Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ АМОРТИЗАТОРОВ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

Рассмотрены некоторые задачи теории оптимальной амортизации. Показано, что они могут быть поставлены в форме вариационной задачи синтеза оптимальных систем. Описаны необходимое условие стационарности и необходимое условие сильного минимума функционала для вариационной задачи синтеза оптимальных амортизаторов и даны примеры расчета амортизаторов для систем с одной степенью свободы.

1. Уравнение амортизируемой массы с одной степенью свободы может быть записано в следующем виде [1]

$$x^{\cdot\cdot} + u(x, x^{\cdot}, t) = f(t) \tag{1.1}$$

Здесь x — обобщенная координата системы, $f(t)$ — заданное внешнее воздействие, $u(x, x^{\cdot}, t)$ — функция, отражающая характеристику амортизатора. На нее, обычно, накладывается ограничение

$$|u(x, x^{\cdot}, t)| \leqslant U_0 \tag{1.2}$$

Рассмотрим отрезок $[t_0, T]$, начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \qquad x^{\cdot}(t_0) = x^{\cdot}_0 \tag{1.3}$$

и функционал

$$J = \max|x(t)| \qquad (t \in [t_0, T]) \tag{1.4}$$

Задачу оптимальной амортизации можно сформулировать так: среди функций $x(t)$ и $u(x, x^{\cdot}, t)$, удовлетворяющих на отрезке $[t_0, T]$ уравнению (1.1) и неравенству (1.2), а на левом конце его — условиям (1.3), найти такие, которые сообщают минимум функционалу (1.4).

В связи с тем, что условием [1]

$$x^{\cdot}(t_i) = 0, \qquad t_i \in [t_0, T] \tag{1.5}$$

выделяются точки экстремума функции $x(t)$, вместо выражения (1.4) можно рассматривать функционал

$$J = x^2(t_i) \tag{1.6}$$

При этом описанная задача примет вид, являющийся частным случаем следующей общей задачи синтеза оптимальных систем с функционалом, зависящим от промежуточных значений координат [2].

Среди непрерывных вектор-функций $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ и кусочно-непрерывных вектор-функций $u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t)\}$, удовлетворяющих на отрезке $[t_0, T]$ дифференциальным уравнениям

$$g_s = x_s^{\cdot} - f_s(x, u, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

---

[1] Случай, когда $x^{\cdot}(t)=0$ на отрезке $[t_1, t_2]$ требует специального рассмотрения.

и конечным соотношениям

$$\Psi_k = \Psi_k(u,t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r < m) \tag{1.8}$$

а на концах и в промежуточных точках $t = t_i$ $(i = 1, \ldots, q - 1)$ этого отрезка — условиям (1.9)

$$\varphi_l = \varphi_l\,[x(t_0), t_0, x(t_1), t_1, \ldots, x(T), T] = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p \leqslant (q+1)(n+1) - 1)$$

найти такие, которые сообщают минимальное значение функционалу

$$J = g\,[x(t_0), t_0, x(t_1), t_1, \ldots, x(T), T] + \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)\,dt \tag{1.10}$$

Эта задача отличается от задачи построения оптимальных процессов тем, что должны быть найдены оптимальные законы $u\,(x, t)$, а не $u\,(t)$.

2. Необходимое условие стационарности функционала I имеет следующий вид [2]:

$$\Delta I = 0 \tag{2.1}$$

Здесь через ΔI обозначена полная вариация функционала I, представляемого соотношением

$$I = \varphi + \int_{t_0}^{T} \Big[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s - H\Big]\,dt \tag{2.2}$$

$$\varphi = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l, \qquad H = -f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda_s\,(x, t)$, $\mu_k\,(x, t)$, ρ_l — неопределенные множители Лагранжа. При вычислении вариации ΔI нужно учитывать зависимость функций $u_k\,(x, t)$, $\lambda_s\,(x, t)$, $\mu_k\,(x, t)$ от координат x_s. Тогда, например, полная вариация Δu_k управления $u_k\,(x, t)$ запишется в форме

$$\Delta u_k = \delta u_k + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\,\delta x_s$$

где через δu_k обозначена частная вариация функции u_k.

Если выполнить выкладки и рассуждения, характерные для вариационного исчисления [3], то получится развернутая форма условия стационарности. Она состоит:

из уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \lambda_s}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_\alpha} f_\alpha + \frac{\partial H}{\partial x_s} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

из соотношений

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

из концевых условий

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + (H)_{t_0} = 0, \qquad (\lambda_s)_{t_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_0)} = 0 \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial T} - (H)_T = 0, \qquad (\lambda_s)_T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(T)} = 0 \end{aligned} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

из условий Эрдманна — Вейерштрасса для точек $t = t^*$ разрыва непрерывности параметров управления $u_k(t)$

$$(H)_{t^*-0} - (H)_{t^*+0} = 0, \qquad (\lambda_s)_{t^*-0} - (\lambda_s)_{t^*+0} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \quad (2.7)$$

из условий Эрдманна — Вейерштрасса в точках $t = t_i$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} - (H)_{t_i-0} + (H)_{t_i+0} = 0, (\lambda_s)_{t_i-0} - (\lambda_s)_{t_i+0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_i)} = 0 \qquad (2.8)$$

$$(i = 1, \ldots, q-1;\ s = 1, \ldots, n)$$

При построении оптимальных функций $u_k(x, t)$ должны быть использованы еще уравнения (1.7) и (1.8), условия непрерывности координат

$$x_s(t^* - 0) - x_s(t^* + 0) = 0, \quad x_s(t_i - 0) - x_s(t_i + 0) = 0 \qquad (2.9)$$

$$(s = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, q-1)$$

и равенства (1.9). Для выполнения необходимого условия Вейерштрасса сильного минимума функционала J нужно удовлетворить условию стационарности и неравенству Вейерштрасса; последнее имеет вид:

$$H(x, u, \lambda, \mu, t) \geqslant H(x, U, \lambda, \mu, t) \qquad (2.10)$$

Здесь $u(x, t)$ — функции, сообщающие минимум функционалу J, а $U(x, t) \neq u(x, t)$ — любые допустимые функции.

Сравнение уравнений (2.4) с соответствующими уравнениями системы $\lambda_s^{\cdot} + \partial H / \partial x_s = 0$, используемыми при построении оптимальных процессов [2], показывает, что при решении задачи синтеза приходится иметь дело с уравнениями в частных производных, характеристиками которых являются кривые, удовлетворяющие уравнениям вариационной задачи построения оптимальных процессов.

В случае, когда функции f_s и φ_k не зависят явно от времени, управления u_k и множители λ_s и μ_k также ищутся в виде функций, не зависящих явно от времени. Тогда уравнения (2.4) заменяются следующими:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_\alpha} f_\alpha + \frac{\partial H}{\partial x_s} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (2.11)$$

Уравнения (2.4) или (2.11) могут быть использованы и при решении задач синтеза оптимальных систем, описываемых уравнениями с разрывными правыми частями, или систем с ограниченными координатами. В них должны быть изменены лишь соотношения (2.8). Соответствующие условия приведены в работах [4, 5].

3. Рассмотрим задачу об оптимальной амортизации массы с одной степенью свободы. Считаем, что в начальный момент $t = t_0 = 0$ к массе приложен мгновенный импульс. Тогда в уравнении (1.1) будем иметь $f = 0$, а начальные условия запишутся в форме $x(0) = 0$, $x^{\cdot}(0) = x_0^{\cdot}$. После введения обозначений $x_1 = x$, $x_2 = x^{\cdot}$ вместо (1.1) будем иметь

$$x_1^{\cdot} = x_2, \qquad x_2^{\cdot} = -u \qquad (3.1)$$

а начальные условия запишутся в форме

$$x_1(0) = 0, \qquad x_2(0) = x_{20} \qquad (x_{20}^{\cdot} = x_0^{\cdot}) \qquad (3.2)$$

К открытой области допустимых изменений управлений перейдем, построив соотношение

$$\psi = u^2 + v^2 - U_0^2 = 0 \tag{3.3}$$

В него входит дополнительный параметр v.

Задачу оптимальной амортизации рассмотрим в двух постановках. В первой из них функционал запишем в форме

$$J = x_1^2(T) \tag{3.4}$$

и будем требовать выполнения равенства

$$x_2(T) = 0 \tag{3.5}$$

Здесь ищется минимум экстремума функции $x_1(t)$ при $t \in [t_0, T]$ при условии, что на движение системы после достижения экстремума никаких ограничений не накладывается.

Вторая постановка базируется на функционале

$$J = x_1^2(t_1) \tag{3.6}$$

В ней требуется выполнение условий

$$x_2(t_1) = x_1(T) = x_2(T) = 0 \tag{3.7}$$

По окончании процесса система должна попасть в начало координат.

В обеих задачах функция H имеет вид

$$H = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 u + \mu\,[u^2 + v^2 - U_0^2]$$

Поэтому на основании (2.11) и (2.5) получатся следующие уравнения:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_2}u = 0, \qquad \frac{\partial\lambda_2}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x_2}u + \lambda_1 = 0 \tag{3.8}$$

$$-\lambda_2 + 2\mu u = 0, \qquad 2\mu v = 0 \tag{3.9}$$

Неравенство (2.10) запишется в форме $\lambda_2 u \leqslant \lambda_2 U$; на основании его

$$u(x_1, x_2) = -U_0 \operatorname{sign} \lambda_2(x_1, x_2) \tag{3.10}$$

Это соотношение должно выполняться в оптимальной системе. Следовательно, задача синтеза оптимального амортизатора сводится к построению множителя $\lambda_2 = \lambda_2(x_1, x_2)$. Переходя к его определению, составим функцию φ. В первой из описанных выше задач она имеет вид

$$\varphi = x_1^2(T) + \rho_1 x_1(t_0) + \rho_2[x_2(t_0) - x_{20}] + \rho_3 x_2(T) + \rho_4 t_0$$

и концевые условия запишутся следующим образом:

$$(\lambda_1)_{t_0} = \rho_1, \quad (\lambda_2)_{t_0} = \rho_2, \quad (\lambda_1)_T = -2x_1(T), \quad (\lambda_2)_T = -\rho_3$$

$$(H)_{t_0} = -\rho_4, \quad (H)_T = 0 \tag{3.11}$$

Условия (2.7) показывают, что λ_i и H непрерывны на отрезке $[t_0, T]$. При помощи первого и второго условий (3.11) находим, что вместо ρ_1 и ρ_2 можно разыскивать значения $(\lambda_1)_{t_0}$ и $(\lambda_2)_{t_0}$. Последнее из условий (3.11) дает $(H)_T = 0$. Учет того, что в задаче имеется первый интеграл $H = \text{const}$ приводит к важному равенству

$$H \equiv 0, \qquad t \in [t_0, T]$$

Если использовать еще условие (3.5), получим соотношение

$$(\lambda_2)_T = 0 \qquad (3.12)$$

Общее решение уравнений (3.8) при $u = \text{const}$ имеет вид [6] (3.13)

$$\lambda_1(x_1, x_2) = \Phi_1\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2u}\right), \qquad \lambda_2(x_1, x_2) = \Phi_2\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2u}\right) + \frac{x_2}{u}\,\Phi_1\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2u}\right)$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции. При определении их используем третье из условий (3.11) и равенство (3.12). Тогда будем иметь

$$\Phi_1 = -2\,x_1(T), \qquad \Phi_2 = 0$$

Следовательно, для функции λ_2 имеем

$$\lambda_2(x_1, x_2) = -2x_1(T)x_2 / u$$

Этой формулой и решается задача синтеза оптимального амортизатора.

При упрощении ее заметим, что на основании уравнений (3.1) можно установить справедливость равенства $\operatorname{sign} x_1(T) = \operatorname{sign} u$ при условии, что u непрерывна и имеет одно из значений $u = \pm U_0$. Но тогда $\operatorname{sign} \lambda_2 = -\operatorname{sign} x_2$, и синтезирующий закон представится простой формулой

$$u(x_1, x_2) = U_0 \operatorname{sign} x_2 \qquad (3.14)$$

Если считать, что в момент $t = T$ происходит отключение амортизатора, так что $u = 0$ при $t > T$, то при $t > T$ будем иметь $x_1 = x_1(T)$, $x_2 = 0$. Можно, конечно, подключить к системе вспомогательное демпфирующее устройство, возвращающее ее в начало координат $x_1 = x_2 = 0$.

Во второй из описанных выше задач считаем фиксированными оба конца кривых сравнения. Тогда функция φ будет иметь вид

$$\varphi = x_1^2(t_1) + \rho_1 x_2(t_1) + \rho_2 x_1(t_0) + \rho_3 x_2(t_0) + \rho_4 t_0 + {}_5 x_1(T) + \rho_6 x_2(T)$$

Следовательно, концевые условия запишутся в форме

$$(\lambda_1)_{t_0} = \rho_2, \quad (\lambda_2)_{t_0} = \rho_3, \quad (\lambda_1)_T = -\rho_5, \quad (\lambda_2)_T = -\rho_6, \quad (H)_{t_0} = -\rho_4 \qquad (3.15)$$

В точке разрыва параметра u выполняются равенства (2.7), а условия Эрдманна — Вейерштрасса при $t = t_1$ представляются равенствами

$$(\lambda_1)_{t_1-0} - (\lambda_1)_{t_1+0} + x_1(t_1) = 0, \quad (\lambda_2)_{t_1-0} - (\lambda_2)_{t_1+0} + \rho_1 = 0$$

$$(H)_{t_1-0} - (H)_{t_1+0} = 0 \qquad (3.16)$$

Анализ решений уравнений (3.1) показывает, что если при $t = t_1$ кусочно-постоянная функция $u(t)$ имеет разрыв непрерывности, то в этой точке $x_1(t)$ не будет иметь максимума. Однако, при $t = t_1$ на основании соотношений (3.7) и (3.16) будем иметь $(\lambda_2 u)_{t_1-0} = (\lambda_2 u)_{t_1+0}$. Следовательно, множитель λ_2 при $t = t_1$ непрерывен.

При построении синтезирующей функции следует использовать то, что изображающая точка в оптимальном режиме попадает в начало координат по кривой $2U_0 x_1 = x_2^2$ при $u = -U_0$ или по кривой $-2U_0 x_1 = x_2^2$ при $u = +U_0$. На этих кривых должно выполняться равенство $\lambda_2 = 0$.

Воспользовавшись теперь формулами (3.13) в случае, когда $u = U_0$ при $t \in [t_0, t^*]$, получим выражения

$$\lambda_2 = \Phi_1(\xi_1)\left[\frac{x_2}{U_0} + \frac{1}{\sqrt{U_0}}\sqrt{\xi_1}\right] - \frac{x_2}{U_0} \qquad (t \in [t_0, t_1]) \tag{3.17}$$

$$\lambda_2 = \Phi_1(\xi_1)\left[\frac{x_2}{U_0} + \frac{1}{\sqrt{U_0}}\sqrt{\xi_1}\right] \qquad (t \in [t_1, t^*]) \qquad \left(\xi_1 = x_1 + \frac{x_2^2}{2U_0}\right)$$

При этом должно выполняться неравенство $\Phi_1 < 0$. В случае, когда при $t \in [t_0, t^*]$ параметр u отрицателен, $u = -U_0$, эти равенства заменяются следующими соотношениями:

$$\lambda_2 = \Phi_1(\xi_2)\left[-\frac{x_2}{U_0} + \frac{1}{\sqrt{U_0}}\sqrt{\xi_2}\right] + \frac{x_2}{U_0} \qquad (t \in [t_0, t_1]) \tag{3.18}$$

$$\lambda_2 = \Phi_1(\xi_2)\left[-\frac{x_2}{U_0} + \frac{1}{\sqrt{U_0}}\sqrt{\xi_2}\right] \qquad (t \in [t_1, t^*])$$

$$(\xi_2 = x_1 - x_2^2/2U_0) \qquad (\Phi_1 > 0)$$

При упрощении построенных функций напомним, что $\lambda_2 < 0$, если он определяется формулами (3.17), и, наоборот, $\lambda_2 > 0$ в том случае, когда он вычисляется по формулам (3.18). Нетрудно видеть, что эти неравенства будут выполнены, если в первой из зависимостей (3.17) будет выполняться неравенство $x_2 > 0$, а в первом из выражений (3.18) — неравенство $x_2 < 0$. Эти рассуждения приводят к простому равенству

$$u = U_0 \operatorname{sign} x_2 \qquad (t \in [t_0, t_1)) \tag{3.19}$$

Аналогичным способом при $t \in (t_1, t^*)$ получается соотношение

$$u = U_0 \operatorname{sign}\,[x_1 + x_2^2 / 2U_0 \operatorname{sign} x_2] \tag{3.20}$$

Сложность, с которой приходится сталкиваться при использовании этих синтезирующих функций, состоит в том, что при этом нужно учитывать равенство $x_2(t_1) = 0$, определяющее переход от одной функции к другой. Однако нетрудно показать, что если параметр u при $t \in [t_0, t_1)$ находить при помощи соотношения (3.20), то его значения совпадут с величинами, определяемыми формулой (3.19). Поэтому в качестве синтезирующего закона может быть взята функция (3.20).

Интересно отметить, что равенством (3.20) определяется оптимальный закон в задаче о быстродействии. Сопоставление формул (3.19) и (3.14) показывает, что оптимальные управления до выполнения соотношения $x_1 = 0$ в обеих задачах совпадают; дальнейшее изменение управления во второй задаче происходит по закону оптимального быстродействия.

4. Рассмотрим систему с одной степенью свободы под действием длительного импульса. Пусть в уравнении (1.1) выполняется равенство

$$f(t) = F \quad (t \in [t_0, \tau)), \qquad f(t) = 0 \quad (t > \tau) \tag{4.1}$$

и U_0 удовлетворяет неравенству $U_0 < F$. Уравнение задачи (1.1) после введения обозначений $x = x_1$, $x^{\cdot} = x_2$ перепишется в виде

$$x_1^{\cdot} = x_2, \qquad x_2^{\cdot} = F - u(x_1, x_2), \quad x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = -u(x_1, x_2) \tag{4.2}$$

Правые части их имеют разрыв непрерывности в точке $t' = \tau$. Считаем левый конец кривых сравнения фиксированным (см. соотношения ((3.2)) и рассмотрим задачу минимизации функционала (3.4) при выполнении равенства (3.5). Составив функцию H, будем иметь

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 [F - u] + \mu [u^2 + v^2 - U_0^2] \quad (t \in [t_0 \tau))$$
$$H = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 u + \mu [u^2 + v^2 - U_0^2] \quad (t > \tau)$$

Уравнения задачи при $t \in [t_0, \tau)$ записываются в форме

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2} [F - u] = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} (F - u) + \lambda_1 = 0 \tag{4.3}$$
$$-\lambda_1 + 2\mu u = 0, \qquad 2\mu v = 0 \tag{4.4}$$

При $t > \tau$ соответствующие уравнения имеют вид (3.8), (3.9). Анализ неравенства Вейерштрасса и соотношений (3.9) и (4.4) показывает, что в оптимальном режиме должна выполняться зависимость (3.10). Граничные условия для функций λ_1 и λ_2 найдутся при помощи формул (2.16) статьи [4]. Если в них подставить функцию φ, представляемую равенством

$$\varphi = x_1^2 (T) + \rho_1 x_1 (t_0) + \rho_2 [x_2 (t_0) - x_{20}] + \rho_3 x_2 (T) + \rho_4 t_0$$

и функцию $\vartheta = t' - \tau$, то граничные условия запишутся в форме (3.11). Условия Эрдманна — Вейерштрасса в точке $t = \tau$ имеют вид

$$(\lambda_1)_{\tau-0} - (\lambda_1)_{\tau+0} = 0, \qquad (\lambda_2)_{\tau-0} - (\lambda_2)_{\tau+0} = 0, \qquad (H)_{\tau-0} - (H)_{\tau+0} + \nu = 0 \tag{4.5}$$

Здесь ν — множитель Лагранжа.

При $t > \tau$ множители λ_1 и λ_2 определяются так, как это сделано в предыдущем пункте. Множитель λ_2 дается выражением $\lambda_2 = -2x_1 (T)\, x_2 / u$.

Если теперь построить общее решение уравнений (4.3), то найдем выражения, получающиеся из формул (3.13) заменой u на $U_0 - F$. Тогда условие $(\lambda_2)_{\tau_i - 0} = (\lambda_2)_{\tau_i + 0}$ дает возможность построить решение второго уравнения (4.3) в следующей форме:

$$\lambda_2 (x_1, x_2) = 2 \frac{F - U_0}{U_0} x_1 (T)\, x_2$$

Поэтому синтезирующая функция на всем отрезке $[t_0, T]$ имеет вид

$$u (x_1, x_2) = U_0 \operatorname{sign} x_2$$

Этот результат получен при $F > 0$. Нетрудно показать, что он будет справедлив и в случае $F < 0$.

Поступила 5 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. Изд-во «Наука», 1966.
2. Троицкий В. А. Вариационная задача оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, стр. 1003—1011.
3. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. Изд-во иностр. лит., 1950.
4. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, стр. 233—246.
5. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 431—443.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2, Физматгиз, 1951.