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (p^2+\alpha^2)\, b_pN_p \int_0^\beta y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \int_0^\theta \frac{\operatorname{ch}\alpha\varphi \cos{}^1\!/_2\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}C}{\operatorname{sh}\alpha\pi} \int_0^\beta \frac{\operatorname{sh}\alpha\varphi \sin{}^1\!/_2\varphi}{(\cos\varphi - \cos\beta)^{1/2}}\, d\varphi - \frac{2\alpha D_2}{\pi\operatorname{sh}\alpha\pi} - g(\pi) = 0 \tag{4.6}$$

где D_2 определяется формулой, подобной (3.10), в которую вместо функций $F(\theta)$ и $G(\theta)$ должны войти функции $F_2(\theta)$ и $G_2(\theta)$ из (4.4).

В уравнениях (4.3) и (4.6) вводим новые неизвестные и следующие обозначения:

$$X_0 = bb_0 e^{\alpha\pi}, \qquad X_k = \frac{2(k^2+\alpha^2)}{k} b_k, \qquad \alpha_{kp} = \frac{pN_p}{2} I_{kp}(\beta)$$

$$a_{0p} = -\frac{\alpha p N_p}{2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\pi} \int_0^\beta y_p(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta \int_0^\theta \frac{\mathrm{ch}\,\alpha\varphi \cos{}^1\!/_2\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}}\,d\varphi \tag{4.7}$$

$$\beta_0 = g(\pi) + \frac{2\alpha D_2}{\pi\,\mathrm{sh}\,\alpha\pi} - \frac{\sqrt{2}C}{\mathrm{sh}\,\alpha\pi} \int_0^\beta \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\varphi \sin{}^1\!/_2\varphi}{(\cos\varphi - \cos\beta)^{1/2}}\,d\varphi$$

При этом система уравнений (4.3) примет вид

$$X_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} X_p + \beta_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4.8}$$

Пользуясь тем, что числа N_k, входящие в (4.1) и (4.8), ограничены сверху и при $k \to \infty$ стремятся к нулю как $O(k^{-1})$, докажем, что бесконечная система (4.8) квази вполне регулярна.

Учитывая неравенства

$$|N_k| \leqslant \frac{m}{k}, \qquad |y_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}, \qquad |z_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}} \qquad \text{при } |x| < 1 - \varepsilon \tag{4.9}$$

для суммы модулей коэффициентов при неизвестных получим следующую оценку:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} p\,|N_p I_{kp}(\beta)| < \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \sum_{\substack{p=k\\ p\neq k}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}\,|p-k|} =$$

$$= \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}}\left[\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k-1} \frac{\sqrt{k-p}+\sqrt{p}}{p(k-p)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\sqrt{p+k}}\right] \leqslant \frac{m}{k} +$$

$$+ \frac{2m}{\sqrt{k}}\left[\frac{\sqrt{k-1}+1}{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^4(\sqrt{k}-1)}{\sqrt{k}+1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right] \leqslant \frac{5+4\ln 4k}{k} m$$

Полученная оценка при возрастании k стремится к нулю. Это значит, что, начиная с некоторого номера k_0, будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < 1 - \varepsilon \qquad (k \geqslant k_0) \tag{4.10}$$

т. е. бесконечная система (4.8) квази вполне регулярна. Значение номера k_0 зависит от чисел N_k и в каждом определенном случае легко может быть определено.

При сделанных допущениях относительно функций $f(t)$ и $g(t)$ можно показать (учитывая (4.9)), что свободные члены системы (4.8) ограничены сверху и при возрастании индекса они стремятся к нулю, как $\beta_k = 0\,(k^{-3/2})$.

Неизвестные коэффициенты X_k (или b_k), входящие в последнее соотношение (4.4), которое в силу (4.7) принимает вид

$$C = \frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kX_k}{k^2+\alpha^2} - \frac{X_0 e^{-\alpha\pi}}{b} \tag{4.11}$$

определяются из квази вполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений (4.8) и выражаются через постоянную C, потому что свободные члены этой системы β_k зависят от C. Подставив определенные из (4.8) значения неизвестных X_k в (4.11) и разрешив полученное соотношение относительно C, получим его значение.

После нахождения X_k можно определить значения рядов, входящих в уравнения (4.1). Так как числа X_k при $k \to \infty$ стремятся к нулю, как $X_k = 0\,(k^{-3/2})$, то сумма второго ряда системы (4.1) будет ограниченной и непрерывной функцией (ряд сходится абсолютно) и ее можно вычислить численно. Первый ряд системы (4.1) абсолютно не сходится. Сумма этого ряда в общем случае — разрывная функция, а в точке $t = \beta + 0$ она обращается в бесконечность.

Для того чтобы выделить особенность (главную часть) этого ряда, подставим в него значения X_k из бесконечной системы (4.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\chi_k(t) = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty} pN_pX_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 I_{kp}(\beta)\chi_k(t)}{k^2+\alpha^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\beta_k\chi_k(t)}{k^2+\alpha^2} \tag{4.12}$$

Воспользуемся представлениями

$$I_{kp}(\beta) = -\frac{z_k(\cos\beta)\,y_p(\cos\beta)}{k} + \frac{p}{k}\int_{\beta}^{\pi} z_k(\cos\theta)\,z_p(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{4.13}$$

$$\beta_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi k}\left[F_2(\beta) - G_2(\beta) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}C\right] z_k(\cos\theta) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi k}\left[\int_0^{\beta} F_2'(\theta)\,z_k(\cos\theta)\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{\beta}^{\pi} G_2'(\theta)\,z_k(\cos\theta)\,d\theta\right] \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и значением ряда

$$\Sigma_2 = Q_3(\theta) \qquad (t < \theta)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz_k(\cos\theta)\,\chi_k(t)}{k^2+\alpha^2} = -\frac{\sqrt{2}\sin{}^1\!/_2 t}{(\cos\theta - \cos t)^{1/2}} + Q_3(\theta) \qquad (t > \theta)$$

$$Q_3 = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{Q_1(t,\ \varphi)\sin{}^1\!/_2 t}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}\,d\varphi \tag{4.14}$$

Здесь $Q_1(t,\ \varphi)$ определяется формулой (3.17); из (4.12) при $\beta < t < \pi$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\chi_k(t) = \frac{M\sin{}^1\!/_2 t}{(\cos\beta - \cos t)^{1/2}} + \varphi(t) \qquad (\beta < t < \pi) \tag{4.15}$$

Здесь $\varphi(t)$ — ограниченная и непрерывная функция, которая в каждом конкретном случае легко может быть определена, а M имеет следующее значение:

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} kN_kX_ky_k(\cos\beta) - \sqrt{2}\,C - \frac{2}{\pi}F_2(\beta) + \frac{2}{\pi}G_2(\beta) \tag{4.16}$$

В заключение отметим, что парные ряды-уравнения по функциям $\eta_k(t)$, $y_k(x)$ и $z_k(x)$, а также парные интегральные уравнения по функциям $\chi(x,\ t)$ и $\eta(x,\ t)$ могут быть решены аналогичным образом.

Например, для решения парных уравнений по функциям $y_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_ky_k(\cos\theta) = f(\theta) \quad (0 < \theta < \beta), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_ky_k(\cos\theta) = g(\theta) \quad (\beta < \theta < \pi) \tag{4.17}$$

Здесь функции $f(\theta)$ и $g(\theta)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и в системе (4.1), умножим первое уравнение системы (4.17) на $\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,\theta\,(\cos\theta - \cos\varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем по θ от нуля до φ. Второе уравнение (4.17) умножим на $\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,\theta\,(\cos\varphi - \cos\theta)^{-1/2}$ и проинтегрируем по θ от φ до π. Пользуясь значениями интегралов

$$\int_0^{\varphi}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}{}^1\!/_2\theta\,d\theta}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} = \sqrt{2}\,\frac{\sin k\varphi}{k\cos{}^1\!/_2\varphi}, \qquad \int_{\varphi}^{\pi}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}{}^1\!/_2\theta\,d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} = \sqrt{2}\,\frac{\cos k\varphi - (-1)^k}{k\cos{}^1\!/_2\varphi} \tag{4.18}$$

которые получаются из (2.2), если рассматривать их как интегральные уравнения типа (3.12), из (4.17) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\varphi = f_1(\varphi) \quad (0<\varphi<\beta), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\varphi = g_1(\varphi) \quad (\beta<\varphi<\pi) \tag{4.19}$$

$$f_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{\varphi}{2} \int_0^{\varphi} \frac{f(\theta)\operatorname{tg}{}^1/_2\theta\, d\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$g_1(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\varphi}\left[\cos\frac{\varphi}{2}\int_{\varphi}^{\pi} \frac{g(\theta)\operatorname{tg}{}^1/_2\theta\, d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\right] \tag{4.20}$$

Из (4.19) для неизвестных коэффициентов a_k получим следующие значения

$$\frac{\pi}{2} a_k = \int_0^{\beta} f_1(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi + \int_{\beta}^{\pi} g_1(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi \tag{4.21}$$

При этом

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(\cos\theta) = \int_{\theta}^{\beta} \frac{f_1(\varphi)\cos{}^1/_2\varphi\, d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}} + \int_{\beta}^{\pi} \frac{g_1(\varphi)\cos{}^1/_2\varphi\, d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} k a_k y_k(\cos\theta) = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\frac{d}{d\theta}\left[\int_0^{\beta} \frac{f_1(\varphi)\sin{}^1/_2\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}} + \int_{\beta}^{\theta} \frac{g_1(\varphi)\sin{}^1/_2\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

$$(\beta<\theta\leqslant\pi)$$

Здесь были использованы формулы (2.8) — (2.10) и (4.21).

Поступила 19 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Изв. АН Арм ССР, Сер. физ-матем. н., 1962, т. 15, № 1, стр. 87—101.
2. Абрамян Б. Л., Баблоян А. А. Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 371—480.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2, перераб., М.— Л., Физматгиз, 1963.
4. Tranter C. J. Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1959, vol. 4, No. 2, pp. 49—57.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
6. Cooke J. C., Tranter C. J. Dual Fourier — Bessel series. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 3, pp. 379—386.
7. Noble B. Some dual series equations involvig Jacobi polynomials. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1963, vol. 59, No. 2, pp. 351—362.
8. Sneddon I. N., Srivastav R. P. Dual series relating; Dual relations involving Fourier — Bessel series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A, 1962—1963, vol. 66, p. 3. pp. 150—161.
9. Sneddon I. N. Dual equations in elasticity. В сб: «Приложения теории функций в механике сплошной среды». Тр. Междун. симпоз. в Тбилиси, 1963, т. 1, М., «Наука», 1965.
10. Минков И. М. О некоторых функциональных уравнениях. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, стр. 964.
11. Цейтлин А. И. О методе парных интегральных уравнений и парных рядов и его приложениях к задачам механики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 259—270.
12. Баблоян А. А. Решение некоторых «парных» рядов. Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 3, стр. 149—157.