

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

С. С. Григорян

(Москва)

Твердые горные породы при действии на них интенсивных нагрузок обнаруживают хрупкость: разрушаются с образованием многочисленных трещин. Кроме того, они обладают упруго-пластическими свойствами. В настоящей работе строится простейшая модель для математического описания деформирования и движения такого рода материалов, и в рамках этой модели рассматривается задача о действии взрыва сосредоточенного заряда  $VB$  в хрупкой горной породе.

В пункте 1 приводятся общие соображения по построению математической модели среды. Остальные содержат постановку и решение задачи о действии взрыва сосредоточенного заряда в твердой породе. В пп. 2, 4 дается анализ основной задачи для различных типичных случаев, в п.3 рассматривается уравнение энергии.

1. В материалах, не обладающих порами (к таким можно отнести большинство твердых горных пород), хрупкое разрушение может происходить путем образования трещин отрыва или трещин скола. В пористых хрупких породах (пример — известняк-ракушечник), кроме того, разрушение может происходить и при всестороннем сжатии за счет разрушения хрупкого пористого скелета.

Критическое состояние, предшествующее фактическому разрушению с образованием трещин (и крошением в случае пористой породы), может быть описано в виде некоторого инвариантного соотношения, связывающего компоненты тензора напряжений, — условия прочности. В общем случае это условие для изотропного материала запишется в виде

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) \leq 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $I_1, I_2, I_3$  — некоторые независимые инварианты тензора напряжений (это могут быть, например, главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Если напряженное состояние элемента таково, что в условии (1.1) имеет место неравенство, то будем считать состояние элемента прочным. При достижении равенства в (1.1) будет достигнут предел прочности в элементе и он разрушится — в нем возникнут трещины. При изменении граничных условий задачи разрушение, начавшись в некоторых точках рассматриваемого объема породы, будет, вообще говоря, передаваться другим элементам, причем в каждом элементе перед его разрушением будет достигаться равенство (1.1). Совокупность элементов — точек рассматриваемого объема породы, в которых достигнуто равенство (1.1) и которые в следующий момент окажутся разрушенными, образует границу между неразрушенной частью породы и разрушенной.

Возможны два типа распространения разрушения. В одном случае элементы, в которых достигнуто равенство (1.1), располагаются по линии, так что продвижение этой линии по объему породы порождает макроскопическую трещину. В другом случае эти элементы заполняют двумерную поверхность, и ее распространение переводит трехмерные объемы материала из сплошного состояния в разрушенное. В первом случае на поверхности трещины формулируются соответствующие граничные условия, не совпадающие с равенством (1.1), являющимся лишь условием на краю трещины. Условие на краю трещины для упруго-хрупкого материала может быть сформулировано в несколько ином, чем (1.1), виде, путем фиксирования характера особенности поля напряжений, возникающей при рассмотрении неразрушенной части материала в рамках линейной теории упругости. Этот случай хорошо изучен [1], и здесь его рассматривать не будем. Во втором случае равенство (1.1) выполняется на поверхности, отделяющей разрушенную часть породы от неразрушенной, как предельное соотношение, вырабатывающееся при приближении к этой поверхности из неразрушенной области. В рассматриваемом случае за поверхностью разрушения образуется много мелких трещин, поэтому разрушенный материал тоже можно рассматривать как сплошную среду, т. е. описывать его уравнениями механики сплошных сред.

Равенство (1.1) есть граничное условие, достигаемое на заранее неизвестной, определяемой в процессе решения задачи поверхности при приближении к ней из неразрушенной области. По обе стороны от этой поверхности движение и деформация среды описываются разными системами уравнений для неразрушенной и разрушенной областей, а равенство (1.1) в этих областях не удовлетворяется. Лишь в специальном частном случае, когда в разрушенном материале происходит пластическое течение, причем условие пластичности совпадает с равенством (1.1), — лишь в этом случае равенство (1.1) будет выполняться в области за поверхностью разрушения как условие пластичности, если там происходит пластическое течение.

В общем случае материал как в неразрушенном, так и в разрушенном состояниях будет описываться уравнениями упруго-пластического деформирования среды, причем механические характеристики (постоянные параметры и функции) в неразрушенном и разрушенном состояниях будут различными. Поверхность, разделяющая оба состояния, назовем ее фронтом разрушения, будет, вообще говоря, поверхностью сильного разрыва — ударной волной или контактным разрывом.

Во всех случаях, если свойства неразрушенного и разрушенного материалов известны, естественные условия совместности на фронте разрушения (законы сохранения) вместе с равенством (1.1) образуют систему граничных соотношений, формулируемых на поверхности разрыва (на фронте разрушения), достаточную для однозначного решения задачи в целом.

Конкретизируем условия (1.1). Если главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в задаче могут стать растягивающими, то простейшим естественным ограничением для изотропного материала будет условие

$$\sigma_i \leq \sigma_* \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

При достижении в каком-либо из этих соотношений равенства произойдет отрыв по соответствующей главной площадке, после чего на этой площадке главное напряжение обратится в нуль. Если же главные напряжения отрицательны, т. е. являются сжимающими, то можно думать, что разрушение произойдет путем скола по площадкам, на которых действуют максимальные касательные напряжения, или по октаэдрическим площадкам. В соответствии с этими двумя возможными допущениями условие (1.1) при сжимающих напряжениях для изотропного материала сведется к соотношениям

$$2\tau_i \equiv |\sigma_j - \sigma_k| \leq 2\tau_* \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

или

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}} &\equiv \sqrt{\frac{1}{3}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_2 \leq \tau_* \\ S_i &= \sigma_i + p, \quad p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Таким образом, условие (1.1) приводится к соотношениям (1.2), (1.3) или (1.2), (1.4). Неравенства (1.2), (1.3) определяют в пространстве главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  область, ограниченную полубесконечным шестигранным цилиндром (1.3) и плоскостями (1.2). В случае (1.4) цилиндр будет круговым.

Если в точках на фронте разрушения при приближении из неразрушенной области вырабатывается напряженное состояние, соответствующее одному из равенств (1.2), то разрушение будет сопровождаться образованием трещин нормального разрыва, ориентированных по соответствующим главным площадкам. Если же напряженное состояние будет соответствовать точкам цилиндра (1.3) или (1.4), то будут образовываться трещины касательного разрыва на соответствующих площадках. В первом случае в разрушенном массиве будет отсутствовать соответствующее нормальное напряжение до тех пор, пока трещины не сомкнутся (такое смыкание может наступить или не наступить в зависимости от краевых условий задачи). До смыкания трещин разрушенный материал будет описываться системой уравнений, не совпадающей с уравнениями неразрушенного массива. После смыкания эти уравнения будут совпадать.

Смыкания может и не произойти, а, наоборот, может произойти повторное разрушение, соответствующее уже условиям (1.3) или (1.4). Тогда снова изменятся уравнения, описывающие повторно разрушенный материал.

В простейшем случае можно принять, что уравнения, описывающие разрушенный материал при разрушении по условиям (1.3) или (1.4), одни и те же, независимо от того, было ли разрушение первичным или повторным, следовавшим после разрушения по условиям (1.2).

В качестве этих уравнений возьмем упруго-пластическую модель мягкого грунта, рассмотренную в работе [2], исходя из предположения, что при разрушении в материале образуется множество мелких трещин, разбивающих его на мелкие (в сравнении с характерным масштабом явления) кусочки, так что разрушенный материал по своим свойствам приближается к дисперсному несцементированному грунту. При этом для непористых в неразрушенном состоянии горных пород объемную сжимаемость можно считать обратимой и в простейшем случае линейной. Условие пластичности можно выбрать в обычном виде  $I_2 = F(p)$ , а в частном случае, если внутреннее трение после разрушения таково, что его можно описывать условием разрушения, вырабатывающимся в момент разрушения, условие пластичности можно взять совпадающим с условием разрушения, т. е. в виде (1.3) или (1.4).

Для пористых в исходном состоянии пород условие разрушения будет несколько отличаться. В таких породах при чисто гидростатическом сжатии будет происходить разрушение скелета, причем это разрушение будет постепенным и займет некоторый интервал давлений, так что прочность материала с ростом гидростатического давления будет падать.

Поэтому можно считать, что условие (1.2) сохранится, а в условиях (1.3), (1.4) величину  $\tau_*$  следует считать функцией  $p$ , постоянной при изменении  $p$  от малых величин до некоторого значения  $p_1$ , при котором начинается разрушение скелета, и убывающей до нуля при возрастании  $p$  от  $p_1$  до значения  $p_2$ , при котором скелет полностью разрушен, и материал превращен в песок.]

Кроме того, объемная сжимаемость таких материалов в «неразрушенном» состоянии в интервале давлений  $p_1 \leq p \leq p_2$ , а также в разрушенном состоянии не будет более обратимой и линейной, так что разрушенный материал будет описываться уравнениями мягкого грунта [2].

Здесь условие пластичности уже не может быть взято совпадающим с условием разрушения, так как в условии разрушения (1.4) будет  $d\tau_* / dp \leq 0$ , тогда как условие пластичности, записываемое в виде  $I_2 = F(p)$ , должно удовлетворять соотношению  $dF / dp \geq 0$ .

Отметим, что последний случай охватывает, вообще говоря, и все мягкие грунты, обладающие сцеплением, однако для них величины  $p_1$  и  $p_2$  весьма малы, поэтому при построении модели таких грунтов прочностными (точнее, хрупкими) свойствами

можно пренебречь, как это и делалось в [2]. Следует иметь в виду, что для мягких грунтов, обладающих сцеплением, в процессе пластического деформирования и необратимого сжатия прочность на отрыв может повыситься, так что для них условия (1.2) следует сохранить, предположив, что величина  $\sigma_*$  зависит от меры остаточного уплотнения  $\theta_*$ , т. е. полагать

$$\sigma_* = \sigma_*(\theta_*) \quad (1.5)$$

Опыты по исследованию лессовых грунтов при воздействии на них взрыва [3], действительно, обнаруживают проявление хрупких свойств этих грунтов при распространении в них взрывных волн.

Вскрытие взрывной полости после прекращения движения грунта обнаружило, что значительный объем грунта вокруг полости пронизан многочисленными трещинами, ориентированными в радиальном направлении [3].

Это свидетельствует о том, что прочность на разрыв в лессе при прохождении волны оказалась достаточной, чтобы в грунте возникли существенные растягивающие напряжения, которые, достигнув предельного значения, разорвали массив радиальными трещинами.

Для замыкания системы уравнений модели хрупких твердых горных пород осталось конкретизировать уравнения для неразрушенного материала и уравнения для материала, разбитого трещинами отрыва.

Простейшее предположение состоит в принятии линейных уравнений теории упругости для неразрушенного массива и некоторого их видоизменения для массива, разрушенного трещинами отрыва.

Характер такого видоизменения определяется тем, что одно из главных напряжений в разрушенном массиве равно нулю, поэтому для этого массива следует писать уравнения теории упругости для числа измерений пространства, меньшего на единицу, т. е. уравнения типа уравнений теории упругости при плоском напряженном состоянии или уравнений теории упругих стержней.

Предположение о линейно-упругом поведении неразрушенного материала может не соответствовать опытным данным (имеются некоторые экспериментальные сведения на этот счет [4]).

Однако учет пластичности в неразрушенном массиве вообще говоря, принципиальных затруднений не вносит и может быть выполнен при решении задач. Ниже при рассмотрении конкретной задачи это будет показано.

Отметим, что построенная модель хрупкого тела в термодинамическом отношении является моделью с разделяющейся энергией, ее термодинамическая корректность может быть установлена так же, как это было сделано для модели мягкого грунта. Дополнительным фактором, который здесь следует учесть при рассмотрении уравнения энергии, будет затрата энергии на образование поверхности трещин (поверхностная энергия трещин).

Ниже при рассмотрении конкретной задачи будет произведена фактическая оценка роли поверхностной энергии при разрушении.

Построенная модель, подобно модели мягкого грунта, также является предельной при рассмотрении быстрых (взрывных и ударных) процессов и для статических процессов. Она не содержит постоянных, из которых можно составить величины, имеющие размерности длины или времени, и, следовательно, допускает те же условия подобия и правила моделирования, что и модель мягкого грунта (см. [2]).

Опыт проведения взрывных работ в скальных породах [5,6], действительно, обнаруживает такое подобие, поэтому предлагаемая модель в этом отношении соответствует реальным свойствам твердых горных пород.

В заключение отметим, что исходным поводом для изложенных выше построений явились эксперименты В. В. Адушкина и А. П. Сухотина [7] и наши эксперименты с лессом [3], а также работы [8,10], в которых рассматривались частные задачи для хрупко-разрушающегося материала.

Развитые в настоящей работе построения являются естественным обобщением модели мягкого грунта [2] и результатов этих работ.

2. Пусть в пространстве, заполненном однородной изотропной горной породой, находящейся в покое и сжатой гидростатическим давлением  $p_0$ , имеется сферическая полость радиуса  $r_0$ , заполненная зарядом  $ВВ$ , который после детонации превращается в газ, имеющий начальное давление  $p_{00}$ . Под действием этого давления порода, окружающая полость, придет в движение, в результате которого, если  $p_{00}$  достаточно велико, часть породы будет разрушена, а на большие расстояния от полости уйдут волны напряжений.

Для различных нужд горного дела, сейсморазведки и других приложений представляет интерес определить объем разрушенной породы и характер разрушений, параметры излучаемых очагом взрыва волн и т. д. в зависимости от свойств породы, заряда  $ВВ$  и начальных напряжений в породе.

В схематическом виде эта задача изучалась в работах [8,9], а для статического случая, когда давление в полости медленно растет от значения, равного начальному давлению в породе, — в работе [10]. Ниже дается постановка задачи, основанная на математической модели, сформулированной в предыдущем пункте, и при некоторых естественных предположениях о свойствах среды она сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Будем считать, что деформирование материала в неразрушенном состоянии описывается законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_0 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= -p_0 + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе;  $r$  — лагранжева координата;  $u$  — смещение в радиальном направлении;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$  — напряжения на координатных площадках сферической системы, являющихся в силу симметрии задачи главными.

Уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (2.2)$$

где  $\rho$  — плотность породы.

Подстановка соотношений (2.1) в это уравнение и введение безразмерных переменных по формулам

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{c_0 t}{r_0}, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad U = \frac{u}{r_0}, \quad \Sigma_r = \frac{\sigma_r}{\rho c_0^2}, \\ \Sigma_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{\rho c_0^2}, \quad \rho c_0^2 = \lambda + 2\mu \end{aligned} \quad (2.3)$$

приводят его к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{x^2} U \quad (2.4)$$

Решение этого уравнения, соответствующее расходящейся волне, дается формулой

$$U = \frac{f'(\tau - x)}{x} + \frac{f(\tau - x)}{x^2} \quad (2.5)$$

где  $f(\xi)$  — произвольная пока функция своего аргумента.

Подставив (2.5) в (2.1), (2.3), получим для напряжений и смещения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\rho c_0^2 \left\{ \frac{1}{x} f''(\tau - x) + 4\gamma^2 \left[ \frac{1}{x^2} f'(\tau - x) + \frac{1}{x^3} f(\tau - x) \right] \right\} - p_0 \\ \sigma_\theta &= -\rho c_0^2 \left\{ \frac{1-\gamma^2}{x} f''(\tau - x) - 2\gamma^2 \left[ \frac{1}{x^2} f'(\tau - x) + \frac{1}{x^3} f(\tau - x) \right] \right\} - p_0 \\ u &= r_0 \left[ \frac{1}{x} f'(\tau - x) + \frac{1}{x^2} f(\tau - x) \right]\end{aligned}\quad (2.6)$$

Если  $p_{00}$  не очень велико, то разрушений не будет происходить. Ввиду малости смещений полость с течением времени расширится незначительно, и давление в ней изменится несущественно. В этом случае условие, из которого определяется в (2.6) функция  $f(\xi)$ , запишется в виде

$$\sigma_r|_{r=r_0} = -p_{00} \quad (2.7)$$

Подставив сюда первую из формул (2.6), получим дифференциальное уравнение для  $f(\xi)$ ; его решение при естественных начальных данных

$$f(-1) = 0, \quad f'(-1) = 0 \quad (2.8)$$

следующих из начального условия

$$u(r, 0) = 0 \quad (2.9)$$

имеет вид

$$f(\xi) = \frac{P}{4\gamma^2} \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\gamma^2(\xi+1)]}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sin[2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(\xi+1) + \varphi] \right\} \quad (2.10)$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1-\gamma^2}, \quad \cos \varphi = \gamma, \quad P \equiv (p_{00} - p_0)/\rho c_0^2$$

Чтобы установить, при каких условиях возникает разрушение, обратимся к условию разрушения. В рассматриваемом случае в силу симметрии тензор напряжений имеет только два существенно разных компонента  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , поэтому условие разрушения формулируется в виде соотношения между этими величинами. Удобно условие разрушения изобразить графически. На фиг. 1 отрезки прямых  $BC$ ,  $B_1C_1$  соответствуют условиям (1.2), полупрямые  $BA$ ,  $B_1A_1$  — условиям (1.3). Если использовать условие (1.4), то эти полупрямые окажутся несколько смещенными, однако это смещение весьма незначительно (вместо отрезков  $-2\tau_*$ , отсекаемых полупрямыми на осях, будут отрезки  $-3\tau_*/\sqrt{2}$ , которые отличаются от  $-2\tau_*$  на 6%). Поэтому в рассматриваемой задаче использование условий (1.3) или (1.4) дает практически одинаковые результаты. Из решения упругой задачи (2.6), (2.10) имеем

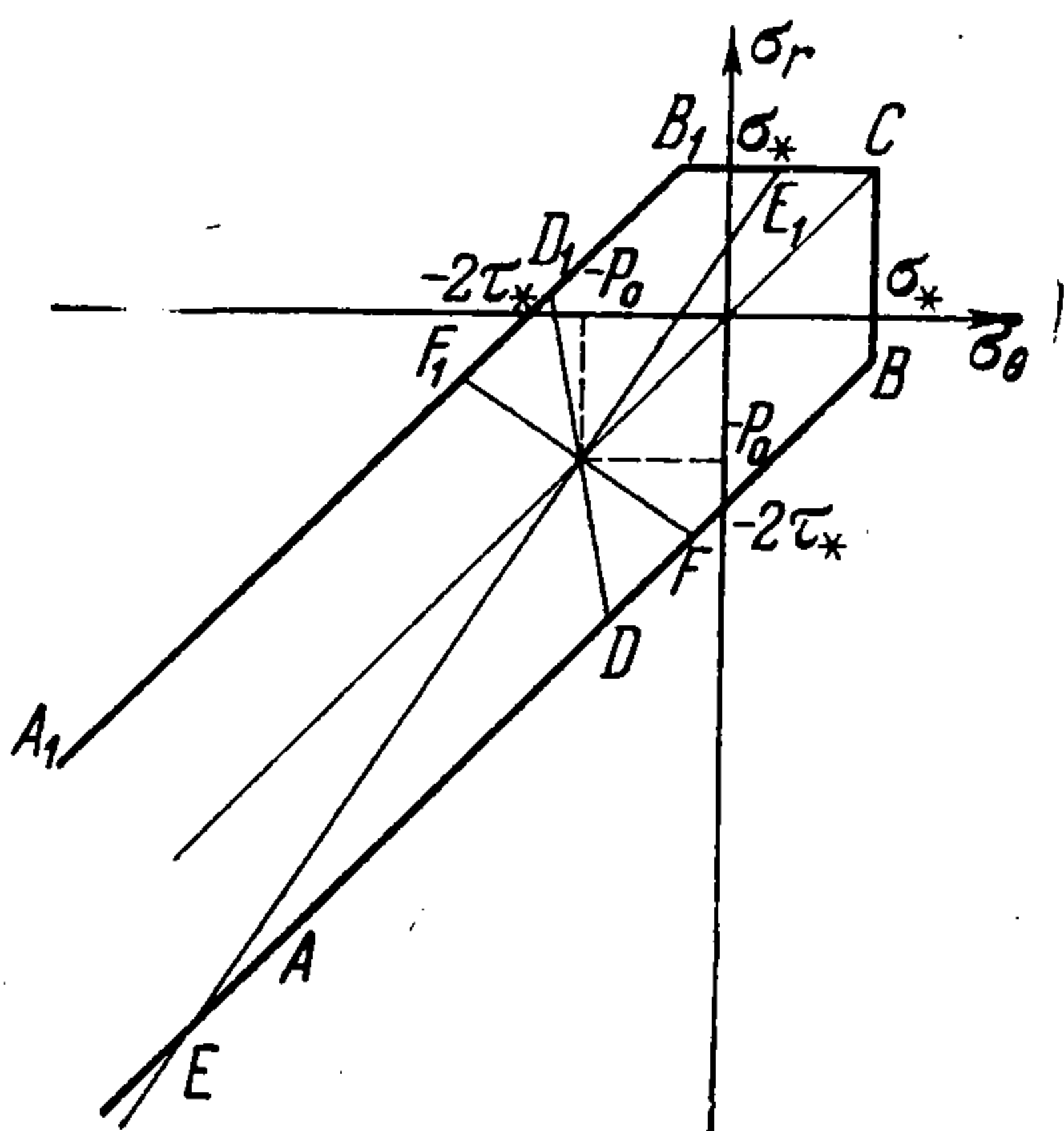
$$\sigma_r \Big|_{\substack{\tau=0 \\ x=1}} \equiv \sigma_{r_0} = -p_{00} < 0 \quad (2.11)$$

$$\sigma_\theta \Big|_{\substack{\tau=0 \\ x=1}} \equiv \sigma_{\theta_0} = -(1-2\gamma^2)p_{00} - 2\gamma^2 p_0 < 0$$

Отсюда видно, что при условии

$$p_{00} \leq p_0 + \gamma^{-2}\tau_* \quad (2.12)$$

в первые моменты времени после начала движения разрушений не будет.



Фиг. 1

Если же неравенство (2.12) нарушено, то с самого начала движения порода вокруг взрывной полости будет разрушаться с образованием трещин скола, и в окрестности полости необходимо строить решение уравнений для разрушенного материала, сопрягая его с решением типа (2.6) на фронте разрушений, который в силу симметрии будет представлять собой расширяющуюся сферу.

Рассмотрим сначала случай, когда выполнено условие (2.12), и выясним, как будет развиваться движение со временем, которое в начальные моменты описывается формулами (2.6), (2.10). Напряжение  $\sigma_r$  на границе полости со временем меняться не будет, оставаясь равным  $-p_{00}$ . Напряжение  $\sigma_\theta$  там со временем будет меняться по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_\theta|_{x=1} = & 2\gamma^2(p_{00} - p_0) - p_{00} + \\ & + \frac{3-4\gamma^2}{2}(p_{00} - p_0) \left[ 1 - \frac{\exp(-2\gamma^2\tau)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sin(2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\tau + \varphi + \psi) \right] \quad (2.13) \\ \sin\psi = & 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}, \quad \cos\psi = 1 - 2\gamma^2 \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что напряжение  $\sigma_\theta$  стремится к предельному равновесному значению

$$\sigma_{\theta\infty} \equiv \sigma_\theta(1, \infty) = -p_{00} + \frac{3}{2}(p_{00} - p_0) \quad (2.14)$$

экспоненциально затухая и колеблясь около этого значения.

Для наглядности последующих рассуждений изобразим на плоскости  $\sigma_r, \sigma_\theta$  множество начальных значений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , даваемое формулами (2.11), и предельных значений, даваемое формулой (2.14) и очевидным соотношением  $\sigma_{r\infty} = \sigma_{r_0} = -p_{00}$  при фиксированном  $p_0$  и меняющемся  $p_{00}$ . На фиг. 1 прямая  $EE_1$  изображает начальные состояния, прямая  $DD_1$  — предельные. Видно, что при  $p_{00} > p_0$  будет  $\sigma_{\theta\infty} > \sigma_{\theta_0}$ , а при  $p_{00} < p_0$  будет  $\sigma_{\theta\infty} < \sigma_{\theta_0}$ . Поэтому, если выполнено условие (2.12) и условие  $\sigma_{r_0} = -p_{00} < \sigma_*$ , т. е. если начальная точка находится внутри области  $ABCB_1A_1$ , то при  $p_{00} > p_0$  с ростом времени напряжение  $\sigma_\theta(1, \tau)$  в начальные моменты будет возрастать, а при  $p_{00} < p_0$  — убывать. В первом случае возможно достижение границы неразрушенного состояния  $ABC$  и возникновение разрушения путем скола (участок  $BA$ ) или отрыва (участок  $BC$ ), во втором случае — только путем скола. В первом случае максимальное значение  $\sigma_\theta(1, \tau)$ , а во втором — минимальное будут достигнуты, когда впервые будет  $\partial\sigma_\theta(1, \tau)/\partial\tau = 0$ . Если эти значения оставят точку  $\sigma_r, \sigma_\theta$  внутри области  $ABCB_1A_1$ , — разрушений на границе полости не возникнет, если же они выведут точку за пределы этой области, то в некоторый момент, предшествующий моменту достижения  $\max\sigma_\theta$  или  $\min\sigma_\theta$ , на границе полости начнется разрушение.

Производная  $\partial\sigma_\theta(1, \tau)/\partial\tau$  впервые обращается в нуль при

$$2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\tau_1 + \psi = \pi \quad (2.15)$$

Соответствующее значение  $\sigma_\theta$  будет равно

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_1} \equiv \sigma_\theta(1, \tau_1) = \\ = - (1-2\gamma^2)p_{00} - 2\gamma^2p_0 + \frac{1}{2}(3-4\gamma^2)(p_{00} - p_0)(1 + e^{-2\gamma^2\tau_1}) \quad (2.16) \end{aligned}$$

При  $p_{00} - p_0 > 0$  будет  $\sigma_{\theta_1} > \sigma_{\theta_0}$ , т. е.  $\sigma_{\theta_1} = \max\sigma_\theta(1, \tau)$ , а при  $p_{00} - p_0 < 0$  будет  $\sigma_{\theta_1} < \sigma_{\theta_0}$ , т. е.  $\sigma_{\theta_1} = \min\sigma_\theta(1, \tau)$ . Совокупность точек  $\sigma_r = \sigma_{r_1} = \sigma_{r_0} = -p_{00}$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_{\theta_1}$  при фиксированном  $p_0$  и различных  $p_{00}$  изображена на фиг. 1 прямой  $FF_1$ .

Если  $p_{00}$  таково, что точка  $\sigma_{r_1}, \sigma_{\theta_1}$  расположена на отрезке  $FF_1$ , то разрушений не будет, и решение будет полностью описываться формулами (2.6), (2.10). Если же  $p_0 + \gamma^{-2}\tau_* > p_{00} > p_{00F}$  или  $-\sigma_* < p_{00} < p_{00F_1}$ , где  $p_{00F}$  и  $p_{00F_1}$  — значения  $p_{00}$ , выводящие точку  $\sigma_{r_1}, \sigma_{\theta_1}$  в точки  $F$  и  $F_1$ , то, начиная с момента  $\tau_2 < \tau_1$ , где  $\tau_2 = \tau_2(p_{00})$  — момент времени, в который точка  $\sigma_r, \sigma_\theta$  попадает на границу области  $ABCB_1A_1$ , начнется разрушение на границе полости, и дальнейшее построение решения следует проводить с учетом разрушения. Значение  $p_{00F_1}$  найдем из соотношения

$$\sigma_{r_1} - \sigma_{\theta_1} = 2\tau_* \quad (2.17)$$

Значение  $p_{00F}$  будет определяться по-разному в зависимости от того, будет точка  $F$  расположена на  $AB$  или на  $BC$ . В первом случае  $p_{00F}$  найдется из соотношения

$$\sigma_{r_1} - \sigma_{\theta_1} = -2\tau_* \quad (2.18)$$

во втором — из соотношения

$$\sigma_{\theta_1} = \sigma_* \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.17), (2.18) будем иметь

$$p_{00F_1} = p_0 - \frac{\tau_*}{\gamma^2 + (3/4 - \gamma^2) [(1 + \exp(-2\gamma^2\tau_1))]} \quad (2.20)$$

$$p_{00F} = p_0 + \frac{\tau_*}{\gamma^2 + (3/4 - \gamma^2) [(1 + \exp(-2\gamma^2\tau_1))]} \quad (2.21)$$

Из (2.19) получим

$$p_{00F} = p_0 + \frac{2(\sigma_* + p_0)}{1 + (3 - 4\gamma^2) \exp(-2\gamma^2\tau_1)} \quad (2.22)$$

Приравняв правые части (2.21) и (2.22), получим значение  $p_0 = p_0^*$ , разграничивающее области значений  $p_0$ , которым соответствуют формулы (2.21), (2.22)

$$p_0^* = -\sigma_* + 2\tau_* \frac{1 + (3 - 4\gamma^2) \exp(-2\gamma^2\tau_1)}{3 + (3 - 4\gamma^2) \exp(-2\gamma^2\tau_1)} \quad (2.23)$$

Отметим, наконец, значение  $p_0 = p_0^{**}$ , получающееся из (2.20) при  $p_{00F_1} = -\sigma_*$  (что соответствует выходу точки  $F_1$  в точку  $B_1$ )

$$p_0^{**} = -\sigma_* + 2\tau_* \frac{2}{3 + (3 - 4\gamma^2) \exp(-2\gamma^2\tau_1)} \quad (2.24)$$

Если  $p_0 < p_0^{**}$ , точка  $F_1$  попадет на отрезок  $B_1C$ , а это означает, что при  $-\sigma_* < p_{00} < p_0$  разрушений на полости не будет возникать, и лишь при  $p_0 = -\sigma_*$  частицы, непосредственно составляющие границу полости, оторвутся от массива и напряжение там упадет до нуля, так что возникнет движение, отвечающее начальному значению давления в полости  $p_{00} = 0$ .

Соответствующее этому значению  $p_{00}$  значение  $\sigma_{\theta_1}$  при  $p_0 = p_0^{**}$  будет

$$\sigma_{\theta_1}^{**} = 1/2 \sigma_* (3 + a) - 2\tau_*, \quad a \equiv (3 - 4\gamma^2) \exp(-2\gamma^2\tau_1) \quad (2.25)$$

Так как  $\sigma_{\theta_1}^{**} > -2\tau_*$ , точка  $\sigma_{r_1} = -p_{00} = 0$ ,  $\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_1}^{**}$  расположена выше прямой  $AB$ .

Если при этом будет  $\sigma_{\theta_1}^{**} \geq \sigma_*$ , то возникающее движение не приведет к разрушению на полости. Если же  $\sigma_{\theta_1}^{**} > \sigma_*$ , то в некоторый момент на полости начнется разрушение с образованием радиально ориентированных трещин отрыва.

Такое разрушение будет происходить и в случае  $\sigma_{\theta_1}^{**} < \sigma_*$ , начиная с некоторого значения  $p_0 < p_0^{**}$ .

Этим исчерпывается рассмотрение всех возможных ситуаций, возникающих при всевозможных заданиях параметров  $p_{00}$ ,  $p_0$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma_*$ ,  $\tau_*$ . Отметим, что хотя случай, когда  $p_{00} < p_0$ , не представляет интереса для задачи о взрыве, качественные особенности решения в этом случае довольно любопытны. Именно, если  $p_0 > p_0^{**}$ , то в этом случае снятие начального напряжения на поверхности полости может привести только к разрушению путем скола. Если же  $p_0 < p_0^{**}$ , то в начальный момент может произойти отрыв по сферической трещине, после чего наружу может распространиться фронт разрушения, создающий радиальные трещины отрыва.

Отметим еще следующее. При статическом нагружении, очевидно, разрушения возникнут лишь тогда, когда точка  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ , перемещаясь вдоль отрезка  $DD_1$ , достигнет одного из концов этого отрезка. Так как точка  $F$ , соответствующая возникновению разрушения в динамических условиях, расположена на отрезке  $AB$  выше точки  $D$ , а точка  $F_1$  ниже точки  $D_1$  на отрезке  $A_1B_1$ , то в динамических условиях способность среды выдержать приложенные в полости напряжения при  $p_{00} > p_0$  ниже, чем в статических условиях, а при  $p_{00} < p_0$  — выше. Аналогично будет и в случае, когда точки  $D$  и  $F$ , обе или только  $F$ , попадают на отрезок  $BC$  или точка  $D_1$  попадает на отрезок  $B_1C$ , а точка  $F_1$  остается на отрезке  $A_1B_1$ . Когда точки  $D_1$  и  $F_1$  обе попадают на отрезок  $B_1C$ , статическая и динамическая прочности оказываются одинаковыми.

В предыдущем анализе был изучен вопрос о возможности возникновения разрушений на поверхности полости. Однако, вообще говоря, разрушение может возникнуть и вдали от полости, поэтому нужно установить, где еще точка  $(\sigma_r, \sigma_\theta)$ , определяемая решением (2.6), (2.10), выходит на границу  $ABCB_1A_1$ . В общем виде решить эту задачу затруднительно, но можно сформулировать процедуру решения, которую в каждом конкретном случае можно осуществить численно.

Разрушение в некоторой внутренней точке области

$$x > 1, \quad \xi \equiv \tau - x > -1$$

может начаться, если там будет выполняться одно из равенств

$$\sigma_\theta(x, \xi) = \sigma_*, \quad \sigma_r(x, \xi) = \sigma_*, \quad \sigma_r(x, \xi) - \sigma_\theta(x, \xi) = \pm 2\tau_*$$

Вычислив производные левых частей этих выражений по  $x$  при  $\xi = \text{const}$  и приравняв их нулю, получаем квадратные уравнения относительно  $x$ .

Таким образом, величины  $\sigma_\theta(x, \xi)$ ,  $\sigma_r(x, \xi)$  и  $\sigma_r(x, \xi) - \sigma_\theta(x, \xi)$  на каждой характеристике  $\xi = \text{const}$  имеют, вообще говоря, два экстремума, а при  $x \rightarrow \infty$  стремятся к  $-p_0$  или к нулю. Поэтому, если при данном  $\xi$  на границе полости  $x = 1$  не достигнуто условие разрушения, то в области  $x > 1$  оно впервые будет достигнуто в одной из этих двух точек экстремума. Для экстремальных величин можно выписать явные формулы, поэтому не составляет труда вычислить эти значения в каждом конкретном случае для всех значений  $\xi$  и найти точку, в которой начнется разрушение.

Точки экстремума определяются формулами:

$$x_{1,2} = \frac{2\gamma^2 f'(\xi) \pm \sqrt{4\gamma^2 [f'(\xi)]^2 + 6\gamma^2 (1 - 2\gamma^2) f(\xi) f''(\xi)}}{(1 - 2\gamma^2) f''(\xi)} \quad \text{для } \sigma_\theta \quad (2.26)$$

$$x_{1,2} = 4\gamma^2 \frac{-f'(\xi) \pm \sqrt{[f'(\xi)]^2 - f(\xi) f''(\xi)}}{f''(\xi)} \quad \text{для } \sigma_r \quad (2.27)$$

$$x_{1,2} = 3 \frac{-f'(\xi) \pm \sqrt{[f'(\xi)]^2 - f(\xi) f''(\xi)}}{f''(\xi)} \quad \text{для } \sigma_r - \sigma_\theta \quad (2.28)$$

Пусть при  $\xi < \xi_1$  решение (2.6), (2.10) нигде не достигает условия разрушения, а при  $\xi = \xi_1$  и  $x = x_1$ , определяемом одной из формул (2.26) — (2.28), это условие впервые достигается. Тогда, очевидно, при близких значениях  $\xi > \xi_1$  на целом отрезке каждой из характеристик  $\xi = \text{const}$  точка  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  окажется за пределами области  $ABCB_1A_1$ , а на концах каждого из этих отрезков будет выполнено условие разрушения.

Множество этих конечных точек образует линию, проходящую через точку  $\xi = \xi_1$ ,  $x = x_1$ , остающуюся в области  $\xi > \xi_1$  и касающуюся характеристики  $\xi = \xi_1$  в этой точке. На этой линии в области  $x < x_1$  может существовать точка  $x = x_2 > 1$ , в которой она впервые касается характеристики второго семейства уравнений (2.4), т. е. прямой  $\tau + x = \text{const} = \xi_2 - 2x_2$ . Часть этой линии, расположенная между указанными точками, будет истинным фронтом разрушения, так как на ней, во-первых, при приближении из неразрушенной области выполняется условие разрушения и, во-вторых, в каждой ее точке характеристики обоих семейств, проведенные назад, т. е. к оси  $x$ , расположены по одну сторону от нее (эта линия пространственно подобна). Поэтому решение задачи в точках этой линии при приближении к ней снизу (со стороны оси  $x$ ) однозначно определяется решением, т. е. формулами (2.6). О продолжении за пределы конечных точек, в которых она касается характеристик уравнения (2.4), где она более не определяется решением (2.6), будет сказано несколько ниже.

Дальнейшее изучение решения задачи будем производить следующим образом. Сначала построим решение только для случаев, когда разрушение начинается на полости, после чего можно, пользуясь соотношениями (2.26) — (2.28) и относящимися к ним рассуждениями, определить, возникают ли вне полости самостоятельные очаги разрушений. Если они возникнут, то до тех пор, пока фронты разрушений, исходящие из этих очагов, не начнут взаимодействовать с решением, построенным без учета их возникновения (характер такого взаимодействия будет подробно описан ниже), до этих пор исходное решение будет правильным. С момента начала взаимодействия процедура продолжения решения осложнится.

Начнем со случая, когда впервые на полости начинается разрушение с образованием радиальных трещин, т. е. когда точка  $F$  попадает на отрезок  $BC$ , а  $p_{00}$  заключено в пределах  $p_{00F} < p_{00} < p_{00B}$ , где  $p_{00B}$  — значение  $p_{00}$ , соответствующее точке  $B$ . Момент начала разрушения  $\tau_2$  определится из условия  $\sigma_\theta(1, \tau_2) = \sigma_*$ . Начиная с этого момента, в глубь среды будет распространяться сферический фронт разрушений, изменение радиуса которого во времени  $x = x_1(\tau)$  подлежит определению.

В области  $x > x_1(\tau)$  решение по-прежнему дается формулами (2.6), однако там функция  $f(\xi)$  более не определяется соотношением (2.10), а находится из условий сопряжения решения (2.6) с решением в области  $1 \leq x \leq x_1(\tau)$ , к определению которого и перейдем.

Полагая, что в области  $1 \leq x \leq x_1(\tau)$  при прохождении фронта разрушений образуется множество мелких трещин, ориентированных в радиальном направлении, будем считать, что там допустимо описание движения уравнениями сплошной среды. Уравнение движения будет иметь вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_r \quad (2.29)$$

так как там  $\sigma_\theta \equiv 0$ . Второе уравнение получим в виде закона Гука для «стержней», на которые разбита среда

$$\sigma_r = E \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_{r_0}, \quad \sigma_{r_0} = - \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} p_0 \quad (2.30)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга

$$E = (\lambda + 2\mu) \frac{\gamma^2(3 - 4\gamma^2)}{1 - \gamma^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma} \quad (2.31)$$

а  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

Формула (2.30) получается из полного закона Гука

$$\sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + 2\mu\varepsilon_r - p_0, \quad \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + 2\mu\varepsilon_\theta - p_0$$

при условии  $\sigma_\theta \equiv 0$  исключением деформации  $\varepsilon_\theta$ , которая, конечно, уже не равна  $u/r$ . Подставив (2.30) в (2.29) и пользуясь безразмерными переменными (2.3), получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = q^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{2\gamma^2}{(1 - \gamma^2)x} P_0 \quad (2.32)$$

$$q = \frac{c_1}{c_0} = \left( \frac{\gamma^2(3 - 4\gamma^2)}{1 - \gamma^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma} \right)^{1/2}, \quad P_0 = \frac{P_0}{\rho c_0^2} \quad (2.33)$$

Здесь  $c_1$  — «стержневая» скорость звука ( $\rho c_1^2 = E$ ). Общее решение (2.32) есть

$$U = \frac{1}{x} [f_1(q\tau - x) + f_2(q\tau + x)] + \frac{P_0}{3 - 4\gamma^2} x \quad (2.34)$$

Здесь  $f_1(\xi_1)$ ,  $f_2(\xi_2)$  — произвольные функции своих аргументов.

Радиальное напряжение  $\sigma_r$  в разрушенной области (2.35)

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 \frac{\gamma^2(3 - 4\gamma^2)}{1 - \gamma^2} \left[ \frac{f_1'(q\tau - x) - f_2'(q\tau + x)}{x} + \frac{f_1(q\tau - x) + f_2(q\tau + x)}{x^2} \right]$$

Таким образом, для моментов времени  $\tau > \tau_2$  решение в неразрушенном материале будет описываться формулами (2.6), а в разрушенном — формулами (2.34), (2.35). В этих формулах содержится три неопределенных функции  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ . Они должны быть найдены из условий сопряжения на фронте разрушений  $x = x_1(\tau)$ , где  $x_1(\tau)$  — также подлежащая определению неизвестная функция и из условий на полости.

Условия сопряжения состоят из обычных законов сохранения на поверхности сильного разрыва и условия разрушения, которое должно выполняться на стороне этой поверхности, обращенной в неразрушенную область. Последнее условие запишется в виде

$$\frac{1-2\gamma^2}{x_1} f''(\xi) - 2\gamma^2 \left[ \frac{f'(\xi)}{x_1^2} + \frac{f(\xi)}{x_1^3} \right] = -\Sigma_* - P_0, \quad \Sigma_* = \frac{\sigma_*}{\rho c_0^2} \quad (2.36)$$

Закон сохранения массы, как обычно, при использовании лагранжевых координат и естественном требовании непрерывности смещений удовлетворяется автоматически, и его выписывать не нужно. Однако нужно написать условие непрерывности смещений, имеющее вид

$$f'(\xi) + \frac{1}{x_1} f(\xi) = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) + \frac{P_0}{3-4\gamma^2} x_1^2 \quad (2.37)$$

$$\xi_1 = q\tau - x_1(\tau), \quad \xi_2 = q\tau + x_2(\tau)$$

Теорема количества движения запишется в виде

$$-\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2} = \rho \frac{dr_1}{dt} (v_1 - v_2) \quad (2.38)$$

или после подстановки (2.5), (2.6), (2.34), (2.35)

$$f''(\xi) + 4\gamma^2 \left[ \frac{1}{x_1} f'(\xi) + \frac{1}{x_1^2} f(\xi) \right] -$$

$$- \frac{\gamma^2(3-4\gamma^2)}{1-\gamma^2} \left\{ f_1'(\xi_1) - f_2'(\xi_2) + \frac{1}{x_1} [f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2)] \right\} + P_0 x_1 =$$

$$= x_1 \left\{ f''(\xi) + \frac{1}{x_1} f'(\xi) - q [f_1'(\xi_1) + f_2'(\xi_2)] \right\} \quad (2.39)$$

Переходя к формулировке условия на полости, сделаем одно замечание. Примем обычное предположение об адиабатическом квазистационарном изменении состояния продуктов детонации  $ВВ$  при изменении объема полости<sup>1</sup>. Адиабата может быть аппроксимирована двумя степенными формулами вида  $pV^\kappa = \text{const}$  для двух диапазонов изменения давления, причем для начальных больших давлений показатель  $\kappa$  близок к трем. Поэтому, хотя при распространении фронта разрушения на заметные расстояния смещение стенки полости будет и малым, изменения давления в полости из-за большой величины  $\kappa$  могут быть заметными, и эти изменения следует учесть в граничном условии на полости.

С учетом этого условие на полости запишется в виде

$$\frac{\gamma^2(3-4\gamma^2)}{1-\gamma^2} [f_1'(\xi_1^0) - f_2'(\xi_2^0) + f_1(\xi_1^0) + f_2(\xi_2^0)] =$$

$$= P_{00} \left[ 1 + f_1(\xi_1^0) + f_2(\xi_2^0) + \frac{P_0}{3-4\gamma^2} \right]^{-3\kappa} \approx$$

$$\approx P_{00} \left\{ 1 - 3\kappa \left[ f_1(\xi_1^0) + f_2(\xi_2^0) + \frac{P_0}{3-4\gamma^2} \right] \right\}$$

$$P_{00} = \frac{P_{00}}{\rho c_0^2}, \quad \xi_1^0 = q\tau - 1, \quad \xi_2^0 = q\tau + 1 \quad (2.40)$$

<sup>1</sup> Это условие в случае мягких грунтов [11] является достаточно хорошим приближением. В рассматриваемом случае, когда скорость звука имеет порядок 5000 м/сек, а процесс разрушения охватывает объем породы, простирающийся на несколько радиусов заряда, применимость этого условия не очевидна, и волновые процессы в продуктах детонации  $ВВ$  могут оказаться существенными.

Соотношения (2.36), (2.37), (2.39), (2.40) образуют замкнутую систему уравнений для определения четырех функций  $f(\xi)$ ,  $f_1(\xi_1)$ ,  $f_2(\xi_2)$ ,  $x_1(\tau)$ . Отметим, что напряжение  $\sigma_r$ , а следовательно, и скорость  $v$  на фронте разрушений не будут непрерывными, ибо добавление одного из этих условий непрерывности делает систему (2.36) — (2.39) переопределенной и неразрешимой. Фронт разрушений является настоящей ударной волной. Поэтому условие непрерывности  $\sigma_r$ , принятое в работах [8, 9], в общем случае является недопустимым.

Рассмотрим более подробно соотношения на фронте разрушений. Дифференцируя условие непрерывности смещений, получим

$$v_1 - v_2 = \frac{dr_1}{dt} \left( \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (2.41)$$

Индексами 1 и 2 обозначаем величины в неразрушенном и разрушенном материалах соответственно. Подставив (2.41) в (2.38), получаем

$$\left| \frac{dr_1}{dt} \right| = \left( \frac{-\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}}{\rho (\partial u_2 / \partial r - \partial u_1 / \partial r)} \right)^{1/2} \quad (2.42)$$

Далее, исключив из (2.1) при  $\sigma_\theta = \sigma_*$  величину  $u/r$ , получим

$$\sigma_{r_1} = E \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1 - 2\gamma^2}{1 - \gamma^2} \sigma_* - \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} p_0 \quad (2.43)$$

и, используя (2.30), для  $\sigma_{r_2}$  будем иметь:

$$-\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2} = \rho c_1^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \frac{1 - 2\gamma^2}{1 - \gamma^2} \sigma_* \quad (2.44)$$

Из полученных формул, в частности, видно, что если  $v_1 - v_2 = 0$ , то и  $\partial u_1 / \partial r - \partial u_2 / \partial r = 0$ , что возможно только при  $\sigma_* = 0$ , т. е. скорость частицы и радиальное напряжение могут быть непрерывными на фронте разрушений только при  $\sigma_* = 0$ ; во всех остальных случаях фронт разрушений будет ударной волной. Из (2.42), (2.44) получим

$$\rho \left[ c_1^2 - \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1 - 2\gamma^2}{1 - \gamma^2} \frac{\sigma_*}{\partial u_2 / \partial r - \partial u_1 / \partial r} \quad (2.45)$$

Если  $\partial u_2 / \partial r - \partial u_1 / \partial r > 0$ , то из (2.42) следует, что  $-\sigma_{r_1} > -\sigma_{r_2}$ , а так как изменения плотности определяются формулой

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r}$$

а на фронте разрушений

$$\frac{\Delta \rho_1 - \Delta \rho_2}{\rho} = \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{\partial u_1}{\partial r} \quad (2.46)$$

то и  $\Delta \rho_1 > \Delta \rho_2$ , т. е. фронт разрушений будет скачком разрежения. Следует помнить, что  $\Delta \rho_2$  — изменение средней плотности материала, разрушенного радиальными трещинами, а  $\Delta \rho_1$  — изменение истинной плотности сплошного материала. Изменение истинной плотности при разрушении можно определить по скачку среднего давления.

Из формулы (2.45) следует, что в этом случае будет выполнено еще неравенство  $|dr_1 / dt| < c_1$ , т. е. фронт разрушений распространяется с дозвуковой скоростью по отношению к разрушенному материалу, а так

как  $c_1 < c_0$ , то и по-прежнему по отношению к неразрушенному материалу.

В этом случае фронт излучает в неразрушенный материал упругие волны. Это — основной случай.

Если же  $du_2/dr - du_1/dr < 0$ , то  $-\sigma_{r_1} < -\sigma_{r_2}$ ,  $\Delta\rho_1 < \Delta\rho_2$  и  $|dr_1/dt| > c_1$ . Этот случай может возникнуть тогда, когда разрушения начинаются в области  $x > 1$ , и закон движения фронта разрушений на первых порах полностью определяется упругой волной в неразрушенном материале, причем имеет место неравенство  $|dr_1/dt| > c_0$ . В этом случае зависимость  $r = r_1(t)$  известна из упругого решения, и параметры движения непосредственно за фронтом разрушений, т. е. функции  $f_1(\xi_1)$  и  $f_2(\xi_2)$  полностью определяются соотношениями на этом фронте, т. е. формулами (2.37), (2.39) (см. выше). Следует отметить, что рассматриваемый случай, возможный математически, допустим физически, если при этом истинная поперечная деформация  $\varepsilon_0^\circ$  за фронтом разрушений не превосходит геометрическую (фиктивную), т. е. величину  $u/r$ , ибо только в этом случае радиальные трещины могут фактически возникнуть. Поэтому в этом случае следует проверять выполнение условия, сводящегося к неравенству

$$\frac{U_1}{x_1} + \frac{1-2\gamma^2}{2(1-\gamma^2)} \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{P_0}{2(1-\gamma^2)} \geq 0 \quad (2.47)$$

Если это неравенство не выполняется, то из точки, где оно впервые нарушается, нужно строить закон движения  $x = x_1(\tau)$  по-другому, так чтобы упругая волна излучалась фронтом  $x = x_1(\tau)$ , а не определяла сама закон движения этого фронта.

Случай, когда  $c_1 < |dr_1/dt| < c_0$  невозможен. В этом случае линия  $r = r_1(t)$  будет пространственно подобной для уравнения (2.32), т. е. из каждой точки этой линии характеристики обоих семейств выходят в область, где  $\tau$  возрастает. Аналогично обстоит с характеристиками  $\tau - x = \text{const}$  или  $\tau + x = \text{const}$  уравнения (2.4) соответственно для случаев  $dr_1/dt > 0$  или  $dr_1/dt < 0$ . Поэтому решение задачи как в области разрушенного, так и в области неразрушенного материала, делается неединственным (см. аналогичную ситуацию в задаче о взрыве в мягком грунте [11]). Это означает, что в момент, когда достигается состояние  $|dr_1/dt| = c_0$  (если, конечно, до этого момента выполнено условие (2.47)), скорость фронта разрушений должна меняться скачком, делаясь по абсолютной величине меньше  $c_1$ . Если условие (2.47) нарушается раньше, такое изменение скорости фронта должно произойти в момент нарушения этого условия.

3. Прежде чем перейти к анализу системы функционально-дифференциальных уравнений (2.36), (2.37), (2.39), (2.40) и построению алгоритма ее решения, рассмотрим уравнение энергии для фронта разрушений. Это уравнение, как обычно, можно свести к ударной адиабате, имеющей вид

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) (\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}) = 0 \quad (3.1)$$

Здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — внутренние энергии единицы массы неразрушенного и разрушенного материалов соответственно. В силу того, что адиабатические и изотермические

упругие модули твердых тел из-за малости коэффициента теплового расширения отличаются незначительно, можно считать их совпадающими, а внутреннюю энергию разделяющей [12]; это дает

$$\varepsilon_1 = \frac{p_1^2}{2(\lambda + 2/3\mu)\rho} + \frac{J_{21}}{2\mu\rho} + \varepsilon_0(T_1) \quad \left( p_1 = -\frac{\sigma_{r_1} + 2\sigma_*}{3} \right) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_{r_2}^2}{2E\rho} + \varepsilon_0(T_2) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_s \quad \left( J_{21} = \frac{(\sigma_{r_1} - \sigma_*)^2}{3} \right) \quad (3.3)$$

Здесь  $\varepsilon_0(T)$  — аддитивная часть внутренней энергии, зависящая только от температуры  $T$ . Величина  $\varepsilon_s$  — суммарная поверхностная энергия всех трещин, содержащихся в единице объема разрушенной породы; она пропорциональна суммарной площади поверхности этих трещин. Подставив (3.2), (3.3) в (3.1) и используя выражения  $1/\rho_1$  и  $1/\rho_2$  через смещения  $u_1$  и  $u_2$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma_{r_1} + 2\sigma_*)^2}{18(\lambda + 2/3\mu)} + \frac{(\sigma_{r_1} - \sigma_*)^2}{6\mu} - \frac{\sigma_{r_2}^2}{2E} + \rho[\varepsilon_0(T_1) - \varepsilon_0(T_2)] - \\ & - \varepsilon_s - \frac{1}{2}(\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}) \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Исключив при помощи (2.44) разность  $\partial u_1/\partial r - \partial u_2/\partial r$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma_{r_1} + 2\sigma_*)^2}{18(\lambda + 2/3\mu)} + \frac{(\sigma_{r_1} - \sigma_*)^2}{6\mu} - \frac{\sigma_{r_1}^2}{2E} + \frac{\sigma_{r_1}^2 - \sigma_{r_2}^2}{2E} - \\ & - \frac{1}{2E}(\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}) \left( \sigma_{r_1} - \sigma_{r_2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sigma_* \right) + \rho[\varepsilon_0(T_1) - \varepsilon_0(T_2)] - \varepsilon_s = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выполнив некоторые преобразования, получим отсюда

$$\frac{\sigma_*}{\rho c_0^2 2\gamma^2 (3 - 4\gamma^2)} [\sigma_* - (1 - 2\gamma^2)(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2})] - \varepsilon_s + \rho[\varepsilon_0(T_1) - \varepsilon_0(T_2)] = 0 \quad (3.6)$$

В силу того, что разрушение происходит быстро, этот процесс можно считать адиабатическим, а поскольку он необратим, то должен сопровождаться возрастанием энтропии. В рассматриваемой модели энтропия  $S$  единицы объема

$$S = \int \frac{1}{T} \frac{d\varepsilon_0}{dT} dT + \int \frac{1}{T} \frac{d\varepsilon_s}{d\Sigma} d\Sigma \quad (3.7)$$

Изменения температуры при разрушении обычно невелики, поэтому можно считать, что  $\rho\varepsilon_0(T) = CT + \text{const}$ , и что поверхностная энергия не зависит от температуры. Тогда (3.7) перейдет в

$$S = C \ln T + \frac{\varepsilon_s}{T} + \text{const} \quad (3.8)$$

где  $C$  — теплоемкость единицы объема породы.

Изменение энтропии при разрушении определится формулой

$$S_2 - S_1 = C \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\varepsilon_s}{T_2} \quad (3.9)$$

(в неразрушенном состоянии  $\varepsilon_s = 0$ ).

В силу второго закона термодинамики должно удовлетворяться неравенство

$$S_2 - S_1 > 0 \quad (3.10)$$

Используя соотношения (2.44), (2.45), уравнение (3.6) можно привести к виду

$$\varepsilon_s + C(T_2 - T_1) = \frac{\sigma_*^2}{2\gamma^2(3 - 4\gamma^2)\rho c_1^2} \left[ 1 + \frac{(1 - 2\gamma^2)/(1 - \gamma^2)}{(c_1/c_*)^2 - 1} \right] \equiv A, \quad c_* \equiv dr_1/dt \quad (3.11)$$

Определяя отсюда  $T_1/T_2$  и подставив в (3.9), получим условие (3.10) в виде,

$$\frac{\varepsilon_s}{CT_2} - \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon_s}{CT_2} - \frac{A}{CT_2} \right) > 0 \quad (3.12)$$

По физическому смыслу  $\varepsilon_s$  положительная величина. Левая часть (3.12) при положительных  $\varepsilon_s/CT_2$ , рассматриваемая как функция  $\varepsilon_s/CT_2$ , имеет минимум при  $\varepsilon_s/CT_2 = A/CT_2$ , равный  $A/CT_2$ . Значит, условие (3.12) будет выполняться при всевозможных  $\varepsilon_s \geq 0$ , если выполнено неравенство  $A > 0$ , т. е. при

$$1 + \frac{(1 - 2\gamma^2)/(1 - \gamma^2)}{(c_1/c_*)^2 - 1} > 0 \quad (3.13)$$

Как будет показано ниже, величина  $\varepsilon_s$  по сравнению с  $A$  чрезвычайно мала, поэтому условие (3.12) эквивалентно условию (3.13). Последнее сводится к неравенствам

$$|c_*| < c_1, \quad c_0 = c_1 \left( \frac{\gamma^2(3 - 4\gamma^2)}{1 - \gamma^2} \right)^{1/2} < |c_*| < \infty \quad (3.14)$$

Если же будут выполнены соотношения  $c_1 < |c_*| < c_0$ , то неравенство (3.13) (значит, и (3.12)) будет нарушено, т. е. решение будет термодинамически некорректным.

Полученные термодинамические ограничения на скорость распространения фронта разрушений в точности совпадают с ограничениями, установленными выше из чисто математических соображений, основанных на требовании единственности (эволюционности) решения. Это совпадение поразительно, хотя аналогичная ситуация в более простом случае — в газовой динамике — известна [13].

Оценим теперь порядок величины  $\varepsilon_s$ . Пусть при прохождении фронта разрушений на данном расстоянии  $r = r_1$  возникающие радиальные трещины разбивают породу на блоки, средний размер которых равен  $l$ . Площадь поверхности блока, нормальной к радиальному направлению, будет равна  $kl^2$ , где  $k \sim 1$ , а число блоков  $N$  определяется соотношением  $N = 4\pi r_1^2 / kl^2$ . Периметр одного блока будет равен  $\xi l$ , где  $\xi \sim 4$ , так что в объеме  $4\pi r_1^2 \Delta r_1$  суммарная площадь боковой поверхности всех блоков, образованной трещинами, будет равна  $N\xi l \Delta r_1$ , а суммарная поверхностная энергия, затраченная на образование этой поверхности, будет равна  $\alpha N\xi l \Delta r_1$ , где  $\alpha$  — удельная поверхностная энергия породы. Поверхностная энергия трещин в единице объема будет равна  $\alpha N\xi l \Delta r_1 : 4\pi r_1^2 \Delta r_1$ , т. е. будет

$$\varepsilon_s = \frac{\xi\alpha}{kl} \sim 4 \frac{\alpha}{l} \quad (3.15)$$

Если допустить, что при разрушении изменения температуры не происходит, т. е. считать, что вся потерянная на фронте разрушений механическая энергия  $A$ , тратится на образование новой поверхности, получится оценка для  $l$

$$l \sim 4 \frac{\alpha}{A} \sim \frac{\alpha \rho c_0^2}{\sigma_*^2} \quad (3.16)$$

Величина  $\alpha$  для пород: гипс, кальцит и т.д., корунд меняется в пределах от 40 до 1500 эрг/см<sup>2</sup> [14], т. е. от  $4 \cdot 10^{-5}$  до  $1,5 \cdot 10^{-3}$  кг/см. Величина  $\rho c_0^2$  имеет порядок  $10^5$  кг/см<sup>2</sup>, а порядок величины  $\sigma_*$  меняется от нескольких десятков до нескольких тысяч кг/см<sup>2</sup> [15]. Поэтому максимальное значение  $l$  будет порядка

$$l_{\max} \sim \frac{\max \alpha \rho c_0^2}{(\min \sigma_*)^2} \sim \frac{10^{-3} \cdot 10^5}{10^2} \text{ см} = 1 \text{ см}$$

Если же подставить в (3.16) не предельные значения величин, а соответствующие данному материалу, то получатся существенно меньшие значения. Так, например, для стекла будем иметь  $\alpha \sim 130$  эрг/см<sup>2</sup> =  $1,3 \cdot 10^{-4}$  кг/см согласно [14],  $\rho c_0^2 \sim 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>,  $\sigma_* \sim 250$  кг/см<sup>2</sup> согласно [15], так что будет  $l \sim 1,6 \cdot 10^{-3}$  см.

Все это показывает, что для поглощения всей энергии  $A$  необходимо было бы огромное количество трещин, так что размеры блоков, на которые они разбивают породу, оказываются ничтожно малыми. На самом деле размеры блоков будут на много порядков больше полученных при сделанном выше предположении (эти размеры будут не менее размеров природной неоднородности породы), так что доля энергии  $\varepsilon_s$ , идущая на образование их поверхности, будет составлять пренебрежимо малую часть потерянной энергии  $A$ , которая, таким образом, почти целиком переходит

в теплоту (см. (3.11)). Полученные результаты находятся в полном соответствии с данными работы [14], в которой путем прямых измерений было установлено, что затраты энергии на образование новой поверхности при разрушении твердых тел ничтожно малы по сравнению с работой разрушения, которая в основном переходит в теплоту. Исключение могут составить случаи, когда прочность на разрыв  $\sigma_*$  аномально низка. Впрочем этот случай маловероятен, так как у непрочных материалов незначительна и величина  $\alpha$ . Так для кристаллов прочность связана с поверхностной энергией формулой Поляни [16]

$$\alpha = \frac{\sigma_*^2}{2E} a \quad (3.17)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $a$  — межатомное расстояние. Любопытно отметить, что эта формула с точностью до числового множителя совпадает с (3.16), если заменить  $a$  на  $l$ . У кристаллов  $\sigma_*$  значительно больше, чем у породы, поэтому  $l$  для породы получается по формуле (3.16) больше, чем межатомное расстояние  $a$ , фигурирующее в (3.17).

Сделаем еще одно замечание общего характера. Развиваемая здесь схема решения задачи о хрупком разрушении породы не позволяет определить размеры блоков, на которые разбивается порода трещинами. Как показано выше, роль поверхностной энергии в процессе разрушения ничтожна, поэтому размеры блоков нужно определять, используя другие механизмы. В настоящее время не известны рациональные попытки в этом направлении. Однако существуют некоторые экспериментально установленные факты, которые следует учесть при решении вопроса. Так эксперименты В. Д. Кузнецова по исследованию поверхностной энергии [14] обнаружили следующий факт. Если происходит разрушение кристалла некоторого вещества под действием заданной нагрузки, то характерный размер кусков, на которые распадается при этом кристалл, пропорционален корню квадратному из площади, к которой приложено разрушающее давление. Если допустить, что это обстоятельство сохраняется и в рассматриваемой задаче разрушения породы, то, так как разрушающие напряжения здесь на фронте  $r = r_1(t)$  зависят лишь от  $r_1 / r_0 = x_1(\tau)$ , средний размер блоков  $l$  на расстоянии  $r_1$  будет пропорционален корню из площади фронта разрушений, т. е.

$$l = \sqrt{4\pi r_1^2} K \left( \frac{\sigma_{r_1}}{\sigma_*}, \frac{\sigma_{r_2}}{\sigma_*}, \frac{\rho c_0^2}{\sigma_*}, \gamma^2 \right) = r_0 K_1(x_1, \dots) \quad (3.18)$$

где вид зависимости коэффициента  $K_1$  от  $x_1$  определяется безразмерными комбинациями, составленными из постоянных параметров, характеризующих свойства среды и заряда.

С другой стороны, в экспериментах с лессовыми грунтами [3] было обнаружено, что в геометрически подобных условиях и при одинаковом  $VB$  размеры блоков  $l$ , действительно, пропорциональны масштабу явления, т. е. радиусу заряда  $r_0$ . Это означает, что упомянутое выше свойство разрушения кристаллов сохраняется и при разрушении значительных объемов породы при взрывном воздействии на нее. Однако эти эмпирические закономерности не выясняют физическую природу явления, поэтому вопрос о теоретическом определении размеров блоков при разрушении твердого тела остается открытым. Попытки решения этой задачи, разумеется, должны учесть факт наличия геометрического подобия при разрушении, выраженный соотношением (3.18). Заметим, кстати, что соотношение (3.16) не удовлетворяет геометрическому подобию, поэтому наличие этого подобия в опытах еще раз показывает, что роль затраты энергии на образование поверхности при разрушении незначительна.

4. Обратимся теперь к анализу математической задачи, к которой свелась исходная задача, т. е. к анализу уравнений (2.36), (2.37), (2.39), (2.40). В этой системе одна из неизвестных функций  $x_1(\tau)$  входит в аргументы других и это осложняет процедуру ее решения. Если, однако, решение системы известно в малой окрестности точки  $\tau = \tau_2$ ,  $x_1 = 1$ , где

$\tau_2$  — момент, когда от поверхности полости начинает отходить фронт разрушений, то задача построения решения системы сводится к последовательности задач Коши для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение в окрестности точки  $\tau = \tau_2$ ,  $x_1 = 1$  можно построить, разлагая все искомые функции в ряды и подставив их в систему, которая тем самым сведется к совокупности алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений. Минимальное число коэффициентов разложений можно найти прямо из системы, не пользуясь фактической подстановкой рядов. В самом деле, при  $\tau = \tau_2$ ,  $x_2 = 1$  будем иметь

$$\xi = \xi_0 = \tau_2 - 1, \quad \xi_1 = \xi_1^0 = \xi_{10} = q\tau_2 - 1, \quad \xi_2 = \xi_2^0 = \xi_{20} = q\tau_2 + 1$$

В силу требования непрерывности смещений на характеристике  $\xi = \xi_0$  значения  $f(\xi)$  и  $f'(\xi)$  должны быть непрерывны на ней, т. е. значения  $f(\xi_0)$  и  $f'(\xi_0)$  следует считать известными. Тогда из уравнения (2.36) при  $\xi = \xi_0$  найдем  $f''(\xi_0)$ , а из (2.37) — значение  $f_1(\xi_{10}) + f_2(\xi_{20})$ .

В формулах для смещений и напряжений фигурирует только сумма  $f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2)$ , поэтому одну из величин  $f_1(\xi_{10})$ ,  $f_2(\xi_{20})$  можно задавать произвольно (положить, например, равной нулю). После этого из (2.40) найдется разность  $f_1'(\xi_{10}) - f_2'(\xi_{20})$ .

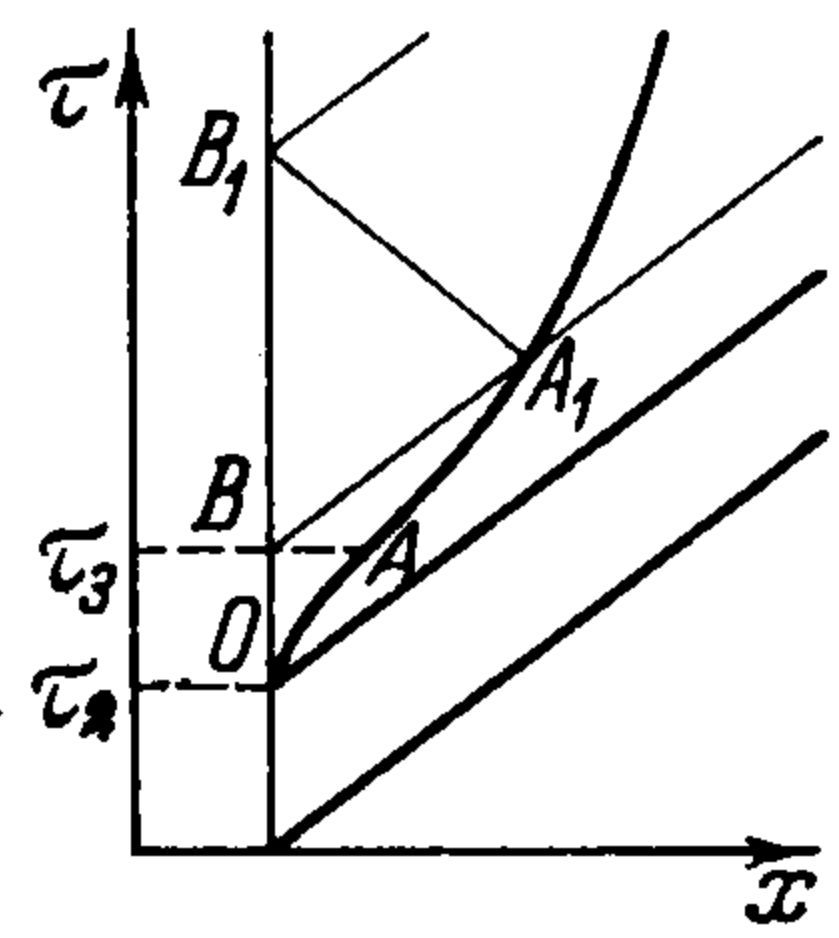
Теперь отметим, что в начальный момент возникновения фронта разрушений скорость фронта будет равна нулю. В самом деле, напряжение  $\sigma_r$  при переходе через характеристику  $\xi = \tau - x = \tau_2 - 1$  остается непрерывным, на этой характеристике будут непрерывными не только  $f(\xi)$  и  $f'(\xi)$ , но и  $f''(\xi)$ . Это означает, что будет непрерывно и  $\sigma_r$ . А так как значение  $-\sigma_r$  на этой характеристике при  $x = 1$  равно давлению в каверне, которое меняется непрерывно при  $\tau = \tau_2$ , то напряжение  $\sigma_r$  на фронте разрушений в начальный момент должно быть непрерывным. Из формулы (2.44) видно, что при этом величина  $\partial u / \partial r$  должна терпеть разрыв на фронте разрушений, а из формулы (2.42) следует, что начальная скорость фронта разрушений будет равна нулю. Исключением будет случай, когда  $\sigma_* = 0$ , требующий особого рассмотрения. Этот случай в предположении отсутствия разрыва функций на фронте разрушения рассматривался в работе [9].

Итак, в соотношении (2.39) при  $\tau = \tau_2$  будет  $x_1' = 0$ . Если теперь продифференцировать (2.37) по  $\tau$  и положить  $\tau = \tau_2$ , то получится соотношение, содержащее, кроме известных величин, еще  $f_1'(\xi_{10})$  и  $f_2'(\xi_{20})$ , а так как разность последних известна, тем самым эти величины становятся известными. В результате все величины  $f''(\xi_0)$ ,  $f_1(\xi_{10})$ ,  $f_1'(\xi_{10})$ ,  $f_2(\xi_{20})$ ,  $f_2'(\xi_{20})$  и  $x_1'(\tau_2) = 0$  становятся известными. Для построения асимптотического решения этого недостаточно — необходимо иметь еще по крайней мере величину  $x_1''(\tau_2)$ . Для нахождения этой величины нужно было бы продифференцировать соотношения (2.36), (2.37), (2.39), (2.40) и положить  $\tau = \tau_2$ . В получаемых таким образом четырех уравнениях, кроме уже известных величин, будут фигурировать величины  $x_1''(\tau_2)$ ,  $f_1''(\xi_{10})$ ,  $f_2''(\xi_{20})$  и  $f'''(\xi_0)$ , которые и можно было бы определить

из этих уравнений. Однако эта процедура оказывается невыполнимой, величины  $x_1''(\tau_1)$ ,  $f_1''(\xi_{10})$ ,  $f_2''(\xi_{20})$  бесконечны. Поэтому построение асимптотики требует определить характер особенности у искомых функций в точке  $x = 1$ ,  $\tau = \tau_2$ . Исследование показывает, что эти особенности имеют вид

$$\begin{aligned} x_1'' &\sim (\tau - \tau_2)^{-1/2}, & f_1'' &\sim (\xi_1 - \xi_{10})^{-1/2} \\ f_2'' &\sim (\xi_2 - \xi_{20})^{-1/2}, & f_1^{IV} &\sim (\xi - \xi_0)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Коэффициенты этих асимптотических выражений легко определяются.



Фиг. 2

Отметим, что в окрестности точки  $\tau = \tau_2$ ,  $x = 1$  асимптотика не может определяться по уравнению фронта разрушений, определяемому условием  $\sigma_\theta(x_1, \tau) = \sigma_*$ , где левая часть дается формулами (2.6), (2.10), ибо из этих формул можно получить неравенство

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial x} \right)_{\xi = \text{const}} \right]_{\substack{x=1 \\ \tau=\tau_2}} &= -\frac{1}{3-4\gamma^2} [(1-2\gamma^2)P + 4(1-\gamma^2)(\Sigma_* + P_0) + \\ &+ 2\gamma^2(3-4\gamma^2)f(\xi_0)] < -\frac{1}{3-4\gamma^2} [(1-2\gamma^2)P + 4(1-\gamma^2)(\Sigma_* + P_0)] < 0 \end{aligned}$$

и, значит, для определяемой таким образом зависимости  $x_1 = x_1(\tau)$  будет  $x_1'(\tau_2) < 1$ , т. е. эта зависимость не может быть законом движения фронта разрушений. Исключение может составить случай, когда  $\gamma^2 > 1/2$  и значения  $P$ ,  $\Sigma_*$ ,  $P_0$  таковы, что написанное выше неравенство не имеет места. В этих случаях асимптотика должна строиться с использованием зависимости  $x_1 = x_1(\tau)$ , получающейся только что описанным способом.

Процедуру продолжения решения поясним при помощи графической схемы (фиг. 2).

Пусть описанным выше способом построено решение в малом треугольнике  $OAB$ , где  $OA$  — начальный участок кривой  $x = x_1(\tau)$ , а  $\tau_3 - \tau_2$  — достаточно малая величина. Проведем из точки  $B$  характеристику  $\xi_1 = q\tau - x = q\tau_3 - 1 = \xi_{11}$ . Она пересечет кривую  $x = x_1(\tau)$  в некоторой точке  $A_1$ . Так как решение в треугольнике  $OAB$  известно, функция  $f_1(\xi_1)$  будет известна в интервале  $\xi_{10} \leq \xi_1 \leq \xi_{11}$ . В соотношениях (2.36), (2.37), (2.39) функция  $f_1(\xi_1)$  тем самым известна, неизвестны только  $f(\xi)$ ,  $f_2(\xi_2)$  и  $x_1(\tau)$ . Рассматривая последние как функции какой-нибудь одной из переменных  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\tau$  (например  $\xi$ ), и перейдя в этих уравнениях от дифференцирований по переменным  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\tau$  к дифференцированию по выбранной одной переменной (например,  $\xi$ ) с учетом формул перехода вида  $d... / d\xi_1 = (d... / d\xi) (d\xi_1 / d\xi)^{-1}$  и т. д., сведем эти уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения четырех функций  $f(\xi)$ ,  $f_2(\xi)$ ,  $x_1(\xi)$ ,  $\tau(\xi)$ .

Из условий в точке  $A$  можно получить полный набор начальных данных, так что задача сводится к задаче Коши для указанной системы обыкновенных уравнений. Решив эту задачу численно, найдем отрезок  $AA_1$  линии  $x = x_1(\tau)$ , функцию  $f(\xi)$  в интервале  $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_{A_1} = \tau_{A_1} - x_1(\tau_{A_1})$ .

Функция  $f_2(\xi_2)$  будет при этом известна в интервале

$$\xi_{20} \leq \xi_2 \leq \xi_{2A_1} = q\tau_{A_1} + x_1(\tau_{A_1})$$

Проведем теперь через точку  $A_1$  характеристику  $\xi_2 = \xi_{2A_1}$ . Она пересечет прямую  $x = 1$  в точке  $B_1$ . Тогда в уравнении (2.40) для интервала  $BB_1$  функция  $f_2(\xi_2^0)$  будет известной, так что оно сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению (с независимой переменной  $\xi_2^0 = q\tau - 1$ ) для определения единственной функции  $f_1$ . Начальное условие определяется в точке  $B$ . Решив эту задачу, определим функцию  $f_1$  для нового интервала  $\xi_{1B} \leq \xi_1 \leq \xi_{1B_1}$ , после этого проведем через точку  $B_1$  характеристику  $\xi_1 = \xi_{1B_1}$ , которая пересечет фронт  $x = x_1(\tau)$  в следующей точке  $A_2$  и задача определения функций  $f(\xi)$ ,  $f_2(\xi_2)$ ,  $x_1(\tau)$  для отрезка  $A_1A_2$  будет совпадать с предыдущей, т. е. эти функции определяются из уже описанной системы уравнений, но с новыми начальными условиями, определяемыми в точке  $A_1$  и для нового интервала изменения независимой переменной, примыкающего к предыдущему. Решив эту задачу, перейдем опять на прямую  $x = 1$  и т. д.

Продолжая эту процедуру, можно продвинуть решение задачи как угодно далеко. Однако в процессе решения надо иметь в виду следующее. Фронт трещин непрерывно излучает упругие волны, поэтому интенсивность скачка на этом фронте и скорость фронта будут со временем падать. Поэтому в некоторый момент времени интенсивность и скорость фронта обратятся в нуль. Продолжение решения с этого момента следует производить иначе.

Действительно в этот момент  $x_1' = 0$ , а  $x_1'' < 0$  в силу непрерывности и, если продолжать описанную процедуру дальше, то фронт начнет перемещаться назад по частицам, «восстанавливая» разрушенный материал, так что решение потеряет физический смысл. Поэтому, начиная с рассматриваемого момента, нужно положить  $x_1' = 0$  и отбросить уравнение (2.36).

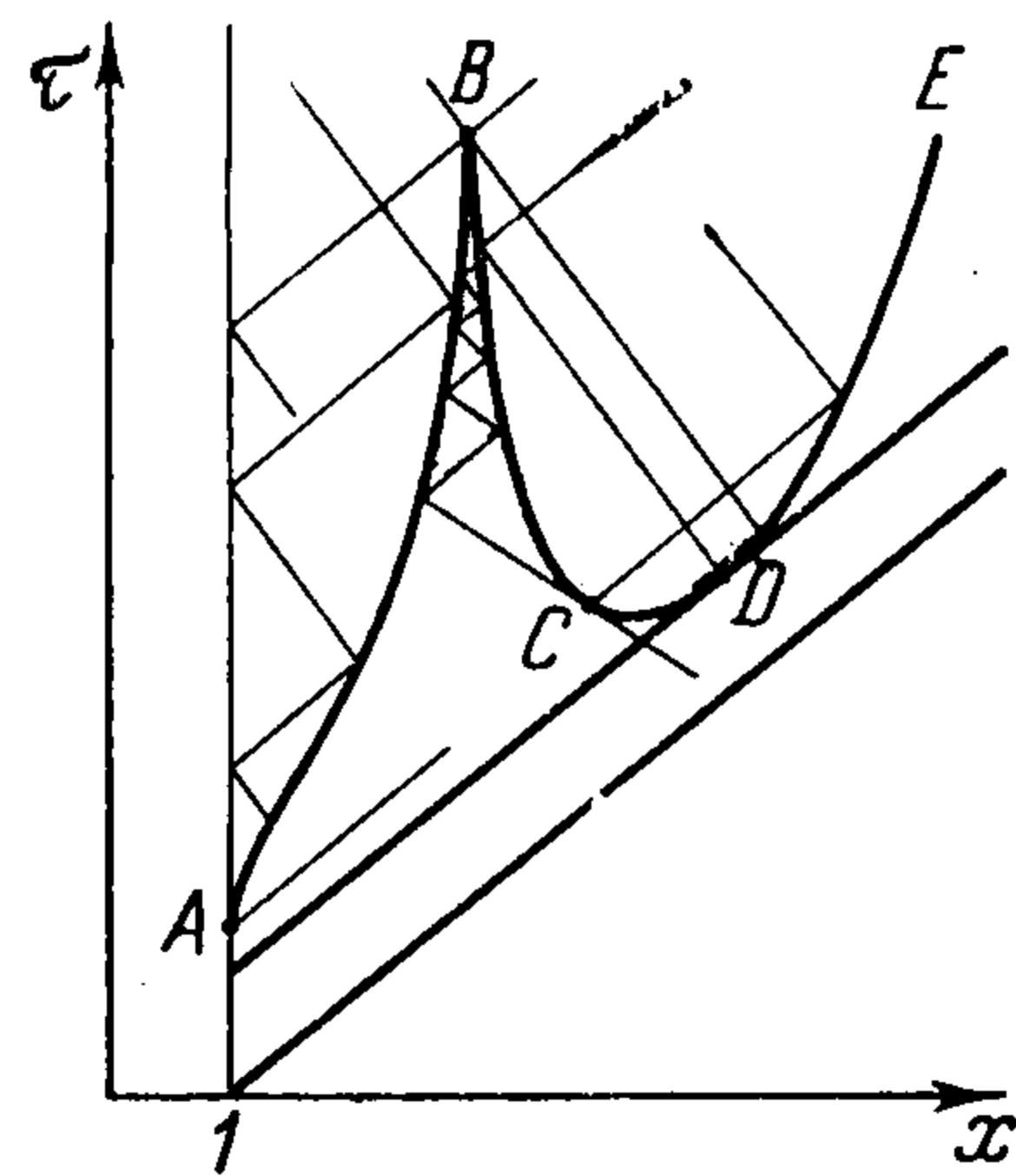
Решение, получаемое таким образом, будет соответствовать тому, что новых разрушений происходить не будет, а напряжение  $\sigma_0$  на границе разрушенной области со стороны неразрушенной будет падать от значения  $\sigma_*$ .

В дальнейшем либо это напряжение останется положительным, и тогда решение нужно продолжить описанным образом до  $\tau = \infty$ , причем для больших значений  $\tau$  легко получить асимптотические формулы, либо наступит момент, когда это напряжение обратится в нуль. После этого момента условие  $x_1' = 0$  нужно отбросить и вновь заменить его уравнением (2.36), положив в нем  $\sigma_* = 0$ . Получающееся решение будет соответствовать тому, что вследствие изменения знака  $\sigma_0$  на границе разрушенной области эта граница начинает перемещаться внутрь разрушенного материала, смыкая трещины, так что в материале возникнут сжимающие напряжения  $\sigma_0$ . В последующем, вообще говоря, граница  $x = x_1(\tau)$  может совершать колебания около положения, к которому она стремится при  $\tau \rightarrow \infty$ . Если в процессе этих колебаний она выйдет на истинную границу между неразрушенным и разрушенным материалом, то возможны новые разрушения, и процедура построения решения с разрушениями должна быть продолжена.

Наконец, надо еще следить за тем, будет ли решение в разрушенной области удовлетворять условию  $-2\tau_* < \sigma_r < \sigma_*$ . Если в какой-то момент где-то одно из этих неравенств (вероятнее всего, левое) превратится в равенство, то из этой точки нужно начать строить новый фронт разрушений, на котором материал, разбитый радиальными трещинами, повторно разрушается раздавливанием. Эта возможность, вообще говоря, также маловероятна, так как все напряжения в решении со временем падают, поэтому, если вначале не возникало разрушения путем скола (раздавливания), то

вряд ли оно возникнет позже. Тем не менее, поскольку решение задачи можно построить лишь численно, проверка необходима.

Выясним теперь, как следует строить решение, если условие  $\sigma_\theta = \sigma_*$  будет достигнуто в некоторой точке в области  $x > x_1(\tau)$ . Если на кривой, определяемой соотношением  $\sigma_\theta(x_*, \tau) = \sigma_*$ , есть участок, на котором  $|x_*'| > c_0$  и выполнено условие (2.47), то выше этого участка функции  $f_1$  и  $f_2$  находятся из уравнений (2.37), (2.39), в которых  $f(\xi)$  и  $x_1(\tau) = x_*$  известны. Продолжение решения для последующих интервалов изменения аргументов неизвестных функций, соответствующих переходу через концы линии  $x = x_*(\tau)$ , соответствующие либо нарушению условия (2.47), либо достижению условия  $|x_*'| = c_0$ , происходит аналогично описанному выше. Разница будет лишь в том, что линия  $x = x_1 = x_*(\tau)$ , зародившаяся во внутренней точке неразрушенного материала, будет иметь две ветви (два фронта, распространяющиеся от полости и к полости). Для ветви, у которой  $x_*' > 0$ , процедура решения совпадает с описанной выше с той разницей, что определение функции  $f_1$  происходит не из условия при  $x = 1$ , а из соответствующих условий на ветви  $x_*' < 0$ . Последние же отличаются от приводившихся выше тем, что там фронт  $x = x_*(\tau)$  отражает упругую волну, идущую в неразрушенном материале от полости, назад к полости, так что в формулах решения задачи для неразрушенного материала добавляется функция, соответствующая отраженной волне; формула для смещений приобретает вид



Фиг. 3

$$U(x, \tau) = \frac{f'(\tau - x)}{x} + \frac{f(\tau - x)}{x^2} - \frac{F' + (\tau + x)}{x} + \frac{F(\tau + x)}{x^2} \quad (4.2)$$

Отраженная волна будет взаимодействовать либо с полостью, если в окрестности полости нет разрушений, либо с фронтом разрушений, идущим от полости. Таким образом, задача делается довольно громоздкой, так как она требует построения уже трех фронтов разрушений и пяти функций, описывающих распределения параметров движения в неразрушенном и разрушенном материалах. В принципе же задача решается по описанной выше для простейшего случая схеме. Особые осложнения возникают из-за того, что фронты разрушений, исходящий от полости и сходящийся к полости, сближаясь, делают интервалы, для которых возникают последовательные задачи Коши, все более короткими и обращающимися в нуль в точке встречи этих фронтов, что требует разработки специального метода счета для окрестности точки встречи. Для пояснения сказанного приводим схему взаимодействия на фиг. 3. Здесь  $AB$  — фронт разрушения, отходящий от полости;  $CB$  и  $DE$  — фронты (сходящийся и расходящийся), возникшие во внутренней точке, соответствующие фазе, когда  $|x_*'| < c_1$ ;  $CD$  — участок этих фронтов, соответствующий фазе  $|x_*'| > c_0$ ; различные прямые — характеристики; точка  $B$  соответствует встрече двух фронтов разрушений.

Перейдем к рассмотрению случаев, когда начальное давление  $p_0$  таково, что точка  $F$  попадает на прямую  $AB$ . Тогда, если  $p_{00}$  удовлетворяет неравенству (2.12) и, кроме того,  $p_{00} > p_{00F}$ , в некоторый момент времени  $\tau_2$  разность  $-p_{00} - \sigma_\theta$  на полости обратится в  $-2\tau_*$  и начнется разрушение материала путем скола. От поверхности полости начнет перемещаться в глубь среды поверхность разрушения  $x = x_2(\tau)$ , на фронте которой со стороны неразрушенного материала будет выполняться условие  $\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_*$ . Если же  $p_{00} > p_0 + \gamma^{-2}\tau_*$ , то разрушение начнется в начальный момент  $\tau = 0$ . Дальнейшее рассмотрение следует

проводить отдельно для случаев, когда прочность породы достаточно велика и когда она незначительна по сравнению с  $p_{00} - p_0$ . В первом случае окончательный радиус зоны разрушений будет не очень большим по сравнению с радиусом заряда  $r_0$ , во втором он будет значительным. В первом случае, расширение полости также будет незначительным и всю задачу можно продолжать рассматривать в лагранжевых координатах, так как дифференциальные уравнения, описывающие движение среды, ввиду малости смещений и деформаций останутся линейными. Во втором случае из-за значительных смещений в окрестности полости рассмотрение в лагранжевых координатах неудобно, ибо теряется линейность и связанная с ней возможность сведения задачи к проблеме для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим сначала первый случай. На стороне фронта разрушений, обращенной в область неразрушенного материала, достигается условие  $\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_*$ . За фронтом материал будет либо испытывать пластическое течение, либо упругую разгрузку по деформации сдвига. При пластическом течении будет выполняться некоторое условие пластичности. Простейшим для возможности эффективного решения задачи является условие пластичности, которое в случае задачи с центральной симметрией сведется к виду

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_{*1} \quad (4.3)$$

Естественно думать, что характеристика прочности при разрушении сколом  $\tau_*$  не меньше, чем величина  $\tau_{*1}$ , характеризующая трение по поверхности образовавшихся при разрушении трещин скола, т. е. считать выполненным неравенство

$$\tau_* \geq \tau_{*1} \quad (4.4)$$

Разрушенный материал в состоянии пластического течения будем описывать условием пластичности (4.3) и законом Гука для объемной деформации

$$\frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta) = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) - p_0 \quad (4.5)$$

Подстановка (4.3) и (4.5) в уравнение движения (2.2) с учетом (2.3) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left(1 - \frac{4}{3}\gamma^2\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2U}{x}\right) - \frac{4T_{*1}}{x}, \quad \tau_{*1} = \rho c_0^2 T_{*1} \quad (4.6)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$U = \frac{F_1'(q_1 r - x) - F_2'(q_1 r + x)}{x} + \frac{F_1(q_1 r - x) + F_2(q_1 r + x)}{x^2} + \frac{4T_{*1}}{3(1 - \frac{4}{3}\gamma^2)} x \ln x, \quad q_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{3}\gamma^2} \quad (4.7)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные функции своих аргументов. Напряжения найдутся по формулам

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 \left[ \left(1 - \frac{4}{3}\gamma^2\right) \frac{F_1'' + F_2''}{x} - 4T_{*1} \ln x + P_0 \right], \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2\tau_{*1} \quad (4.8)$$

Функции  $F_1$ ,  $F_2$  должны быть найдены из граничных условий, которыми могут быть условия на фронте разрушений, на полости, если вплоть до нее сдвиг протекает пластически, и условия на фронте разгрузки, разделяющем область, занятую разрушенным материалом, на часть, где сдвиг протекает пластически, и часть, где происходит упругая разгрузка по сдвигу. Такой фронт, вообще говоря, может возникнуть.

Рассмотрим условия на фронте разрушения. Для напряжений впереди и за фронтом соответственно будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_{r_1} &= \rho c_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \gamma^2\right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{2u_1}{r}\right) - \frac{4}{3} \tau_* - p_0 \\ \sigma_{r_2} &= \rho c_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \gamma^2\right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{2u_2}{r}\right) - \frac{4}{3} \tau_{*1} - p_0\end{aligned}\quad (4.9)$$

Используя условие непрерывности смещений и теорему количества движения, получим при помощи (4.9)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \rho_2 - \Delta \rho_1}{\rho} &= \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}}{\rho c_*^2} = \\ &= \frac{4}{3} (\tau_* - \tau_{*1}) (\rho c_*^2)^{-1} \left[ \left(1 - \frac{4}{3} \gamma^2\right) \left(\frac{c_0}{c_*}\right)^2 - 1 \right]^{-1}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Учитывая (4.4), из (4.10) заключаем, что при  $|c_*| < c_0 \sqrt{1 - 4/3 \gamma^2} \equiv c_2$  будет  $\Delta \rho_2 > \Delta \rho_1$ , т. е. фронт разрушений будет скачком уплотнения, а при  $|c_*| > c_2$  — скачком разрежения. Представляется естественным по физическим соображениям полагать, что второй случай невозможен, ибо при разрушении силы трения уменьшаются ( $\tau_* > \tau_{*1}$ ) и возникает возможность дополнительного сжатия. Если такого ограничения на скорость  $|c_*|$  не делать, то при возникновении предельного состояния  $\sigma_{r_1} - \sigma_{\theta_1} = -2\tau_*$  во внутренней точке  $x > 1$  построение решения в окрестности такой точки делается неединственным. В самом деле, впервые предельное состояние возникнет в точке, где  $|c_*| = \infty$  (точка минимума линии  $\tau = \tau(x)$ , определяемой соотношением  $\sigma_{r_1}(\tau, x) - \sigma_{\theta_1}(\tau, x) = -2\tau_*$ ), и можно допустить, что в окрестности этой точки упомянутая линия является действительным фронтом разрушений вплоть до точек, где  $|c_*| = c_0$ , либо нужно из этой точки строить две ветви фронта разрушений, удовлетворяющие условию  $|c_*| < c_2$  (см. аналогичное условие для случая разрушения с образованием трещин отрыва). Сделанное выше предположение предписывает выбор второй из этих возможностей. Если выбрать первый, то в силу того, что

$$\sigma_{\theta_1} - \sigma_{\theta_2} = \frac{2(\tau_* - \tau_{*1})}{(c_2/c_*)^2 - 1} \left[ \left(\frac{c_2}{c_*}\right)^2 - \frac{1}{3} \right]$$

при  $c_2 < |c_*| < \sqrt{3}c_2$  будет  $\sigma_{\theta_1} < \sigma_{\theta_2}$  и  $\sigma_{r_1} < \sigma_{r_2}$ , т. е. при разрушении будет происходить уменьшение плотности и обоих напряжений, что представляется маловероятным.

Рассмотрим еще уравнение энергии. Аналогично тому, как было сделано для случая разрушения с образованием трещин отрыва, получаем

$$C(T_2 - T_1) = \frac{2(\tau_* - \tau_{*1})}{3\gamma^2 \rho c_0^2} \left\{ 1 + \frac{4/3 \gamma^2}{1 - 4/3 \gamma^2} \left[ \left[ \left(1 - 4/3 \gamma^2\right) \left(\frac{c_0}{c_*}\right)^2 - 1 \right]^{-1} + 1 \right] \right\} \quad (4.11)$$

Условие возрастания энтропии, т. е. условие  $T_2 - T_1 > 0$  приводит в силу (4.4) к неравенствам

$$|c_*| < c_0 \sqrt{1 - \frac{4}{3} \gamma^2} = c_2, \quad |c_*| > c_0 \quad (4.12)$$

т. е. опять удивительным образом приводит к неравенствам, получающимся из математического требования эволюционности решения задачи.

Представляется, что это связано с тем, что, по-видимому, требование эволюционности решения уравнений механики сплошной среды может быть сформулировано в виде условия положительности изменения во времени некоторого квадратичного функционала, определенным образом связанного с видом уравнений, так что этот функционал оказывается монотонно растущей функцией от энтропии системы, вводимой при помощи независимых термодинамических соображений. Было бы интересно рассмотреть эти вопросы в общей математической постановке. Решение этой задачи позволило бы чисто математическим путем вводить для заданной системы уравнений в частных производных понятие энтропии, требование неубывания которой гарантировало бы однозначную разрешимость задач для уравнений в частных производных.

Возвращаясь к нашей задаче, заметим, что термодинамические ограничения не исключают возможности  $|c_*| > c_2$ , приводящей к разрежению при разрушении. Однако при решении задач, по-видимому, следует придерживаться выдвинутого выше ограничения  $|c_*| < c_2$ .

Допустим теперь, что за фронтом разрушений сдвиг всюду пластический. Условием этого является положительность выражения  $\Lambda$  из [2], сводящаяся в рассматриваемом случае ( $F(p) = \text{const}$ ) к условию

$$\begin{aligned} \Lambda &\equiv (\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{x} \right) = \\ &= 2\tau_{*1} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \gamma^2} \left[ \frac{F_1''' + F_2'''}{x} - 3 \left( \frac{F_1'' - F_2''}{x^2} + \frac{F_1' + F_2'}{x^3} \right) \right] \geq 0 \quad (4.13) \end{aligned}$$

При рассмотрении решения нужно следить за знаком  $\Lambda$ , и из точки, где впервые достигается соотношение  $\Lambda = 0$ , следует начать строить волну разгрузки, за которой сдвиг будет уже упругим.

Отметим, что в момент, когда фронт разгрузки догонит фронт разрушений, дальнейшего разрушения, вообще говоря, уже не будет происходить. В самом деле, так как скорость распространения возмущений в области разгрузки такая же, что и в неразрушенном материале, т. е. равна  $c_0$ , после догона фронт разрушений должен превратиться в характеристику, т. е. скорость его должна обратиться в  $c_0$ , так как в случае, когда скорости малых возмущений по обе стороны сильного разрыва одинаковы, скорость самого разрыва может быть равна только этой скорости возмущений. Но в этом случае величина  $\sigma_{r_1} - \sigma_{\theta_1}$  вдоль характеристики будет, вообще говоря, убывать, так что условие  $\sigma_{r_1} - \sigma_{\theta_1} = -2\tau_*$  не будет выполняться, и разрушение прекратится. Из сказанного следует, что, если происходит разрушение, то за фронтом разрушений сдвиг будет обязательно пластическим. Фронт разгрузки может возникнуть либо на полости, либо внутри разрушенной области, и уже потом догнать фронт разрушений и подавить его (правда, вдоль характеристики, исходящей из точки догона, будет распространяться сильный разрыв).

В силу того, что  $|c_*| < c_2 < c_0$ , фронт разрушений, возникающий на поверхности полости, будет излучать в неразрушенный материал упругую волну даже в том случае, когда разрушение начинается в начальный момент  $\tau = 0$  ( $p_{00} > p_0 + \gamma^{-2} \tau_*$ ). С течением времени либо возникшая за фронтом разрушений волна разгрузки догонит фронт разрушений и прекратит разрушение, либо этого не произойдет, но из-за па-

дения напряжений  $\sigma_{r_1}$  и  $\sigma_{\theta_1}$  наступит момент, когда точка  $\sigma_{r_1}, \sigma_{\theta_1}$  достигнет точки  $B$  (фиг. (1)) и в этот момент фронт разрушений раздвоится — вперед пойдет фронт, на котором будет происходить разрушение с образованием трещин отрыва, а за ним пойдет фронт вторичного разрушения с раздавливанием.

Процедура построения решения до этого момента времени вполне аналогична рассмотренной выше для случая разрушения с образованием радиальных трещин. Для продолжения решения за момент раздвоения фронта нужно рассмотреть асимптотическое поведение решения в окрестности точки раздвоения путем разложения решения в ряды около этой точки и определения типа возможных особенностей у искомых функций. После этого нужно снова применять описанную процедуру сведения задачи к последовательности задач Коши для обыкновенных уравнений. Соответствующие системы дифференциально-функциональных уравнений легко выписать, пользуясь приведенными выше формулами, этого, однако, делать здесь не будем. Построение решения для поздних стадий, когда фронты разрушений истощаются, также следует производить описанным выше для случая одного фронта разрушения с образованием радиальных трещин способом. Нужно только отметить, что для фронта раздавливания, после того как ее скорость обратится в нуль, возвратного движения не будет, и его нужно после этого момента рассматривать как контактный разрыв.

Если возникает волна разгрузки, то за ней уравнения движения будут определяться законом Гука, записанным в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_{r*} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u_*}{\partial r} + 2 \frac{u - u_*}{r} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u_*}{\partial r} \right) \\ \sigma_\theta &= \sigma_{\theta*} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u_*}{\partial r} + 2 \frac{u - u_*}{r} \right) + 2\mu \frac{u - u_*}{r}\end{aligned}\quad (4.14)$$

где  $\sigma_{r*}, \sigma_{\theta*}, \partial u_*/\partial r, u_*/r$  — значения напряжений и деформаций на фронте разгрузки, зависящие только от  $x$ .

Подстановка (4.14) в уравнение движения (2.2) сводит его к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{x^2} U + \varphi(x) \quad (4.15)$$

где  $\varphi(x)$  выражается через  $\sigma_{r*}, \sigma_{\theta*}, \partial u_*/\partial r, u_*$ . Общее решение этого уравнения легко выписать

$$U = \frac{\psi_1'(\tau - x) - \psi_2'(\tau + x)}{x} + \frac{\psi_1(\tau - x) + \psi_2(\tau + x)}{x^2} + U_0 \quad (4.16)$$

где  $\psi_1, \psi_2$  — произвольные функции, а  $U_0(x)$  — решение неоднородного уравнения (4.15), выражающееся через  $\varphi(x)$  квадратурой

$$U_0(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \xi^2 \left( \int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right) d\xi \quad (4.17)$$

При решении краевой задачи  $\sigma_{r*}, \sigma_{\theta*}, \partial u_*/\partial r$  и  $u_*$  выражаются через решение в области, где происходит пластический сдвиг, и через неизвестный закон движения фронта разгрузки  $x = x_*(\tau)$ . Поэтому в формулах для области разгрузки неопределенными являются  $\psi_1, \psi_2$  и  $x_*(\tau)$ . Для этих трех функций имеется три условия: условие разгрузки  $\Lambda = 0$  и два условия непрерывности  $\partial u / \partial r$  и  $u$ , обеспечивающие непрерывность напряжений и смещения при  $x = x_*(\tau)$ . Возникающая таким образом задача для  $\psi_1, \psi_2, x_*$  решается совместно с задачами для фронтов разрушения описанным выше способом сведения к последовательности задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для пористых материалов с небольшой прочностью условие пластичности следует брать в более общем виде

$$I_2 = [k(p - p_0) + b]^2 \quad (4.18)$$

В случае центральной симметрии оно сводится к соотношению

$$\sigma_\theta = \alpha\sigma_r + \beta \quad (4.19)$$

Рассмотренный выше случай породы с высокой прочностью соответствует  $\alpha = 1$ . Предельное значение  $\alpha$ , соответствующее упругому материалу (закону Гука), равно  $\alpha_e = 1 - 2\gamma^2$ , поэтому диапазон возможных значений  $\alpha$  определяется неравенствами

$$1 - 2\gamma^2 \equiv \alpha_e < \alpha \leq 1 \quad (4.20)$$

Подобно условию пластичности условие прочности в общем случае также будет записываться в виде

$$I_2 = \Phi(p - p_0) \quad (4.21)$$

который, в частности, может свестись (при не очень больших напряжениях для пористых пород) к виду (4.19). Экспериментальные данные о прочности ряда пород (известняки, сланцы, каррарский мрамор и др.), опубликованные недавно в работе [17], подтверждают сказанное, а также сделанное в п. 1 замечание о убывании функции  $\Phi(p - p_0)$  при росте  $p$  для прочных пористых пород.

Процедура построения решения для случая малопрочных пород представляет собой комбинацию методов настоящей работы и работы [11].

Отметим, что для непористых и не очень прочных материалов зависимость гидростатического давления от объемной деформации будет линейной и обратимой, поэтому на начальной стадии движения, пока скорость фронта разрушений соизмерима со скоростью звука, а смещения еще малы, задачу следует решать в лагранжевых координатах и лишь потом, когда эта скорость станет малой, так что всюду в разрушенной зоне можно пренебречь сжимаемостью [18], перейти к эйлеровым координатам и применить метод работы [11]. Для пористых материалов, обладающих значительной и не обратимой сжимаемостью метод работы [11] следует применять с самого начала.

Наконец, отличие от задачи работы [11] будет еще в том, что условие пластичности и условие прочности не совпадают, поэтому соотношение (4.21), описывающее процесс излучения упругой волны при разрушении, будет в данном случае отличным от того, что использовалось и для описания движения за ударной волной.

Надо отметить, что в случае непористых материалов, когда в условии пластичности  $\alpha \neq 1$ , и на начальной стадии нужно пользоваться лагранжевыми координатами, основное уравнение для  $U$ , к сожалению, не интегрируется в общем виде с двумя произвольными функциями. Для этого этапа можно положить  $\alpha = 1$  и получить решение с погрешностью в надежде, что начальный этап имеет небольшую продолжительность и погрешность не успеет накопиться.

Последнее замечание сделаем по следующему поводу. В работе [4] указывается, что при сравнительно небольших напряжениях, как показывает эксперимент, горные породы обнаруживают пластичность, не разрушаясь, так что в окрестности переднего фронта возмущений параметры волны затухают более интенсивно, чем это следует из решения задачи в предположении упругого поведения материала.

Асимптотическая теория из [4] показывает, что пластическая деформация локализована в узком слое, примыкающем к переднему фронту возмущений. В этом слое параметры движения резко возрастают до максимума, затем меняются плавно. Это

соответствует случаю, когда в условии пластичности  $\alpha \approx \alpha_e$ , так что фронт перехода в пластическое состояние расположен в непосредственной близости за головной характеристикой.

Волна разгрузки по деформации сдвига в этом случае также будет близко следовать за этой характеристикой, так как условие разгрузки  $\partial v / \partial r - v/r = 0$  будет выполнено вблизи точки, где  $\partial v / \partial r = 0$  (за этой точкой). Так как слой, в котором параметры резко возрастают, проходят максимум (т. е. в нем начинается разгрузка) очень тонок, то для построения решения в области за этим тонким слоем, протяженность которой много больше ширины слоя, можно пренебречь этой шириной и считать, что вдоль головной характеристики линейного уравнения (4.15) заданы распределения  $\sigma_{r*}$ ,  $\sigma_{\theta*}$  и  $du_*/dr$  как функции  $x$ . Эти распределения можно взять либо такими, какие получены в [4] асимптотическим анализом, либо из эксперимента.

Тогда функции  $\psi_2$  и  $U_0(x)$  в формуле (4.16) будут известны, и дальнейшее построение будет сводиться к тому, что в формулах для упругой волны в неразрушенном материале, которые фигурируют в задачах расчета фронтов разрушений и движения породы за ними, кроме прямой волны, излучаемой фронтом разрушений, будет участвовать и отраженная от волны разгрузки, совпадающей с головной характеристикой, волна, соответствующая функции  $\psi_2(\tau + x)$ . Возможно этого делать и не нужно, ибо реальность возникновения пластического течения в окрестности фронта в [4] не доказана, а есть лишь гипотеза, которая может не соответствовать действительности.

Не исключено, что наблюдающиеся в эксперименте эффекты, о которых говорится в [4], могут быть полностью объяснены в рамках схемы, принятой в настоящей статье.

Поступила 17 VII 1966

НИИ Механики  
Московского университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
2. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
3. Григорян С. С., Ляхов Г. М., Мельников В. В., Рыков Г. В. Взрывные волны в лессовидном грунте. ПМТФ, 1963, № 4.
4. Шемякин Е. И. О волнах напряжений в прочных породах. ПМТФ, 1963, № 5.
5. Григорян С. С. «О статье Ванягина И. Ф., Мыркина В. Г. «Некоторые результаты экспериментального исследования распространения волн напряжений в безграничных скальных породах» В кн. «Народнохозяйственное использование взрыва», 1960, № 16.
6. Ханукаев А. Н. Энергия волн напряжений при разрушении пород взрывом. М., Госгортехиздат, 1962.
7. Адушкин В. В., Сухотин А. П. О разрушении твердой среды взрывом. ПМТФ, 1961, № 4.
8. Корявов В. П. Некоторые представления в зоне и фронте трещин. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6.
9. Корявов В. П. О зоне и фронте трещин в упругом теле под действием давления. ПМТФ, 1965, № 6.
10. Родионов В. Н. К вопросу о повышении эффективности взрыва в твердой среде. М., Изд. Ин-та горного дела им. А. А. Скочинского, 1962.
11. Григорян С. С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
12. Григорян С. С. О некоторых специальных вопросах термодинамики сплошных сред. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2, М., Гостехтеоретиздат, 1953.
14. Кузнецов В. Д. Поверхностная энергия твердых тел., М., Гостехтеоретиздат, 1954.
15. Божинский А. И., Путилов В. В., Суворов Н. П. Справочник по физике М., Учпедгиз, 1951.
16. Polanyi M. Über die Natur des Zerreißvorganges. Zeits. f. Phys., 1921, 7.
17. Dauge M., Sirieys P.—M. Phénomènes de rupture fragile et de viscoélasticité des roches isotropes et anisotropes. C. R. Acad. Sci., Paris, 1964, T. 259, No. 5.
18. Григорян С. С. О некоторых упрощениях в описании движения мягких грунтов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.