Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О МЕТОДЕ ПУАНКАРЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ
СЛУЧАИ ВЫРОЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ

А. П. Проскуряков

(Москва)

Как известно, метод Пуанкаре предназначен для построения периодических решений нелинейных систем, дифференциальные уравнения которых содержат малый параметр. При этом предполагается, что обращение в нуль малого параметра не понижает порядка системы.

Метод был предложен Пуанкаре в начале 90-х годов прошлого столетия для решения задач небесной механики [1, 2]. В дальнейшем метод нашел применение не только в небесной механике, но и в ряде вопросов общей механики, электротехники и физики.

В настоящее время метод Пуанкаре является одним из основных методов исследования нелинейных колебаний. Сначала метод применялся главным образом только к квазилинейным системам. С течением времени он был распространен и на другие виды нелинейных систем. При этом сам метод постепенно совершенствовался.

Основная идея метода Пуанкаре заключается в специальном подборе начальных условий для рассматриваемой системы уравнений. Выбор этих начальных данных подчиняется требованию выполнения условий периодичности решений. В дальнейшем под методом Пуанкаре будем понимать метод построения периодических решений, опирающийся на основную идею Пуанкаре о подборе начальных условий.

Существует многочисленная литература по методу Пуанкаре. Упомянем только книги: А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [3], Б. В. Булгакова [4], И. Г. Малкина [5,6] по нелинейным колебаниям. Книга Г. Н. Дубошина [7] по небесной механике содержит изложение метода, наиболее близкое к его первоначальной редакции. Из иностранной литературы укажем на книгу Минорского [8].

Следует отметить, что при разработке метода Пуанкаре не было обращено внимание на некоторые обстоятельства, которые приводили к трактовке системы как вырожденной [1]. Однако иногда это были случаи фиктивного вырождения, которое можно устранить. В этих случаях доказательство основных теорем существования решений значительно усложнялось, а само построение периодических решений также наталкивалось на трудности.

В данной статье предлагается несколько измененная обработка основной идеи Пуанкаре, учитывающая все обстоятельства, которые могут привести к фиктивному вырождению системы. Это позволяет избежать случаев фиктивного вырождения и приводит к существенному упрощению метода. В дальнейшем, при изложении метода приводятся ссылки на работы, иллюстрирующие применение упрощенного метода в различных случаях.

Рассмотрим сначала неавтономную нелинейную систему, составленную из n уравнений первого порядка

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

[1] Под вырожденной системой в данной статье будем понимать систему, у которой обращается в нуль функциональный определитель вспомогательных уравнений, полученных из условий периодичности, по отношению к добавкам к начальным данным порождающего решения. См. ниже формулу (18).

Пусть X_s — аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n$ и μ в некоторой области изменения $x_1, \ldots, x_n$ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$ и, кроме того, непрерывные периодические функции t с периодом, равным 2π.

При $\mu = 0$ система (1) обращается в так называемую порождающую систему. Пусть общее решение порождающей системы равно $x_{s0}(t)$. Обозначим начальные значения порождающего решения через h_s

$$x_{s0}(0) = h_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

В тех случаях, когда какое-либо уравнение порождающей системы содержит в правой части в качестве слагаемого функцию, зависящую только от t, начальные условия удобнее представить в несколько ином виде (см., например, [9])

$$x_{s0}(0) = a_s + h_s \tag{3}$$

Здесь a_s — известные величины, а h_s будем рассматривать как параметры, подлежащие определению. Эти параметры в общем случае будут не совпадать с произвольными постоянными интегрирования, но число их равно числу последних. Поэтому постоянные интегрирования можно определить, зная параметры h_s.

Возможны два случая. В первом случае общее решение порождающей системы является периодическим. Такое решение представляет собой семейство решений, зависящих от n параметров h_s.

Во втором случае общее решение порождающей системы является непериодическим. Будем предполагать, что в этом случае из общего непериодического решения можно выделить одно или несколько семейств периодических решений, зависящих от $m \, (m < n)$ параметров h_s, или же одно или несколько изолированных периодических решений.

Очевидно, что целью метода Пуанкаре является построение всех периодических решений системы (1), которые при $\mu = 0$ переходят в периодические решения порождающей системы.

Поэтому при выделении из общего решения порождающей системы периодических решений важно, чтобы они включали в себе все возможные периодические решения данного периода.

Таким образом, часть параметров, а в случае изолированных решений все параметры h_s могут быть определены из условий периодичности порождающего решения.

В общем случае начальные условия для системы (1) принимаются в следующем виде:

$$x_s(0) = a_s + h_s + \beta_s \tag{4}$$

где β_s — малые добавки, зависящие от μ и обращающиеся в нуль при $\mu = 0$. Согласно основной идее Пуанкаре подбором величин h_s и β_s осуществляется построение периодических решений системы.

Следует подчеркнуть, что параметры h_s и β_s входят в начальные условия всегда в виде сумм $h_s + \beta_s$. Как указывалось выше, некоторые параметры h_s, а для изолированных решений порождающей системы все эти параметры могут быть определены заранее. Однако в дальнейшем будем рассматривать все параметры h_s как неизвестные.

Указанное свойство параметров h_s и β_s ранее не использовалось [1]. В работах Пуанкаре и других авторов, которые впоследствии разрабатывали или просто применяли метод Пуанкаре, параметры h_s не связаны с параметрами β_s.

Заметим, что в некоторых задачах только для первых k функций $x_s(t)$ начальные условия являются независимыми, а для остальных $n-k$ функций $x_s(t)$ их начальные условия зависят от начальных условий предшествующих функций и от параметра μ, т. е.

$$x_s(0) = a_s + \varphi_{s-k}(h_1+\beta_1, \ldots, h_k+\beta_k, \mu) \qquad (s = k+1, \ldots, n) \qquad (5)$$

Здесь φ_{s-k} — аналитические функции от своих аргументов, уничтожающиеся при $\mu = 0$. Число k может равняться в различных задачах от 1 до n. Такой случай был впервые рассмотрен И. Г. Малкиным [5,6] при построении периодических решений квазилинейных неавтономных систем, описываемых уравнениями первого порядка, когда не все собственные частоты порождающей системы равнялись нулю или целым числам. Для аналогичных систем, составленных из уравнений второго порядка, этот случай рассмотрен в работе [12]. В автономных квазилинейных системах такой случай встречается, когда не все собственные частоты соизмеримы между собой [13].

Из отмеченного выше свойства параметров h_s и β_s вытекают важные следствия. Поскольку система (1) аналитическая, то решение этой системы будет представлено аналитическими функциями от независимых начальных условий и малого параметра μ. Запишем это решение в следующем виде:

$$x_s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{sm}(t, h_1+\beta_1, \ldots, h_k+\beta_k)\,\mu^m \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (6)$$

Заметим, что функции $C_{s0}(t)$ при $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$ переходят в функции $x_{s0}(t)$. Кроме того, при $t = 0$ имеем

$$C_{s0}(0) = a_s + h_s + \beta_s, \qquad C_{sm}(0) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

Условия периодичности решения системы (1) можно представить так:

$$\psi_s(h_1+\beta_1, \ldots, h_k+\beta_k, \mu) = x_s(2\pi) - x_s(0) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (8)$$

Функции ψ_s являются аналитическими функциями от своих аргументов. Из первых k условий периодичности можно найти параметры h_s и β_s. Остальные $n-k$ условий служат для определения начальных функций φ_{s-k} при $s = k+1, \ldots, n$. Таким образом, построение перио-

---

[1] Это свойство было впервые использовано в работах автора по квазилинейным системам, а затем в работах Копнина Ю. М. по системам, близким к произвольным [10,11].

дических решений системы (1) по методу Пуанкаре сводится к нахождению k параметров h_s и k функций $\beta_s(\mu)$ из уравнений

$$\psi_s(h_1+\beta_1, \ldots, h_k+\beta_k, \mu) = 0 \qquad (s=1, \ldots, k) \tag{9}$$

Некоторые функции ψ_s могут иметь вид $\psi_s = \mu\psi_s^*$, т. е. содержать в качестве множителя параметр μ. Соответствующие условия периодичности распадаются на два условия

$$\mu = 0, \qquad \psi_s^* = 0$$

Первое условие означает, что функция $x_{s0}(t)$ — периодическая для всех значений параметров h_s.

Второе условие можно представить в следующем виде:

$$\psi_s^* = \sum_{m=1}^{\infty} C_{sm}(2\pi, h_1+\beta_1, \ldots, h_k+\beta_k)\,\mu^{m-1} = 0 \tag{10}$$

Сократим (когда это возможно) соотношения, представляющие исходные условия периодичности, на μ и, отбросив значок $*$, оставим прежние обозначения для функций ψ_s.

Так как функции $\beta_s(\mu)$ обладают свойством $\beta_s(0) = 0$, то параметры h_s должны удовлетворять уравнениям

$$\psi_s(h_1, \ldots, h_k, 0) = 0 \qquad (s=1, \ldots, k) \tag{11}$$

Рассмотрим подробнее левые части этих уравнений. Возможны два случая. В первом случае соответствующая функция $x_{s0}(t)$ является периодической при любых h_s. Тогда [9]

$$\psi_s(h_1, \ldots, h_k, 0) = C_{s1}(2\pi, h_1, \ldots, h_k) \tag{12}$$

Во втором случае функция $x_{s0}(t)$ — непериодическая [14] и, следовательно,

$$\psi_s(h_1, \ldots, h_k, 0) = x_{s0}(2\pi, h_1, \ldots, h_k) - (a_s + h_s) \tag{13}$$

Некоторые из уравнений (11) могут обратиться в тождество [6,15]. Это возможно только в первом случае, когда левая часть уравнения определяется формулой (12). Но тогда величины $C_{s1}(2\pi, h_1+\beta_1, \ldots, h_k+\beta_k)$ также будут тождественно равны нулю. Сократим соответствующие уравнения (9) еще раз на μ и опять подставим в них $\beta_1 = \ldots = \beta_k = \mu = 0$. Получим

$$\psi_s(h_1, \ldots, h_k, 0) = C_{s2}(2\pi, h_1, \ldots, h_k) \tag{14}$$

Этими уравнениями заменим те, которые обратились в тождество. Если какое-либо уравнение вида (14) опять обращается в тождество, то указанное преобразование необходимо повторить еще раз и т. д. В случае, когда на основании каких-нибудь соображений известно, что из данного условия периодичности невозможно получить уравнение для параметров $h_1, \ldots, h_k$, тогда одна из сумм $h_s + \beta_s$ останется неопределенной. Такой случай представится, например, когда система (1) обладает аналитическим первым интегралом [2,16].

Иногда не все корни можно получить из данной системы уравнений (11). В этом случае некоторые уравнения приходится заменить на другие, полученные из комбинаций условий периодичности. Подобный случай рассмотрен на одном примере квазилинейной неавтономной системы с одной степенью свободы [17].

Уравнения (11) позволяют найти параметры h_s, являющиеся начальными амплитудами порождающего решения или некоторой его части, которая для квазилинейных систем соответствует его собственным колебаниям. Для краткости будем называть эти уравнения амплитудными уравнениями. Пусть амплитудные уравнения имеют одно или несколько решений, среди которых могут быть и кратные

$$h_1 = h_1^*, \ldots, h_k = h_k^* \tag{15}$$

Подставим какое-нибудь из этих решений в условия (9). Получим

$$\psi_s(h_1^* + \beta_1, \ldots, h_k^* + \beta_k, \mu) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{16}$$

Левые части этих уравнений обращаются в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_k = \mu = 0$. Таким образом, задача свелась к задаче теории неявных функций: из системы уравнений (16) определить величины β_s в функции параметра μ при условии $\beta_s(0) = 0$.

Составим функциональный определитель этой системы. При $\mu \neq 0$ имеем очевидное равенство

$$\partial\psi_s / \partial\beta_r = \partial\psi_s / \partial h_r \qquad (s, r = 1, \ldots, k) \tag{17}$$

При $\beta_1 = \ldots = \beta_k = \mu = 0$ производные $\partial\psi_s/\partial h_r$ должны вычисляться для $h_r = h_r^*$. Следовательно, искомый функциональный определитель

$$\Delta = \left|\begin{matrix} \partial\psi_1 / \partial h_1 \ldots \partial\psi_1 / \partial h_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \partial\psi_k / \partial h_1 \ldots \partial\psi_k / \partial h_k \end{matrix}\right|_{\beta_r=\mu=0,\ h_r=h_r^*} \tag{18}$$

Если для какого-либо решения системы уравнений (11) определитель Δ не равен нулю, то решение является простым. Как известно, такому решению отвечает единственное аналитическое решение системы (16)

$$\beta_s = \sum_{m=1}^{\infty} b_{sm}\mu^m \tag{19}$$

которое удовлетворяет условиям $\beta_s(0) = 0$.

Равенство нулю определителя Δ означает, что соответствующее решение уравнений (11) является кратным. Если матрица элементов, входящих в определитель (18), имеет ранг, равный $k - 1$, то из уравнений (16) можно исключить $k - 1$ величин $h_s^* + \beta_s$. Получим уравнение

$$\Phi(h_r^* + \beta_r, \mu) = 0 \tag{20}$$

где индекс r равен одному из чисел: $1, \ldots, k$.

Задача сведена к определению величины β_r как неявной функции малого параметра μ.

Решение этой задачи опирается на теорию алгебраических функций Пюизе и теорему Вейерштрасса. Различные ветви $\beta_r(\mu)$ представляются рядами по целым или дробным степеням μ. Количество таких ветвей и возможный вид их разложений по параметру μ определяются кратностью решений системы амплитудных уравнений. Кратность решений, в свою очередь, связана с порядком первой, не обращающейся в нуль производной $\partial^n\Phi/\partial\beta_r^n$. Найдя параметр β_r, нетрудно определить и остальные.

Этот способ удобен, если число уравнений (16) невелико. Способ продемонстрирован на примере квазилинейной неавтономной системы с одной степенью свободы, когда имеется два таких уравнения [9]. Подробный анализ самого уравнения (20) дан для случая двукратных и трехкратных корней амплитудного уравнения квазилинейной автомной системы [18].

Общий способ определения величин β_s как неявных функций от μ в случаях, когда ранг упомянутой выше матрицы меньше $k-1$ или когда ранг матрицы равен $k-1$, но число уравнений велико, рассмотрен Мак-Милланом [19, 20].

Для выяснения вида степенных рядов, в которые разлагаются величины β_s, а также для определения показателей у первых членов этих рядов производится преобразование системы трансцендентных уравнений (16). Эта система приводится к эквивалентной системе алгебраических уравнений, левые части которых являются конечными суммами однородных полиномов относительно β_s. К полученной эквивалентной системе применяется способ многоугольника Ньютона.

В частных случаях, когда все элементы функционального определителя обращаются в нуль, возможны особые приемы определения величин β_s [14].

Зная разложения всех величин β_s в ряды по целым или дробным степеням параметра μ, нетрудно получить окончательные разложения функций $x_s(t)$ в ряды по малому параметру μ. Очевидно, что вид этих рядов будет зависеть от вида разложений $\beta_s(\mu)$. Для нескольких первых коэффициентов таких рядов могут быть получены общие формулы. Можно также находить эти коэффициенты путем последовательного интегрирования дифференциальных уравнений, составленных для этих коэффициентов.

Пуанкаре [2] указал на некоторые особые случаи. Во-первых, когда система (1) имеет, помимо периодических решений с периодом 2π, также периодические решения с периодом $2\pi m$, где m — целое число (субгармонические колебания). Во-вторых, когда система (1) имеет один или несколько аналитических первых интегралов. В последнем случае периодические решения системы будут зависеть от одной или нескольких произвольных величин $h_s + \beta_s$ по числу первых интегралов.

Рассмотрим теперь автономную нелинейную систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

Допущения относительно функций X_s оставим такими же, как и для неавтономной системы. Начальные условия порождающей системы будем определять по формуле (3).

Метод Пуанкаре в данном случае будет иметь некоторые специфические черты в силу особенностей автономных систем. Первая особенность: автономная система не меняет вида, если время t заменить на $t + h_0$, где h_0 — произвольная величина. Следовательно, решение системы (21) зависит от h_0. Для определения величины h_0 можно использовать одно из начальных условий. Поэтому одну из сумм $h_s + \beta_s$ можно выбрать произвольно. Считая, так же как и в неавтономном случае, что число независимых начальных условий равно k, положим, например

$$h_k = 0, \qquad \beta_k = 0 \tag{22}$$

Вторая особенность: период T решения автономной системы не является заданной величиной, а зависит от параметра μ и начальных условий. Следовательно, условия периодичности для автономных систем будут

$$\psi_s(T, h_1 + \beta_1, \ldots, h_{k-1} + \beta_{k-1}, \mu) = x_s(T) - x_s(0) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

Здесь ψ_s — аналитические функции от своих аргументов. Из первых k условий находятся $k-1$ сумм $h_s + \beta_s$ и период T, а из остальных $n-k$ условий можно определить начальные функции φ_{s-k}.

При $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = \mu = 0$ имеем k уравнений для определения периода порождающего решения T_0 и параметров $h_1, \ldots, h_{k-1}$

$$\psi_s(T_0, \; h_1, \ldots, \; h_{k-1}, \; 0) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{24}$$

Чтобы привести задачу к такому же виду, как и в неавтономном случае, исключим период T из первых k условий периодичности (23). Для этого вычислим производную от ψ_s по T при $\mu = 0$. Учитывая свойство последних $n-k$ начальных условий, а также равенства (22), получим

$$(\partial\psi_s / \partial T)_0 = \dot{x}_{s0}(T_0) = \dot{x}_{s0}(0) = X_{s0}^*(h_1, \ldots, h_{k-1})$$

Функции X_{s0}^* не могут обратиться в нуль, так как в этом случае параметры $h_1, \ldots, h_{k-1}$, были бы связаны дополнительными соотношениями, противоречащими системе уравнений (24). Следовательно, из k первых условий периодичности всегда можно определить период T в виде аналитической функции от независимых начальных условий и параметра μ. Используя для этого k-е условие периодичности, получим

$$T = T(h_1 + \beta_1, \ldots, \; h_{k-1} + \beta_{k-1}, \; \mu) \tag{25}$$

Подставим величину T в остальные $k-1$ условий. Имеем

$$\Psi_s(h_1 + \beta_1, \ldots, h_{k-1} + \beta_{k-1}, \mu) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k-1) \tag{26}$$

где Ψ_s — также аналитические функции от своих аргументов.

Дальнейший ход решения такой же, как и у неавтономных систем. Только число уравнений и число неизвестных будет на единицу меньше, а производные от Ψ_s по h_r и β_r должны вычисляться как от сложных функций [10]. Например

$$\frac{\partial\Psi_s}{\partial h_r} = \frac{\partial\psi_s}{\partial h_r} + \frac{\partial\psi_s}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial h_r} \qquad (s, r = 1, \ldots, k-1) \tag{27}$$

Период автономной системы может быть представлен в виде суммы

$$T = T_0 + \alpha \tag{28}$$

Здесь $T_0 = T_0(h_1, \ldots, h_{k-1})$ — период порождающего решения, а добавок α обращается в нуль при $\mu = 0$. Для квазилинейных систем T_0 не зависит от начальных условий. Способ исключения параметра α для таких систем дан, например, в работе [18].

При наличии аналитических первых интегралов у автономной системы, не зависящих от времени [2], периодические решения, так же как и в неавтономном случае, будут зависеть от соответствующего числа произвольных величин $h_s + \beta_s$. Существование хотя бы одного первого интеграла дает возможность построить периодическое решение с заданным периодом.

При разложении в ряд решения по целым или дробным степеням параметра μ необходимо предварительно заменить время t на другое переменное, так как период T по времени t зависит от μ. Это преобразование производится таким образом, чтобы период сделался не зависящим от μ и равным периоду порождающего решения. После этого решение представляется в виде рядов по целым или дробным степеням параметра μ с коэффициентами, имеющими не зависящий от μ период [5,18].

Подводя итоги изложенному, необходимо отметить, что фиктивное вырождение системы (обращение в нуль определителя Δ) может происходить по следующим причинам: 1) неучет связанности параметров h_s и β_s; 2) существование зависимости начальных данных у различных уравнений; 3) наличие параметра μ в качестве множителя в каком-либо условии периодичности; 4) существование особых случаев амплитудных уравнений. Если устранить все эти причины, то система действительно вырождается только в двух случаях: во-первых, когда амплитудные уравнения имеют кратные решения, а во-вторых, когда у системы имеются первые интегралы.

Метод Пуанкаре можно также интерпретировать как метод, устанавливающий продолжимость периодических решений порождающей системы на исходную систему. Как выше указано, решения порождающей системы могут быть или изолированными, или же могут образовывать семейство решений, зависящее от нескольких параметров. Однако, если у исходной системы не существует первых интегралов и если амплитудные уравнения имеют конечное число решений, то только конечное число периодических решений порождающей системы может перейти в периодические решения исходной системы. С другой стороны, некоторым периодическим решениям порождающей системы может соответствовать более чем одно решение исходной системы. Основной задачей метода Пуанкаре является определение тех значений параметров h_s, которые устанавливают взаимное соответствие периодических решений порождающей и исходной систем, переходящих одно в другое. При этом кратное решение амплитудных уравнений считается за несколько решений, число которых равно порядку кратности.

Вопрос о сходимости рядов, представляющих периодические решения, разработан пока еще недостаточно. Доказаны теоремы о сходимости этих рядов для неавтономных систем общего вида при достаточно малых значениях параметра μ [6]. Оценки радиусов сходимости рядов или оценки приближений по нескольким первым членам этих рядов даны лишь в немногих частных случаях и, как правило, малоэффективны. Однако, несмотря на возможность получить на практике только небольшое число приближений и на отсутствие эффективного способа получения оценок, метод Пуанкаре является вполне строгим.

В заключение следует отметить, что существуют некоторые модификации метода Пуанкаре. К числу таких модификаций можно, например, отнести способ подбора произвольных постоянных интегрирования, принадлежащий Б. В. Булгакову [4]. Несомненной модификацией метода является способ вспомогательных функций, предложенный С. Н. Шимановым [21]. Последний способ удобен при проведении доказательств существования периодических решений в различных случаях.

Поступила 13 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Sur le problème de trois corps et les equations de la dynamiques. Acta Mathematica, 1890, t. 13.
2. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I, Paris, 1892.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
4. Булгаков Б. В. Колебания. ГИТТЛ, 1954.
5. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. ГИИТЛ, 1949.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1956.
7. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд-во Наука, 1964.
8. Minorsky N. Nonlinear oscillations. New York, 1962.
9. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы в случае кратных корней амплитудных уравнений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
10. Копнин Ю. М. Колебания автономных систем с одной степенью свободы. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 3.
11. Копнин Ю. М. Периодические колебания нелинейных неавтономных систем со многими степенями свободы. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.
12. Плотникова Г. В., Байнов Д. Д., Периодические колебания механической системы с n степенями свободы при наличии резонансных частот. Rev. Roumaine des Sci. Techn. Méchanique appl., 1965, т. 10, № 2.
13. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
14. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы в особых случаях. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
15. Мерман Г. А. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла. Тр. Ин-та теорет. астрономии, 1952, вып. 1.
16. Архангельский Ю. А. Периодические решения квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
17. Архангельский Ю. А. Об одном случае построения периодических решений квазилинейных систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
18. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
19. Mac-Millan W. D. A reduction of a system of power series to an equivalent system of polynomials. Mathematische Annalen, 1912, Bd. 72.
20. Mac-Millan W. D. A method for determining the solution of a system of analytic function in the neighborhood of a branch point. Mathematische Annalen, 1912, Bd. 72.
21. Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.