Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

СИНХРОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ ОБЪЕКТОВ С НЕСУЩИМИ СВЯЗЯМИ

Р. Ф. Нагаев, К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

В рамках общей задачи о синхронизации динамических систем [1] рассматриваются синхронные движения почти консервативных объектов с одной степенью свободы, взаимодействующих посредством слабых связей первого и второго рода [2]. Предполагается, что элементы связей второго рода не имеют собственных степеней свободы, а колебания связей первого рода (несущей системы) сопровождаются существенным рассеянием энергии.

Определяются периодические решения ротационного типа системы с многомерной быстро вращающейся фазой достаточно общего вида. Получены необходимые и достаточные условия их устойчивости. Применительно к задаче о синхронизации разбирается вопрос о представимости этих условий через осредненные энергетические характеристики рассматриваемого движения. Показано, что одна из формулировок интегрального критерия устойчивости справедлива и при наличии в несущей системе гироскопических сил.

Первая группа условий устойчивости синхронных режимов в почти консервативной системе общего вида и вытекающие из нее формулировки интегрального критерия получены в [2]. Условия устойчивости второй группы в неавтономной системе без несущих связей найдены в работе [3], однако в разобранном там случае вследствие применимости интегрального критерия устойчивости указанные условия устойчивости для большинства практически интересных задач носят тривиальный характер.

1. Уравнения движения. Движение системы n динамических объектов, взаимодействующих посредством слабых связей первого и второго рода [2], будем описывать совокупностью n пар «собственных» [3] канонических переменных объектов q_i и p_i $(i = 1, \ldots, n)$ и вектором-столбцом $\mathbf{z}$, состоящим из m обобщенных координат $z_1, \ldots, z_m$, нужных для описания конфигурации несущей системы.

Уравнения движения в задачах о синхронизации со связями первого рода наиболее удобно составлять в форме уравнений Раусса. Общий кинетический потенциал Раусса системы может быть представлен в виде

$$L_R = R - \Pi = -\sum_{i=1}^{n} H_i + \mu L_0 + \mu^2 \ldots, \qquad L_0 = \Delta L + L^{(1)} + L^{(2)} \tag{1.1}$$

Здесь $\mu > 0$ — основной малый параметр задачи, характеризующий слабость взаимодействий между объектами, а величина

$$H_i = {}^1/_2\, a_i(q_i)\, p_i^2 + \Pi_i(q_i) \tag{1.2}$$

означает «собственную энергию» (парциальную функцию Гамильтона [2]) i-го объекта. Остальные величины, входящие в (1.1), представляют собой следующие энергетические характеристики системы, подсчитанные с точностью до членов порядка μ^2:

$$\mu\Delta L = \mu\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i'(q_1, \ldots, q_n)\,\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot} p_i - \mathbf{c}'(q_1, \ldots, q_n)\,\mathbf{u}\right]\left(\mathbf{u} = \frac{\mathbf{z}}{\mu}\right) \qquad (1.3)$$

есть добавочный кинетический потенциал объектов, обусловленный малыми колебаниями несущей системы (точка означает дифференцирование по времени; штрих означает транспонированный вектор, в данном случае — вектор-строку),

$$\mu L^{(1)} = \mu\left({}^1\!/_2\,(\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot})' M \mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot} - {}^1\!/_2\,\mathbf{u}' C \mathbf{u}\right) \qquad (1.4)$$

— кинетический потенциал несущей системы и, наконец,

$$\mu L^{(2)} = \mu\left[\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\, p_i p_j - \Pi^{(2)}(q_1, \ldots, q_n)\right] \qquad (1.5)$$

— кинетический потенциал элементов связей второго рода [2] (предполагается, что эти связи не имеют собственных степеней свободы).

Отметим, что в соответствии с общими представлениями о слабости взаимодействий в задачах о синхронизации [1,2] перемещения несущей системы считаются малыми величинами порядка μ. Остальные обозна чения соответствуют принятым в [2].

Относительно непотенциальных обобщенных сил, соответствующих принятым обобщенным координатам, примем следующие предположения. Будем считать, что силы, отвечающие собственным координатам объектов, малы и носят парциальный характер

$$Q_i^* = \mu Q_i(q_i, p_i) + \mu^2 \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.6)$$

Непотенциальные силы по координатам несущей системы, с точностью до членов порядка μ пропорциональные в силу исходных предположений о свойствах несущей системы [2] скоростям перемещений

$$Q(\mathbf{z}, \mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot}) = -B\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot} + \mu \ldots \qquad (Q(\mathbf{z}, 0) \equiv 0) \qquad (1.7)$$

считаем немалыми.

В (1.7) через B (равно как через M и C в (1.4)) обозначена некоторая квадратная $m \times m$-матрица с постоянными компонентами.

Предполагается также, что всегда выполняется неравенство

$$(\mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot})' Q(\mathbf{z}, \mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot}) \leqslant 0 \qquad (1.8)$$

и, следовательно, симметричной части B_c матрицы B отвечает положительная квадратичная форма

$$ {}^1\!/_2\,(\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot})' B_c \mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot} > 0 \qquad (1.9)$$

которую можно трактовать как диссипативную функцию.

Составляя уравнения движения системы в форме Раусса, получим

$$q_i^{\boldsymbol\cdot} - \frac{\partial H_i}{\partial p_i} = -\mu\frac{\partial}{\partial p_i}(\Delta L + L^{(2)}) + \mu^2 \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$p_i^{\boldsymbol\cdot} + \frac{\partial H_i}{\partial q_i} = \mu\left[Q_i(q_i, p_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\Delta L + L^{(2)})\right] + \mu^2 \ldots$$

$$M\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + B\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot} + C\mathbf{u} = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)\Delta L + \mu \ldots \qquad (1.10)$$

При $\mu = 0$ из системы (1.10) выделяется n автономных консервативных подсистем второго порядка, описывающих движение изолированных объектов без непотенциальных сил. Пусть каждая из этих подсистем в некоторой области G_i парциальной фазовой плоскости (цилиндра) допускает $2\pi / \omega_i$ -периодическое либрационное (ротационное) решение вида

$$q_i = x_i(\varphi_i, \omega_i), \quad p_i = y_i(\varphi_i, \omega_i) \tag{1.11}$$

где $\varphi_i = \omega_i t + \alpha_i$ — собственная быстро вращающаяся фаза, а ω_i — круговая частота, зависящая от начальных условий. Тогда, переходя в уравнениях (1.10) к новым переменным «фаза-частота» φ_i, ω_i $(i=1,\ldots, n)$, получим окончательно следующую специфическую систему:

$$\varphi_i^{\cdot} = \omega_i - \mu \frac{1}{k_i(\omega_i)}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega_i} Q_i + \frac{\partial L_0}{\partial \omega_i}\right) + \mu^2 \ldots$$

$$\omega_i^{\cdot} = \mu \frac{1}{k_i(\omega_i)}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} Q_i + \frac{\partial L_0}{\partial \varphi_i}\right) + \mu^2 \ldots \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$M\mathbf{u}^{\cdot\cdot} + B\mathbf{u}^{\cdot} + C\mathbf{u} = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)\Delta L + \mu \ldots \tag{1.12}$$

$$k_i(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i}\frac{dh_i(\omega_i)}{d\omega_i} = O(1), \quad h_i(\omega_i) = H_i(x_i, y_i)$$

Здесь $k_i(\omega_i)$ — коэффициент крутизны скелетной кривой i-го изолированного объекта.

Целью последующего рассмотрения является получение условий существования и устойчивости синхронных решений системы (1.12) или, что то же самое, системы (1.10), близких к некоторым синхронным решениям из семейства (1.11).

2. Синхронные решения в системе с многомерными быстрыми вращениями. Неавтономный случай. Несколько обобщая задачу, рассмотрим взаимодействие существенно нелинейных почти консервативных объектов, описываемых следующей системой с многомерной быстро вращающейся фазой:

$$\varphi_i^{\cdot} = \omega_i + \mu X_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}, \nu t) + \mu^2 \ldots$$

$$\omega_i^{\cdot} = \mu Y_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \mathbf{v}, \nu t) + \mu^2 \ldots \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = A\mathbf{v} + \mathbf{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \nu t) + \mu \ldots \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ — N-мерные векторы, A — квадратная $N \times N$-матрица с постоянными компонентами, функции X_i, Y_i $(i = 1,\ldots, n)$, $\mathbf{F}$ и т. д. предполагаются аналитическими в некоторой области G пространства своих аргументов и 2π-периодическими по каждой из переменных $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ и безразмерному времени $\tau = \nu t$; ν — частота внешнего возмущения.

Система (2.1) в некотором интервале $0 < \mu < \mu_0$ допускает аналитическое по параметру μ синхронное решение вида

$$\varphi_i = \tau + \alpha_i + \mu\ldots, \qquad \omega_i = \nu_i + \mu\ldots$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(\tau, \alpha_1,\ldots, \alpha_n, \nu_1, \nu_1,\ldots, \nu_n) + \mu\ldots \tag{2.2}$$

при условии, что величина $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ образует простое решение системы

$$\nu_1 = \ldots = \nu_n = \nu$$

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu, \nu_1, \ldots, \nu_n) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Y_i)\, d\tau = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2.3)$$

$$(Y_i) = Y_i(\tau + \alpha_1, \ldots, \tau + \alpha_n, \nu_1, \ldots, \nu_n, \mathbf{v}^{(0)}, \tau)$$

Здесь $\mathbf{v}^{(0)}$ есть 2π-периодическое по τ решение уравнения

$$\mathbf{v}^{(0)\cdot} = A\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{F}(\tau + \alpha_1, \ldots, \tau + \alpha_n, \nu_1, \ldots, \nu_n, \tau) \qquad (2.4)$$

При этом предполагается, что уравнение

$$\mathbf{v}^{\cdot} = A\mathbf{v} + \boldsymbol{\Phi}(t) \qquad (2.5)$$

при любой достаточно гладкой $2\pi / \nu$-периодической функции $\boldsymbol{\Phi}(t)$ в его правой части допускает единственное и устойчивое $2\pi / \nu$-периодическое решение $\mathbf{v}_{\Phi}(t)$ такое, что если $\max|\boldsymbol{\Phi}(t)| = O(1)$, то и $\max|\mathbf{v}_{\Phi}(t)| = O(1)$.

Переходя к исследованию устойчивости синхронных решений, определяемых в соответствии с (2.2), (2.3) и (2.4), выпишем отвечающие этим решениям уравнения в вариациях исходной системы (2.1)

$$\delta\varphi_i^{\cdot} = \delta\omega_i + \mu\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial X_i}{\partial \varphi_j}\right)\delta\varphi_j + \left(\frac{\partial X_i}{\partial \omega_j}\right)\delta\omega_j\right] + \left(\frac{\partial X_i}{\partial \mathbf{v}}\right)\delta\mathbf{v}\right\} + \mu^2\ldots$$

$$\delta\omega_i^{\cdot} = \mu\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varphi_j}\right)\delta\varphi_j + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega_j}\right)\delta\omega_j\right] + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{v}}\right)\delta\mathbf{v}\right\} + \mu^2\ldots$$

$$\delta\mathbf{v}^{\cdot} = A\delta\mathbf{v} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi_j}\right)\delta\varphi_j + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_j}\right)\delta\omega_j\Big] + \mu\ldots \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2.6)$$

Здесь и далее круглые скобки при производных означают, что они вычисляются для порождающего решения, получаемого из (2.2) при $\mu = 0$. Уравнения (2.6) составляют линейную систему с $2\pi / \nu$-периодическими коэффициентами, $2n$ характеристических показателей которой (они называются «критическими») при $\mu = 0$ обращаются в нуль. Устойчивость синхронных решений (2.2) в конечном счете определяется знаками вещественных частей критических показателей.

Ограничиваясь по этой причине в дальнейшем определением только критических характеристических показателей, исключим из системы (2.6) вариации координат несущей системы. Для этого ищем их в виде

$$\delta\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\xi}_i(t, \mu)\delta\varphi_i + \boldsymbol{\eta}_i(t, \mu)\delta\omega_i] \qquad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\eta}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — $2\pi / \nu$-периодические вектор-функции времени.

Подставляя (2.7) в последнее уравнение системы (2.6) и используя выражения для производных $\delta\varphi_i^{\cdot}$ и $\delta\omega_i^{\cdot}$, согласно первым $2n$ ее уравнениям, получим в результате для определения функций $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\eta}_i$ систему нелинейных уравнений, являющуюся матричным аналогом уравнения Рикатти. Периодическое решение этих уравнений периода $2\pi / \nu$ можно искать в виде рядов по степеням малого параметра

$$\xi_i = \xi_i^{(0)} + \mu\xi_i^{(1)} + \mu^2\ldots, \quad \eta_i = \eta_i^{(0)} + \mu\eta_i^{(1)} + \mu^2\ldots \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.8}$$

Функции $\xi_i^{(0)}$ и $\eta_i^{(0)}$ определяются при этом как $2\pi / \nu$-периодические решения уравнений

$$\xi_i^{(0)\cdot} = A\xi_i^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}\right), \quad \eta_i^{(0)\cdot} = A\eta_i^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega_i}\right) - \xi_i^{(0)} \tag{2.9}$$

Сравнивая (2.9) с (2.4), имеем

$$\xi_i^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial \alpha_i}, \qquad \eta_i^{(0)} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial \nu_i} + \zeta_i \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{2.10}$$

Здесь $2\pi/\nu$-периодические вектор-функции ζ_i удовлетворяют уравнениям

$$\zeta_i^{\cdot} = A\zeta_i - \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial \alpha_i} \tag{2.11}$$

и определяются следующим образом. Переходя в (2.4) к безразмерному времени τ и дифференцируя частным образом по явно входящей частоте ν, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial \nu}\right) = A\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial \nu}\right) - \frac{1}{\nu}\mathbf{v}^{(0)\cdot} \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.11) имеем

$$\zeta_i^{\cdot} = \nu\frac{\partial^2 \mathbf{v}^{(0)}(\tau)}{\partial \nu\, \partial \alpha_i} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{2.13}$$

После исключения вариаций координат несущей системы в соответствии с (2.7) приходим к системе $2n$ уравнений относительно $\delta\varphi_i$ и $\delta\omega_i$:

$$\delta\varphi_i^{\cdot} = \delta\omega_i + \mu\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial (X_i)}{\partial \alpha_j}\delta\varphi_j + \left[\frac{\partial (X_i)}{\partial \nu_j} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial \mathbf{v}}\right)\zeta_j\right]\delta\omega_j\right\} + \mu^2\ldots \tag{2.14}$$

$$\delta\omega_i^{\cdot} = \mu\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial (Y_i)}{\partial \alpha_j}\delta\varphi_j + \left[\frac{\partial (Y_i)}{\partial \nu_j} + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{v}}\right)\zeta_j\right]\delta\omega_j\right\} + \mu^2\ldots \quad (i=1,\ldots,n)$$

Очевидно, что характеристические показатели системы (2.14) — их всего $2n$ — равны критическим характеристическим показателям системы (2.6). Введем обычную подстановку

$$\delta\varphi_i = e^{\lambda t}\vartheta_i, \qquad \delta\omega_i = e^{\lambda t}\psi_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

Характеристический показатель, (см. [3]) представим в виде

$$\lambda = \lambda_1\mu^{1/2} + \lambda_2\mu + \lambda_3\mu^{3/2} + \mu^2\ldots \tag{2.15}$$

Тогда задача сведется к определению условий существования $2\pi / \nu$-периодического решения системы

$$\vartheta_i^{\cdot} = \psi_i - \mu^{1/2}\lambda_1\vartheta_i + \mu\left\{-\lambda_2\vartheta_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial (X_i)}{\partial \alpha_j}\vartheta_j + \left(\frac{\partial (X_i)}{\partial \nu_j} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial \mathbf{v}}\right)\zeta_j\right)\psi_j\right]\right\} - \mu^{3/2}\lambda_3\vartheta_i + \mu^2\ldots$$

$$\psi_i^{\cdot} = -\mu^{1/2}\lambda_1\psi_i + \mu\left\{-\lambda_2\psi_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial (Y_i)}{\partial \alpha_j}\vartheta_j + \left(\frac{\partial (Y_i)}{\partial \nu_j} + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{v}}\right)\zeta_j\right)\psi_j\right]\right\} - \mu^{3/2}\lambda_3\psi_i + \mu^2\ldots \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.16}$$

Решение системы (2.16), в свою очередь, будем искать в виде рядов

$$\vartheta_i = \vartheta_i^{(0)} + \mu^{1/2}\vartheta_i^{(1)} + \mu\vartheta_i^{(2)} + \mu^{3/2}\vartheta_i^{(3)} + \mu^2\ldots$$
$$\psi_i = \psi_i^{(0)} + \mu^{1/2}\psi_i^{(1)} + \mu\psi_i^{(2)} + \mu^{3/2}\psi_i^{(3)} + \mu^2\ldots \qquad (2.17)$$

Здесь $\vartheta_i^{(k)}$, $\psi_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ — $2\pi / \nu$-периодические функции времени.

В начале процесса построения последовательных приближений очевидным образом получаем

$$\vartheta_i^{(0)} = a_i, \quad \psi_i^{(0)} = 0, \quad \vartheta_i^{(1)} = b_i, \quad \psi_i^{(1)} = \lambda_1 a_i \quad (a_i, b_i = \mathrm{const}) \qquad (2.18)$$

Из условия периодичности второго приближения приходим к системе для определения величин a_i:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_j}{\partial \alpha_j} - \lambda_1^2\delta_{ij}\right)a_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2.19)$$

Первые приближения к характеристическим показателям являются, таким образом, корнями уравнения

$$\left|\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} - \lambda_1^2\delta_{ij}\right| = 0 \qquad (2.20)$$

Для существования периодического третьего приближения необходимо и достаточно, чтобы величины b_i удовлетворяли системе

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} - \lambda_1^2\delta_{ij}\right)b_j = \lambda_1\left\{2\lambda_2 a_i - \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \nu}\right)\zeta_j(\tau)\,d\tau\right]a_j\right\} \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \left(R_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(X_i)\,d\tau\right) \qquad (2.21)$$

Вторые приближения к характеристическим показателям определяются из условия разрешимости неоднородной системы (2.21) и имеют вид

$$\lambda_2 = \sum_{i,\, j=1}^{n}\left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \nu}\right)\zeta_j(\tau)\,d\tau\right]a_i^* a_j \qquad (2.22)$$

Здесь числа a_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ образуют решение системы, сопряжнной с системой (2.19)

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_j}{\partial \alpha_i} - \lambda_1^2\delta_{ij}\right)a_j^* = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2.23)$$

При этом предполагается, что все корни уравнения (2.20) простые и отличны от нуля, а соответствующие им собственные векторы a и a^* таковы, что может быть выполнено условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^* = 1 \qquad (2.24)$$

Синхронный режим в системе будет асимптотически устойчив, если для всех корней уравнения (2.20)

$$\lambda_1^2 < 0, \qquad \lambda_2 < 0$$

3. Автономный случай. Представимость условий устойчивости через функции P_i, R_i. Рассмотрим случай, когда внешнее одночастотное возмущение отсутствует и система (2.1) автономна. Тогда, очевидно, заранее неизвестная частота синхронного режима ν должна разыскиваться в процессе решения задачи в виде ряда

$$\nu = \nu_0 + \mu\nu_1 + \mu^2 + \ldots \tag{3.1}$$

Синхронное решение уравнений (2.1) при этом по-прежнему имеет вид (2.2), однако в порождающем приближении явно входящий в него параметр ν заменяется на ν_0. Точно такая же замена дожна быть произведена и в уравнениях для определения параметров порождающего решения (2.3). Отметим, что функции P_i в данном случае удовлетворяют соотношениям

$$P_i\,(\alpha_1 + \alpha, \ldots, \alpha_n + \alpha, \ldots) \equiv P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n^*, \ldots) \tag{3.2}$$

где α произвольно. Отсюда следует, что из системы (2.3) могут быть найдены, вообще говоря, лишь величина ν_0 и разности порождающих фазовых сдвигов.

Исследование устойчивости синхронного режима в рассматриваемом случае отличается только тем, что уравнение (2.20) относительно первых приближений к критическим характеристическим показателям имеет двойной нулевой корень. Соответственно, соотношения (2.22) позволяют определить (см. (2.21)) лишь $n - 1$ пар вторых приближений к характеристическим показателям, отвечающим ненулевым корням уравнения (2.20). Что же касается нулевых корней, то один из них соответствует точному нулевому характеристическому показателю полной системы в вариациях (2.6), другой же — нетривиальному показателю, разлагающемуся в ряд по целым степеням малого параметра. Вычислить этот показатель с точностью до величин порядка μ проще всего так.

Известно, что сумма характеристических показателей системы уравнений с периодическими коэффициентами равна среднему за период значению следа матрицы коэффициентов.

Вычисляя эту величину для системы (2.14), получим

$$\sum_{r=1}^{n} (\lambda_r^{(1)} + \lambda_r^{(2)}) = \mu \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_i} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathrm{v}}\right) \zeta_i\, d\tau\right] + \mu^2 \ldots \tag{3.3}$$

$$\lambda_r^{(1,2)} = \pm\lambda_{1r}\mu^{1/2} + \lambda_{2r}\mu \pm \mu^{3/2} \ldots \qquad (r = 1, \ldots, n-1)$$

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_{2n}\mu + \mu^2 \ldots, \lambda_n^{(2)} = 0$$

Здесь $\pm\lambda_{1r}$ — корни уравнения (2.20).

Отсюда следует, что искомый характеристический показатель с точностью до членов порядка μ определяется из соотношения

$$\lambda_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_i} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathrm{v}}\right) \zeta_i(\tau)\, d\tau\right] -$$

$$- \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i,\, j=1}^{n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathrm{v}}\right) \zeta_j(\tau)\, d\tau\right] a_{jr} a_{ir}^* \tag{3.4}$$

где a_r и a_r^*— нормированные в соответствии с (2.24) собственные векторы систем (2.19) и (2.23), отвечающие корням $\pm\lambda_{1r}$. Отметим, далее, что в силу условий ортогональности и нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{is}^* = \delta_{rs} \qquad (r, s = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

матрицы $A = \|a_{jr}\|$ и $A^* = \|a_{is}^*\|$ взаимно обратны. Поэтому величина $2\lambda_{2r}$ (см. (2.22)) ($r = 1,\ldots, n-1$) есть r-й диагональный элемент матрицы

$$A \left\| \frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{v}_j}\right) \zeta_j(\tau)\, d\tau \right\| A^{-1} \tag{3.6}$$

Так как преобразование подобия не меняет следа, то

$$\lambda_{2n} = \sum_{i, j=1}^{n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{v}}\right) \zeta_j(\tau)\, d\tau\right] a_{jn}a_{in}^* \tag{3.7}$$

Таким образом, несмотря на то, что выражения для вторых приближений к характеристическим показателям несколько изменились, необходимые и достаточные условия устойчивости остались прежними.

Здесь следует заметить, что в рассмотренном выше общем случае исследование устойчивости затрудняется необходимостью двукратного интегрирования согласно соотношениям (2.13) и (2.22). Можно, однако, указать важный частный случай, когда эти интегрирования легко выполняются.

Предположим, что в неавтономном случае вектор-функция $\mathbf{F}$ в последнем уравнении системы (2.1) представима в виде суммы

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{F}_i(\varphi_i, \omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad (\varphi_0 = \nu t) \tag{3.8}$$

а функции Y_i ($i = 1,\ldots, n$) линейны по координатам несущей системы

$$Y_i = Y_i^{(0)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \nu t) + \mathbf{Y}_i^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_n, \nu t)\,\mathbf{v} \tag{3.9}$$

Тогда колебания несущей системы представятся в виде суперпозиции

$$\mathbf{v}^{(0)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{v}_i^{(0)}(\tau + \alpha_i, \nu, \nu_1, \ldots, \nu_n) \qquad (\alpha_0 = 0) \tag{3.10}$$

Составляющие $\mathbf{v}_i^{(0)}$ определяются из уравнений

$$\mathbf{v}_i^{(0)\bullet} = A\mathbf{v}_i^{(0)} + \mathbf{F}_i(\tau + \alpha_i, \nu_1, \ldots, \nu_n) \tag{3.11}$$

Соответственно уравнения для определения параметров порождающего решения могут быть записаны в виде

$$P_i \equiv \sum_{j=0}^{n} P_{ij} + P_i^{(0)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.12}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Y_i^{(1)})\, \mathbf{v}_j^{(0)}\, d\tau \quad (j = 0, \ldots, n), \qquad P_i^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Y_i^{(0)})\, d\tau \tag{3.13}$$

Из (2.13) в данном случае имеем

$$\zeta_i = \frac{\partial \mathbf{v}_i^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \qquad (3.14)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{v}}\right) \zeta_j \, d\tau = \frac{\partial P_{ij}}{\partial \mathbf{v}} \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (3.15)$$

Окончательно условия устойчивости второй группы запишутся теперь в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{v}_j} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial \mathbf{v}}\right] a_{jr} a^*_{ir} < 0 \qquad (r = 1, \ldots, n) \qquad (3.16)$$

Эти же условия справедливы и в автономном случае.

4. Об осредненных энергетических характеристиках синхронных движений. Возвращаясь снова к рассмотрению синхронных движений объектов со слабыми несомыми и несущими связями, отметим, что система уравнений движения в переменных «фаза — частота» (1.12) при помощи неособенной замены только переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^{\cdot}$ всегда может быть приведена к виду (2.1). При этом уравнения движения объектов с точностью до членов порядка μ включительно по существу не изменятся.

Уравнения для порождающих параметров синхронного режима после интегрирования по частям, могут быть приведены к виду

$$P_i \equiv \frac{1}{k_i(\mathbf{v}_i)}\left[f_i(\mathbf{v}_i) + \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Delta\Lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \alpha_i} B\mathbf{u}\right) d\tau\right] = 0 \quad (4.1)$$

$$f_i(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} Q_i\right) d\tau \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (4.2)$$

— средняя за период мощность непотенциальных сил, отвечающих координатам i-го объекта, а величины

$$\Lambda^{(1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (L^{(1)})\, d\tau$$

$$\Lambda^{(2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (L^{(2)})\, d\tau \qquad (4.3)$$

$$\Delta\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Delta L)\, d\tau$$

равны интегралу действия несущих и несомых связей и добавочному интегралу действия объектов [2] соответственно.

Умножая, далее, уравнение движения несущих связей в порождающем приближении

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)(L^{(1)} + \Delta L) + B\mathbf{u}^{\cdot} = 0 \qquad (4.4)$$

скалярно на вектор-строку $\mathbf{u}'$ и осредняя результат за период синхронных движений, приходим к следующему скалярному тождеству:

$$2\Lambda^{(1)} + \Delta\Lambda = \Gamma, \qquad \Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathbf{u}'B_a\dot{\mathbf{u}})\, d\tau \tag{4.5}$$

Здесь Γ — вириал, отвечающий гироскопическим силам в несущей системе, а B_a — кососимметрическая часть матрицы B.

Пользуясь тождеством (4.5), можно выписать уравнения для определения порождающих параметров задачи в двух эквивалентных формах

$$P_i \equiv \frac{1}{k_i(\nu_i)}\left[f_i(\nu_i) + \frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\Lambda^{(2)} - \Lambda^{(1)}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\dot{\mathbf{u}}'B\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\alpha_i}\right)d\tau\right] = 0 \tag{4.6}$$

$$P_i \equiv \frac{1}{k_i(\nu_i)}\left[f_i(\nu_i) + \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\Lambda^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta\Lambda\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial\alpha_i}B_c\dot{\mathbf{u}}\right)d\tau\right] = 0 \tag{4.7}$$

Последнее слагаемое в соотношениях (4.7), в отличие от аналогичных слагаемых в (4.1) и (4.6), определяется лишь рассеянием энергии при колебаниях несущей системы. Указанные слагаемые эквивалентны только в случае, когда гироскопические силы в несущей системе отсутствуют и, следовательно, $\Gamma \equiv 0$. Вообще, наличие характерной зависимости

$$\Delta\Lambda + 2\ \Lambda^{(1)} \equiv 0 \tag{4.8}$$

есть общее свойство систем с чисто диссипативными несущими связями (с точностью до величин высшего порядка малости). Если же малые колебания насущей системы сопровождаются действием только гироскопических сил ($B_c = 0$), то уравнения (4.7) принимают вид

$$P_i \equiv \frac{1}{k_i(\nu_i)}\left[f_i(\nu_i) + \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\Lambda^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta\Lambda\right)\right] = 0 \tag{4.9}$$

Отсюда в случае, когда объекты одинаковы в том смысле, что

$$k_1(\nu) \equiv \ldots \equiv k_n(\nu) \equiv k(\nu), f_1(\nu) \equiv \ldots \equiv f_n(\nu) \equiv f(\nu) \tag{4.10}$$

нетрудно прийти к формулировке интегрального критерия устойчивости: устойчивому синхронному режиму в системе с чисто гироскопическими непотенциальными силами по координатам несущих связей отвечает экстремум (максимум при $k > 0$ и минимум при $k < 0$) величины $\Lambda^{(2)} + {}^1/_2\,\Delta\Lambda$ как функции фазовых сдвигов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Отметим, что при наличии гироскопических сил другие формулировки интегрального критерия устойчивости [2] ввиду невыполнения условия (4.8) несправедливы.

Приведем, наконец, уравнение баланса энергии в системе

$$\nu_0 \sum_{i=1}^{n} f_i(\nu_0) = 2\Phi, \qquad \Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\dot{u}'B_c\dot{u}\right)d\tau \tag{4.11}$$

которое легко получается суммированием уровнений (4.7). Здесь Φ — среднее за период значение диссипативной функции несущих связей.

Не останавливаясь на выписывании уравнения (2.20) для определения коэффициентов устойчивости λ_1 первой группы, отметим, что условия представимости условий устойчивости второй группы в рассматриваемой задаче сводятся к соотношениям

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(q_i), \qquad \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i(q_i) \tag{4.12}$$

При этом добавочный кинетический потенциал может быть представлен суперпозицией

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i, \qquad \Delta L_i = b_i'(q_i)\mathbf{u}^{\cdot} p_i - c_i'(q_i)\mathbf{u} \tag{4.13}$$

Величину ΔL_i естественно истолковать как добавочный кинетический потенциал i-го объекта, обусловленный колебаниями несущих связей. Малые колебания несущей системы представляются в виде суммы

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i(\tau + \alpha_i, \nu_0, \nu_i) \tag{4.14}$$

каждое слагаемое которой характеризует вклад, вносимый соответствующим объектом, и удовлетворяет уравнению

$$M\mathbf{u}_i^{\cdot\cdot} + B\mathbf{u}_i^{\cdot} + C\mathbf{u}_i = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)\Delta L_i \tag{4.15}$$

Введем еще добавочный кинетический потенциал i-го объекта, обусловленный движением j-го объекта в порождающем приближении

$$\Delta L_{ij} = b_i'(x_i)\mathbf{u}_j y_i - c_i'(x_i)\mathbf{u}_j \tag{4.16}$$

и его среднее значение за период синхронного движения

$$\Delta\Lambda_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu_0, \nu_i, \nu_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta L_{ij}\, d\tau \tag{4.17}$$

Кроме того, взаимодействие некоторых i-го и j-го объектов посредством несущих связей характеризуется величинами, связанными с диссипативными и гироскопическими силами

$$\Phi_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu_0, \nu_i, \nu_j) = \frac{\nu_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathbf{u}_i^{\cdot\prime} B_c \mathbf{u}_j^{\cdot}\, d\tau = \Phi_{ji}$$

$$\Gamma_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu_0, \nu_i, \nu_j) = \frac{\nu_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}_i' B_a \mathbf{u}_j^{\cdot}\, d\tau = \Gamma_{ji} \tag{4.18}$$

Очевидно, что

$$\Delta\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} \Delta\Lambda_{ij}, \quad \nu_0\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{ij}, \quad \nu_0\Gamma = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij} \tag{4.19}$$

Уравнения для определения порождающих параметров задачи примут теперь вид, аналогичный (3.12)

$$P_i \equiv \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{k_i(\nu_i)} P_{ij} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.20}$$

Здесь

$$P_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\Delta\Lambda_{ij}+\Delta\Lambda_{ji})-2\Phi_{ij}\quad(j=1,\ldots,n),\quad P_{i0}=f_i(\nu_i)+\frac{\partial\Lambda^{(2)}}{\partial\alpha_i}\tag{4.21}$$

Матрица $P=\|P_{ij}\|$ естественным образом разбивается на симметрическую P_c и антисимметрическую P_a части

$$P_a=\left\|\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\Delta\Lambda_{ij}+\Delta\Lambda_{ji})\right\|,\qquad P_c=-2\|\Phi_{ij}\|\tag{4.22}$$

Величины R_i (см. (2.21) в данном случае будут

$$R_i=-\frac{1}{k_i(\nu_i)}\left\{g_i(\nu_i)+\frac{\partial\Lambda^{(2)}}{\partial\nu_i}+\frac{\partial}{\partial\nu_i}\sum_{j=1}^{n}(P_{aij}+\Gamma_{ij})\right\}\tag{4.23}$$

$$g_i(\nu_i)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\omega_i}Q_i\right)d\tau\tag{4.24}$$

При записи условий устойчивости второй группы введем величины

$$b_{ir}=\frac{a_{ir}^*}{k_i(\nu_i)}\tag{4.25}$$

удовлетворяющие условиям ортогональности (см. (3.5)) с весом $k_i(\nu_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n}k_i(\nu_i)\,a_{ir}b_{is}=\delta_{rs}\tag{4.26}$$

В результате после некоторых преобразований из (3.16) получим условия устойчивости второй группы

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{df_i}{d\nu_0}a_{ir}+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{dP_{ij}}{d\nu_0}+\frac{\partial^2\Lambda^{(2)}}{\partial\alpha_i\,\partial\nu_j}-\frac{\partial^2\Lambda^{(2)}}{\partial\alpha_j\,\partial\nu_i}\right]a_{jr}\right\}b_{ir}<0\quad(r=1,\ldots,n)\tag{4.27}$$

$$\frac{df_i}{d\nu_0}=\left(\frac{df_i(\nu_i)}{d\nu_i}\right)_{\nu_i=\nu_0},\qquad\frac{dP_{ij}}{d\nu_0}=\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial\nu_i}+\frac{\partial P_{ij}}{\partial\nu_j}+\frac{\partial P_{ij}}{\partial\nu_0}\right)_{\nu_i=\nu_j=\nu_0}\tag{4.28}$$

В случае, когда в несущей системе отсутствуют диссипативные силы $P_c=0$, $a_{ir}=b_{ir}$ и эти условия примут вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{df_i}{d\nu_0}a_{ir}^2<0\qquad(r=1,\ldots,n)\tag{4.29}$$

Отсюда следует, что если все $df_i\,/\,d\nu_0<0$ и $k>0$ (см. (3.10)), то интегральный критерий дает полную систему необходимых и достаточных условий устойчивости синхронного режима.

Поступила 18 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
2. Нагаев Р. Ф. Общая задача о синхронизации в почти консервативной системе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
3. Нагаев Р. Ф. Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.