Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ПОСТАНОВКА В МОМЕНТАХ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. А. Ломакин

(Москва)

Рассматриваются задачи теории упругости при случайных внешних воздействиях. Получены краевые задачи для моментов любого порядка тензорных случайных полей напряжений и перемещений. Для этих краевых задач доказаны теорема единственности и минимальный принцип, аналогичный принципу минимума потенциальной энергии классической теории упругости.

В качестве примера дано решение краевой задачи в моментах тензора напряжений второго порядка для полуплоскости $x \geqslant 0$ при наличии на границе $x = 0$ нормальных и касательных сил, являющихся статистически однородными случайными функциями координаты y.

1. Рассмотрим две задачи теории упругости: задачу в перемещениях, когда заданы внешние объемные f_i и поверхностные q_i силы

$$\partial\tau_{ij} / \partial x_j = -f_i, \quad \tau_{ij}n_j = q_i \quad (x_s \in s), \qquad \tau_{ij} = c_{ijkl}\, \partial w_k / \partial x_l \tag{1.1}$$

и задачу в напряжениях, когда, наряду с силами f_i, q_i, задан тензор несовместности η_{ik}

$$\partial\tau_{ij} / \partial x_j = -f_i, \quad \tau_{ij}n_j = q_i \quad (x_s \in s)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_j \partial x_n} = \eta_{il}, \qquad e_{km} = s_{kmij}\tau_{ij} \tag{1.2}$$

Здесь τ_{ij} — тензор напряжений; e_{ij} — тензор деформаций; w_i — вектор перемещений; c_{ijkl}, s_{ijkl} — тензоры, определяющие упругие свойства среды; n_j — нормаль к поверхности s тела; ε_{ijk} — единичный антисимметричный псевдотензор.

Пусть f_i, q_i, η_{il} случайные функции координат x_s, заданные своими средними значениями и моментами различных порядков [1]. В силу обычной (относительно w_i и τ_{ij}) и статистической (отсутствие произведений случайных величин) линейности всех уравнений, входящих в (1.1), (1.2), из них могут быть получены разделяющиеся краевые задачи для средних значений и моментов любого порядка [2].

Для средних значений получаются те же краевые задачи (1.1), (1.2) с заменой всех случайных функций их средними значениями. Такие же уравнения получаются и для отклонений от средних значений.

Для моментов порядка n $(n = 2, 3, \ldots)$

$$v_{i_1 \ldots i_n} = \langle v_{i_1}(x_s^1) \cdots v_{i_n}(x_s^n) \rangle, \qquad p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} = \langle p_{i_1 j_1}(x_s^1) \cdots p_{i_n j_n}(x_s^n) \rangle \tag{1.3}$$

$$\gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} = \langle \gamma_{i_1 j_1}(x_s^1) \cdots \gamma_{i_n j_n}(x_s^n) \rangle, \quad v_i = w_i - \langle w_i \rangle,$$

$$p_{ij} = \tau_{ij} - \langle \tau_{ij} \rangle, \qquad \gamma_{ij} = e_{ij} - \langle e_{ij} \rangle$$

записывая каждое из уравнений (1.1), (1.2) для отклонений в точках $M_k(x_s^k)$, $(k = 1,\ldots, n)$, перемножая их и осредняя, получим соответственно краевые задачи (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6)

$$\frac{\partial^n p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}}{\partial x_{j_1}^1\cdots\partial x_{j_n}^n} = (-1)^n f_{i_1\ldots i_n} \tag{1.4}$$

$$p_{i_1j_1\ldots i_nj_n} n_{j_1}(x_s^1)\cdots n_{j_n}(x_s^n) = q_{i_1\ldots i_n} \qquad (x_s^1,\ldots,x_s^n \in s)$$

$$p_{i_1j_1\ldots i_nj_n} = c_{i_1j_1k_1l_1}\cdots c_{i_nj_nk_nl_n}\frac{\partial^n v_{k_1\ldots k_n}}{\partial x_{l_1}\cdots\partial x_{l_n}} \tag{1.5}$$

$$\gamma_{k_1m_1\ldots k_nm_n} = s_{k_1m_1i_1j_1}\cdots s_{k_nm_ni_nj_n} p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}$$

$$\varepsilon_{i_1j_1k_1}\varepsilon_{l_1m_1n_1}\cdots\varepsilon_{i_nj_nk_n}\varepsilon_{l_nm_nn_n}\frac{\partial^{2n}\gamma_{k_1m_1\ldots k_nm_n}}{\partial x_{j_1}^1\partial x_{n_1}^1\cdots\partial x_{j_n}^n\partial x_{n_n}^n} = \eta_{i_1l_1\ldots i_nl_n} \tag{1.6}$$

$$f_{i_1\ldots i_n} = \langle f_{i_1}'(x_s^1)\cdots f_{i_n}'(x_s^n)\rangle,\quad q_{i_1\ldots i_n} = \langle q_{i_1}'(x_s^1)\cdots q_{i_n}'(x_s^n)\rangle$$

$$\eta_{i_1l_1\ldots i_nl_n} = \langle\eta_{i_1l_1}'(x_s^1)\cdots\eta_{i_nl_n}'(x_s^n)\rangle$$

Здесь $f_{i_1\ldots i_n}$, $q_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta_{i_1l_1\ldots i_nl_n}$ — моменты внешних сил f_i, q_i и тензора несовместности η_{il}. Здесь и далее угловыми скобками обозначается среднее статистическое соответствующей величины, а штрихом — отклонение от среднего.

В связи с краевыми задачами (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6) отметим следующее.

1) Если вместо (1.1) рассматривается задача при заданных на границе тела s случайных перемещениях $\psi_i(x_s)$, то соответствующая краевая задача для моментов порядка n содержит первую группу соотношений (1.4), соотношения (1.5) и граничные условия

$$\begin{gathered} v_{i_1\ldots i_n} = \psi_{i_1\ldots i_n}(x_s^1,\ldots,x_s^n),\quad x_s^1,\ldots,x_s^n\in s \\ \psi_{i_1\ldots i_n} = \langle\psi_{i_1}'(x_s')\cdots\psi_{i_n}'(x_s^n)\rangle \end{gathered} \tag{1.7}$$

2) Пусть f_i, q_i, η_{il}, ψ_i — случайные функции координат и медленно меняющиеся случайные функции времени, так что возможно рассмотрение в квазистатической постановке. В этом случае введенные выше моменты следует определять соотношениями типа

$$v_{i_1\cdots i_n} = \langle v_{i_1}(x_s^1, t_1)\cdots v_{i_n}(x_s^n, t_n)\rangle$$

причем по-прежнему будут иметь место уравнения (1.4) — (1.7).

3) Краевая задача (1.4), (1.6) включает в себя квазистатическую задачу континуальной теории дислокаций для случая, когда тензор плотности дислокаций задан статистически. Тензор несовместности η_{il}

выражается через тензор плотности дислокаций α_{lj} соотношением [3]

$$\eta_{il} = \varepsilon_{ijk}\, \partial\alpha_{lj} / \partial x_k$$

Поэтому, если плотность дислокаций α_{lj} — случайное тензорное поле с заданными моментами

$$\alpha_{l_1 j_1 \ldots l_n j_n} = \langle \alpha'_{l_1 j_1}(x_s^1, t_1) \cdots \alpha'_{l_n j_n}(x_s^n, t_n) \rangle$$

то для моментов напряжений имеет место задача (1.4), (1.6) при

$$\eta_{i_1 l_1 \ldots i_n l_n} = \varepsilon_{i_1 j_1 k_1} \cdots \varepsilon_{i_n j_n k_n} \frac{\partial^n \alpha_{l_1 j_1 \ldots l_n j_n}}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_n}}$$

4) К задачам (1.1), (1.2) со случайными функциями f_i, q_i, η_{il} приводится ряд других статистических задач механики твердых деформируемых тел: задачи вязкоупругости при действии случайных сил (задачи (1.1), (1.2) получаются для трансформант Лапласа искомых функций); задачи о деформации нелинейно упругих и упруго-пластических тел, подвергаемых действию случайных нагрузок (при использовании метода упругих решений [4]); задачи о деформации тел со случайными неоднородностями и случайными неровностями границы тела (при решении этих задач методом возмущений [5-8]).

Во всех указанных случаях задача определения статистических характеристик полей напряжений, деформаций и перемещений может рассматриваться как задача решения краевых задач (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6).

5) Совокупность моментов (1.3) определяет многоточечные распределения соответствующих случайных полей [9, 10] и потому совокупность решений краевых задач (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6) статистически полностью определяет поля τ_{ij}, e_{ij}, w_i.

2. Моменты тензоров напряжений и деформаций связаны зависимостями

$$\begin{aligned} p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} &= c_{i_1 j_1 k_1 l_1} \cdots c_{i_n j_n k_n l_n} \gamma_{k_1 l_1 \ldots k_n l_n} \\ \gamma_{k_1 l_1 \ldots k_n l_n} &= s_{k_1 l_1 i_1 j_1} \cdots s_{k_n l_n i_n j_n} p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Введем потенциал V_n моментов порядка n

$$p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} = \frac{\partial V_n}{\partial \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}}$$

Тогда, в силу (2.1), имеют место соотношения

$$V_n = \frac{1}{2} p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}, \qquad V_n = \frac{1}{2} p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} \frac{\partial^n v_{i_1 \ldots i_n}}{\partial x_{j_1}^1 \cdots \partial x_{j_n}^n}$$

$$V_n = {}^1/_2 c_{i_1 j_1 k_1 l_1} \cdots c_{i_n j_n k_n l_n} \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} \gamma_{k_1 l_1 \ldots k_n l_n}$$

$$V_n = {}^1/_2 s_{i_1 j_1 k_1 l_1} \cdots s_{i_n j_n k_n l_n} p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} p_{k_1 l_1 \ldots k_n l_n}$$

$$\gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} = \frac{\partial V_n}{\partial p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}}$$

Будем считать, что потенциал моментов V_n — положительно определенная форма своих аргументов. Потенциал будет однородной квадратичной формой 6^n переменных $\gamma_{i_1j_1\ldots i_nj_n}$, причем каждый коэффициент этой формы представляет собой произведение упругих постоянных рассматриваемого тела суммарной степени n с некоторым числовым множителем. Поэтому положительная определенность V_n может быть проверена, однако это связано с весьма трудоемким исследованием.

В случае изотропного тела для V_2, например, имеем

$$V_2 = {}^1/_2\lambda^2\gamma_{iikk}\gamma_{ppss} + \lambda\mu\,(\gamma_{iikl}\gamma_{ppkl} + \gamma_{iikk}\gamma_{ijss}) + 2\mu^2\gamma_{ijkl}\gamma_{ijkl} \tag{2.2}$$

где λ и μ — постоянные Ламе. Обычные условия

$$\mu > 0, \qquad 3\lambda + 2\mu > 0$$

обеспечивают положительную определенность формы (2.2).

Итак, пусть потенциал моментов V_n — положительно определенная форма. Тогда имеет место теорема единственности для краевых задач (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6). Докажем ее для задачи (1.4), (1.5).

Рассмотрим два произвольных решения

$$v_{k_1\ldots k_n}^{(1)}, \quad p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}^{(1)}; \qquad v_{k_1\ldots k_n}^{(2)}, \quad p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}^{(2)}$$

задачи (1.4), (1.5) при одних и тех же функциях $f_{i_1\ldots i_n}$, $q_{i_1\ldots i_n}$. Разность этих решений удовлетворяет однородным дифференциальным уравнениям при однородных граничных условиях

$$\frac{\partial^n p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}}{\partial x_{j_1}^{\,1}\cdots\partial x_{j_n}^{\,n}} = 0$$

$$p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}n_{j_1}(x_s^1)\cdots n_{j_n}(x_s^n) = 0, \qquad x_s^1, \ldots, x_s^n \in s \tag{2.3}$$

при этом

$$V_n = \frac{1}{2}\,p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}\frac{\partial^n v_{i_1\ldots i_n}}{\partial x_{j_1}^{\,1}\cdots\partial x_{j_n}^{\,n}} \tag{2.4}$$

Используя (2.4) и применяя формулы Остроградского — Гаусса по каждой группе переменных x_s^k $(k = 1, \ldots, n)$, найдем

$$2\int\limits_{(v)}\cdots\int V_n dv_1\cdots dv_n = -\int\limits_{(v)}\cdots\int v_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial^n p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}}{\partial x_{j_1}^{\,1}\cdots\partial x_{j_n}^{\,n}}dv_1\cdots dv_n +$$
$$+\int\limits_{(s)}\cdots\int p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}n_{j_1}(x_s^1)\cdots n_{j_n}(x_s^n)\,v_{i_1\ldots i_n}ds_1\cdots ds_n \tag{2.5}$$

На основании (2.3), из (2.5) имеем

$$\int\limits_{(v)}\cdots\int V_n dv_1\cdots dv_n = 0$$

Отсюда, в силу положительной определенности V_n, следует $V_n = 0$ и

$$p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} = 0, \qquad \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} = 0, \qquad \frac{\partial^n v_{i_1 \ldots i_n}}{\partial x_{j_1}{}^1 \ldots \partial x_{j_n}{}^n} = 0$$

Таким образом, краевая задача (1.4), (1.5) определяет моменты напряжений и моменты деформаций единственным образом, а моменты перемещений — с точностью до решения системы уравнений

$$\frac{\partial^n v_{i_1 \ldots i_n}}{\partial x_{j_1}{}^1 \ldots \partial x_{j_n}{}^n} = 0$$

При граничных условиях (1.7) однозначно определяются и моменты перемещений $v_{i_1 \ldots i_n}$.

Из изложенного видно, что между задачами (1.4), (1.5); (1.4), (1.6) и задачами теории упругости (1.1), (1.2) при детерминированных функциях f_i, q_i, η_{il} имеется четко выраженная аналогия, что является, конечно, естественным. Эта аналогия может быть продолжена, и для задач (1.4), (1.5); (1.4), (1.6) может быть доказан ряд теорем, известных в теории упругости. В качестве примера сформулируем и докажем для задачи (1.4), (1.5) минимальный принцип, являющийся аналогом принципа минимума потенциальной энергии.

Рассмотрим функционал

$$W_n [v_{i_1 \ldots i_n}] = \int_{(v)} \cdots \int [V_n (\gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}) + (-1)^n f_{i_1 \ldots i_n} v_{i_1 \ldots i_n}] \, dv_1 \cdots dv_n -$$
$$- \int_{(s)} \cdots \int q_{i_1 \ldots i_n} v_{i_1 \ldots i_n} ds_1 \cdots ds_n \tag{2.6}$$

Для него имеет место минимальный принцип, состоящий в следующем: функционал (2.6), рассматриваемый как функционал на допустимых (в смысле гладкости) полях моментов $v_{i_1 \ldots i_n}$, на действительных полях, удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5), достигает абсолютного минимума.

Докажем этот принцип. Пусть $v_{i_1 \ldots i_n}$ обозначают действительные, а $v_{i_1 \ldots i_n} + \Delta v_{i_1 \ldots i_n}$ — произвольные допустимые моменты перемещений. Тогда, так как V_n — однородная квадратичная форма $\gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}$, имеем

$$V_n (\gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} + \Delta \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}) =$$
$$= V_n (\gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}) + V_n (\Delta \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}) + \frac{\partial V_n}{\partial \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}} \Delta \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}$$

и потому (2.7)

$$W_n [v_{i_1 \ldots i_n} + \Delta v_{i_1 \ldots i_n}] - W_n [v_{i_1 \ldots i_n}] = \int_{(v)} \cdots \int V_n (\Delta \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n}) \, dv_1 \cdots dv_n + K$$

$$K = \int_{(v)} \cdots \int p_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} \Delta \gamma_{i_1 j_1 \ldots i_n j_n} dv_1 \cdots dv_n +$$
$$+ \int_{(v)} \cdots \int (-1)^n f_{i_1 \ldots i_n} \Delta v_{i_1 \ldots i_n} dv_1 \cdots dv_n - \int_{(s)} \cdots \int q_{i_1 \ldots i_n} \Delta v_{i_1 \ldots i_n} ds_1 \cdots ds_n \tag{2.8}$$

Используя соотношение

$$p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}\Delta\gamma_{i_1j_1\ldots i_nj_n} = p_{i_1j_1\ldots j_nj_n}\frac{\partial^n\Delta v_{i_1\ldots i_n}}{\partial x_{j_1}{}^1\cdots\partial x_{j_n}{}^n}$$

и преобразуя первый член (2.8) аналогично тому, как это сделано выше, найдем

$$K = -\int_{(v)}\!\!\cdots\!\int\left(\frac{\partial^n p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}}{\partial x_{j_1}{}^1\cdots\partial x_{j_n}{}^n} - (-1)^n f_{i_1\ldots i_n}\right)\Delta v_{i_1\ldots i_n}dv_1\cdots dv_n +$$

$$+\int_{(s)}\!\!\cdots\!\int[p_{i_1j_1\ldots i_nj_n}n_{j_1}(x_s{}^1)\cdots n_{j_n}(x_s{}^n) - q_{i_1\ldots i_n}]\,\Delta v_{i_1\ldots i_n}ds_1\cdots ds_n \qquad (2.9)$$

В силу (1.4), (1.5) из (2.9) получим $K = 0$. Поэтому при не равных тождественно нулю функциях $\Delta\gamma_{i_1j_1\ldots i_nj_n}$, в силу положительной определенности V_n, из (2.7) имеем

$$W_n[v_{i_1\ldots i_n} + \Delta v_{i_1\ldots i_n}] - W_n[v_{i_1\ldots i_n}] = \int_{(v)}\!\!\cdots\!\int V_n(\Delta\gamma_{i_1j_1\ldots i_nj_n})\,dv_1\cdots dv_n > 0$$

что и доказывает сформулированный минимальный принцип.

3. В качестве примера решения краевой задачи типа (1.4), (1.6) рассмотрим задачу о деформации полуплоскости при случайных нагрузках, действующих на ее границе.

Для плоской задачи при наличии случайных поверхностных сил q_1, q_2 краевую задачу для моментов напряжений p_{ijkl} второго порядка можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\nabla_1{}^4\nabla_2{}^4\Phi = 0 \qquad (\Phi = \langle F'(x_1, y_1)\,F'(x_2, y_2)\rangle)\\ &p_{ijkl}n_j(M_1)\,n_l(M_2) = q_{ik}, \qquad M_1, M_2 \in L\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Здесь q_{ik} — моменты второго порядка сил q_1, q_2; L — граница тела; $\nabla_k{}^2$ — оператор Лапласа по координатам точки M_k (x_k, y_k); Φ — момент второго порядка функции напряжений.

В (3.1) тензорные индексы принимают значения 1,2. Величины p_{ijkl} выражаются через момент Φ функции напряжений соотношениями

$$p_{1111} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial y_1{}^2\partial y_2{}^2},\qquad p_{2222} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1{}^2\partial x_2{}^2},\qquad p_{1212} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}$$

$$p_{1122} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial y_1{}^2\partial x_2{}^2},\qquad p_{2211} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1{}^2\partial y_2{}^2},\qquad p_{1112} = -\frac{\partial^4\Phi}{\partial y_1{}^2\partial x_2\partial y_2}$$

$$p_{1211} = -\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1\partial y_1\partial y_2{}^2},\qquad p_{2212} = -\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1{}^2\partial x_2\partial y_2},\qquad p_{1222} = -\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2{}^2}$$

Рассмотрим задачу о деформации полуплоскости $x \geqslant 0$ под действием нормальных q_1 и касательных q_2 сил, являющихся некоррелированными статистически однородными случайными функциями координаты y.

В этом случае

$$q_{11} = q_{11}(\eta),\qquad q_{22} = q_{22}(\eta),\qquad q_{12} = q_{21} = 0,\qquad \eta = y_2 - y_1$$

Для $\Phi(x_1, x_2, \eta)$ при этом имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^8\Phi}{\partial x_1{}^4\partial x_2{}^4} + 2\frac{\partial^6}{\partial\eta^2\partial x_1{}^2\partial x_2{}^2}(\Delta\Phi) + \frac{\partial^4}{\partial\eta^4}(\Delta\Delta\Phi) + 2\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1{}^2\partial x_2{}^2}\right) +$$

$$+ 2\frac{\partial^6}{\partial\eta^6}(\Delta\Phi) + \frac{\partial^8\Phi}{\partial\eta^8} = 0 \qquad (3.2)$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, и граничные условия (при $x_1 = x_2 = 0$)

$$p_{1111} = q_{11}(\eta), \qquad p_{2121} = q_{22}(\eta), \quad p_{1121} = p_{2111} = 0 \tag{3.3}$$

Зададим q_{11}, q_{22} их спектральным представлением

$$q_{ik}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{ik}(\lambda)\, e^{i\lambda\eta} d\lambda$$

и будем искать решение задачи (3.2), (3.3) в виде

$$\Phi(x_1, x_2, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, x_2, \lambda)\, e^{i\lambda\eta} d\lambda$$
$$p_{ijkl}(x_1, x_2, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{ijkl}(x_1, x_2, \lambda)\, e^{i\lambda\eta} d\lambda \tag{3.4}$$

Тогда для $U(x_1, x_2, \lambda)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^8 U}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(\Delta U) + \lambda^4 \Delta\Delta U + 2\lambda^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2\lambda^6 \Delta U + \lambda^8 U = 0 \tag{3.5}$$

и граничные условия (при $x_1 = x_2 = 0$)

$$\tau_{1111} = s_{11}(\lambda), \qquad \tau_{2121} = s_{22}(\lambda), \qquad \tau_{1121} = \tau_{2111} = 0 \tag{3.6}$$

причем τ_{ijkl} выражаются через U соотношениями

$$\tau_{1111} = \lambda^4 U, \qquad \tau_{2222} = \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \qquad \tau_{1212} = \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}$$
$$\tau_{1122} = -\lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \qquad \tau_{1112} = i\lambda^3 \frac{\partial U}{\partial x_2}, \qquad \tau_{2212} = -i\lambda \frac{\partial^3 U}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$
$$\tau_{2211}(x_1, x_2, \lambda) = \tau_{1122}(x_2, x_1, -\lambda)$$
$$\tau_{1211}(x_1, x_2, \lambda) = \tau_{1112}(x_2, x_1, -\lambda)$$
$$\tau_{1222}(x_1, x_2, \lambda) = \tau_{2212}(x_2, x_1, -\lambda)$$

Решение задачи (3.5), (3.6) имеет вид

$$U = [a + b(x_1 + x_2) + c x_1 x_2]\, e^{-|\lambda|(x_1 + x_2)}$$
$$a = \frac{s_1(\lambda)}{\lambda^4}, \qquad b = \frac{|\lambda|}{\lambda^4} s_1(\lambda), \qquad c = \frac{s_1(\lambda) + s_2(\lambda)}{\lambda^2}, \qquad s_1 = s_{11},\ s_2 = s_{22}$$

Моменты напряжений (3.4) при этом определятся соотношениями

$$p_{1111} = T_1^0 + (x_1 + x_2) T_1^1 + x_1 x_2 (T_1^2 + T_2^2)$$
$$p_{2222} = T_1^0 + 4T_2^0 - (x_1 + x_2)(T_1^1 + 2T_2^1) + x_1 x_2 (T_1^2 + T_2^2)$$
$$p_{1212} = T_2^0 - (x_1 + x_2) T_2^1 + x_1 x_2 (T_1^2 + T_2^2)$$
$$p_{1122} = T_1^0 + x_1 (T_1^1 + 2T_2^1) - x_2 T_1^1 - x_1 x_2 (T_1^2 + T_2^2)$$
$$p_{1112} = -x_1 R_2^1 + x_2 R_1^1 + x_1 x_2 (R_1^2 + R_2^2) \tag{3.7}$$
$$p_{2212} = -2R_2^0 + x_1 R_2^1 + x_2 (R_1^1 + 2R_2^1) - x_1 x_2 (R_1^2 + R_2^2)$$
$$p_{2211}(x_1, x_2, \eta) = p_{1122}(x_2, x_1, -\eta), \quad p_{1211}(x_1, x_2, \eta) = p_{1112}(x_2, x_1, -\eta)$$
$$p_{1222}(x_1, x_2, \eta) = p_{2212}(x_2, x_1, -\eta)$$

В формуле (3.7) выражения для T_i^k и R_i^k имеют следующий вид:

$$T_i^k = 2 \int_0^\infty \lambda^k s_i(\lambda) \cos(\lambda\eta) e^{-\lambda(x_1+x_2)} d\lambda, \quad R_i^k = 2 \int_0^\infty \lambda^k s_i(\lambda) \sin(\lambda\eta) e^{-\lambda(x_1+x_2)} d\lambda \tag{3.8}$$

$$(i = 1,\ 2;\quad k = 0,\ 1,\ 2)$$

Рассмотрим два частных случая исследуемой задачи, для которых имеются решения, построенные другими методами.

1) Задача о концентрации напряжений, обусловленной неровностью поверхности, для полуплоскости с неровной границей $x = \varepsilon\Delta(y)$, где ε — малый параметр, а $\Delta(y)$ — стационарная случайная функция, растягиваемой в направлении y напряжениями σ, сводится к задаче о полуплоскости $x \geqslant 0$ при наличии на границе $x = 0$ случайных касательных сил интенсивностью $q_2 = \sigma d\triangle / dy$ [11].

Полагая $s_1 = 0$, $2s_2 = \sigma^2 s(\lambda)$, где $s(\lambda)$ — спектральная плотность случайной функции $d\triangle / dy$, для момента

$$B(\eta) = p_{2222}\,|_{x_1=x_2=0}$$

который найден в [11] другим методом, из (3.7), (3.8) получим то же соотношение

$$B(\eta) = 4\sigma^2 \int_0^\infty s(\lambda) \cos(\lambda\eta)\, d\lambda$$

2) В работе [12] содержится решение задачи о действии на полуплоскость нормальной случайной нагрузки с дельта-корреляцией (нагрузка типа «белого шума»).

Полагая в (3.7), (3.8) $s_1 = \text{const}$, $s_2 = 0$, получим соотношения, найденные другим путем в [12].

Поступила 13 XI 1966 Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин. В. А. Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
2. Ломакин В. А. О статической задаче теории упругости при случайных нагрузках. Вест. Моск. ун-та, 1965, № 5.
3. Kröner. E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Ergebn. angev. Math., 1958, No. 5.
4. Ломакин В. А. Упруго-пластические деформации тел при действии случайных сил. Вест. Моск. ун-та, 1966, № 1.
5. Ломакин В. А. О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
6. Ломакин В. А. Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел. Инж. ж., МТТ, 1966, № 3.
7. Пальмов В. А. Напряженное состояние вблизи шероховатой поверхности упругих тел. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
8. Пальмов В. А. Зависимость концентрации напряжений от качества обработки поверхности деталей. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
9. Обухов А. М. Статистическое описание непрерывных полей. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24 (151).
10. Бэтчелор Д. К. Теория однородной турбулентности. Изд-во иностр. лит., 1955.
11. Пальмов В. А. Концентрация напряжений около шероховатой границы упругого тела. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
12. Eringen A. C., Dunkin J. W. The elastic half plane subjected to sur face tractions with random magnitude or separation. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 4