

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ПСЕВДООЖИЖЕНИЯ

Ю. П. Гупало, Г. П. Черепанов

(Москва)

При течении жидкости или газа в сыпучей среде твердые частицы испытывают действие гидродинамических сил со стороны потока и сил взаимодействия с соседними частицами. При определенных режимах течения происходит разрушение сыпучего тела: частицы теряют регулярные контакты одна с другой, и среда (или некоторая ее часть) переходит во взвешенное состояние. Представляет интерес определение условий перехода среды во взвешенное состояние.

Практические потребности в этом обусловлены прежде всего развитием техники взвешенного слоя в химической промышленности. По соображениям технологической эффективности процесса камерам промышленных аппаратов в большинстве случаев придают сложную конфигурацию при неравномерном распределении жидкости по сечению. Так, определенные технологические преимущества отмечаются у аппаратов с расширяющимся кверху сечением [1,2]. Во многих процессах (например, при сушке сыпучего материала во взвешенном состоянии) применяется фонтанирующий слой, образующийся при подводе снизу к слою насыпки струи газа [3]. Наконец, можно указать на задачу о переходе во взвешенное состояние песчаной пробки в нефтяной скважине, связанную с оценкой предельного дебита нефти.

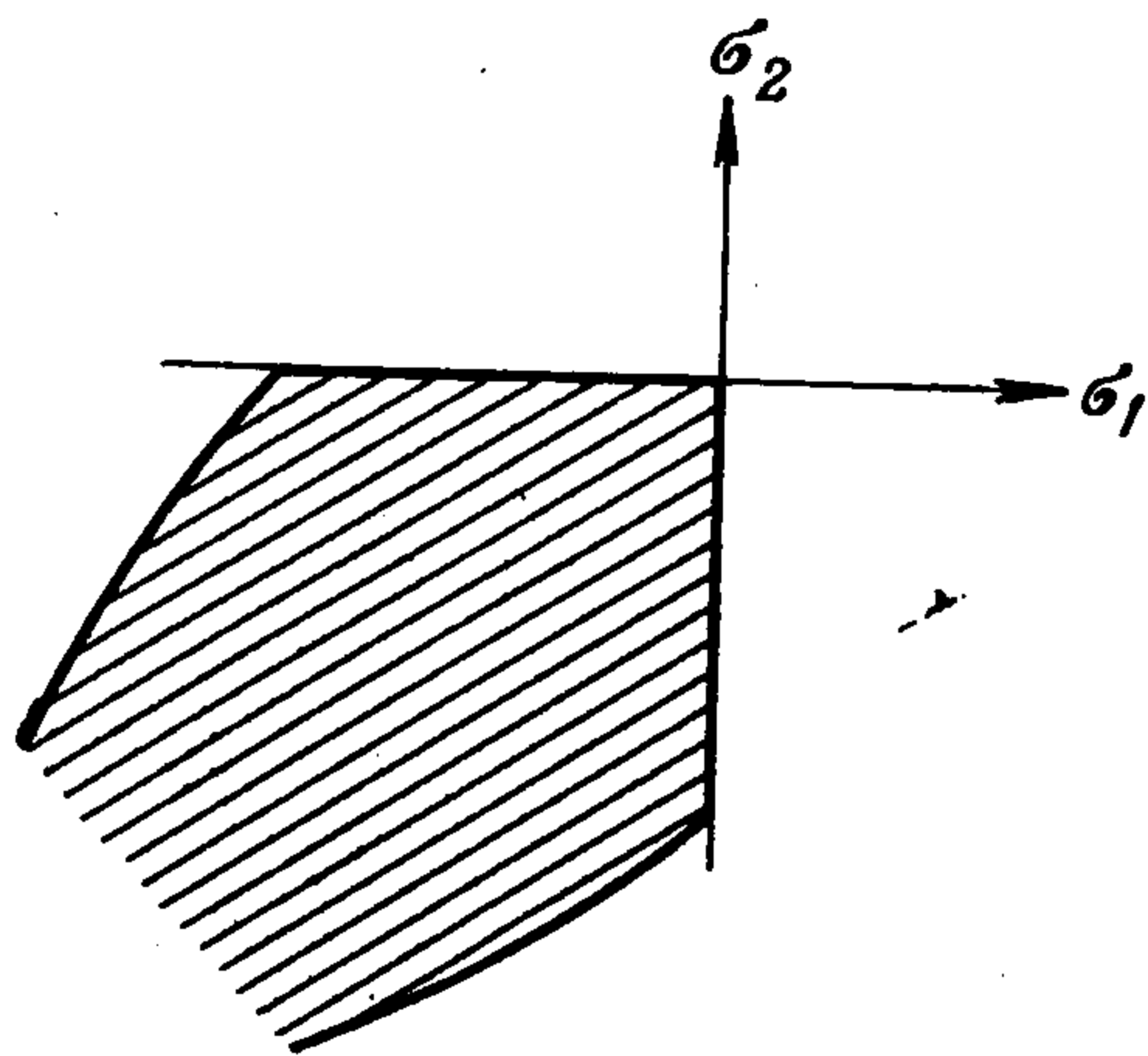
Ниже предлагается постановка задачи о переходе сыпучей среды во взвешенное состояние как задачи о предельном равновесии тела, в котором могут существовать лишь сжимающие напряжения. Деформациями тела до момента перехода в предельное состояние пренебрегается, так что рассматриваемое тело в некотором смысле аналогично специфическому жестко-пластическому телу. В случае плоской задачи разработан метод расчета, позволяющий достаточно эффективно определять параметры критического режима течения жидкости, при которых происходит переход среды во взвешенное состояние. Плоская задача в некотором отношении оказывается аналогичной задаче о местном выпучивании мембраны [4]. Даны решения нескольких конкретных задач о переходе среды во взвешенное состояние и приведено сравнение теоретических решений с экспериментальными данными, имеющимися в литературе по взвешенному слою. Обнаружено количественное и качественное согласование теории с экспериментом.

§ 1. Постановка задачи. Представим себе сыпучее тело, в порах которого движется жидкость или газ. Примем концепцию двойной сплошной среды, т. е. будем считать, что в каждой точке пространства, занятого сыпучим телом с жидкостью, имеется одновременно два сплошных тела, состояние одного из которых (собственно сыпучего тела) характеризуется напряжениями и деформациями, а состояние другого (жидкости или газа) — давлением и скоростью движущихся частиц. Взаимодействие этих сред определяется экспериментальным путем и сводится к введению в каждой из двух сред некоторых объемных сил, очевидно, в любой точке пространства равных по величине и противоположных по направлению. Предположим, что пористость сыпучего тела полностью определяется давлением в жидкости, а объемная сила — скоростью и давлением в жид-

кости. При таких предположениях давление и скорость жидкости могут быть найдены независимо от напряженного и деформированного состояния сыпучего тела. В дальнейшем эту часть проблемы, относящуюся к классическим задачам теории фильтрации [5], будем считать решенной.

Займемся изучением напряженного и деформированного состояния сыпучего тела, подверженного воздействию объемных сил, известных из решения соответствующей задачи теории фильтрации. Ограничимся плоской задачей. Уравнения статического равновесия сыпучего тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = b \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь σ_x , σ_y , τ_{xy} — компоненты тензора напряжений в прямоугольной декартовой системе координат xy ; $a(x, y)$ и $b(x, y)$ — составляющие вектора объемной силы по осям x и y с обратным знаком. Подчеркнем, что напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} характеризуют силы взаимодействия между частицами [сыпучей среды]. Примем основную концепцию теории предельного равновесия, согласно которой в каждой точке сплошной среды, находящейся в предельном состоянии, выполняется некоторое соотношение вида

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь функция F зависит от напряжений и постоянных материала. Естественно принять постулат Мизеса; тогда вектор приращения деформации в каждой точке тела будет направлен по нормали к поверхности (1.2) в соответствующей точке (ассоциированный закон течения). Упругими деформациями тела будем пренебрегать.

Теперь рассмотрим вопрос о выборе функции F для сыпучего тела. Пусть в каждой точке некоторой области тела оба главных напряжения сжимающие. В этом случае обычно принимают закон Кулона [6]

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \delta (\sigma_x + \sigma_y + K \operatorname{ctg} \delta)^2 \quad (1.3)$$

Здесь δ и K — угол внутреннего трения и коэффициент сцепления.

Заметим, что рассматриваемая сыпучая среда состоит из отдельных частичек, весьма слабо связанных одна с другой. В первом приближении можно пренебречь силами сцепления между частицами, возникающими при растяжении сыпучего тела. Тогда непрерывность среды будет нарушаться при приложении сколь угодно малого растягивающего усилия, т. е. будет происходить разрушение сыпучего тела. На основании изложенных соображений функция F в зависимости от главных напряжений σ_1 и σ_2 будет иметь вид, изображенный на фиг. 1. При этом в заштрихованной области среда считается недеформируемой, а состояния вне этой области — недостижимыми. В теории предельного равновесия сыпучих тел рассматривались лишь такие задачи, когда оба главных напряжения были сжимающими [6].

Будем исследовать задачи, в которых реализуются состояния, расположенные лишь на осях σ_1 и σ_2 (фиг. 1), т. е. при условии

$$\tau_{nt} \leq K + \sigma_n \operatorname{tg} \delta \quad (1.4)$$

где τ_{nt} , σ_n — касательное и нормальное напряжения на любой элементарной площадке внутри слоя насадки.

Последнее имеет место, например, в большинстве технологических задач о предельном равновесии насадки в потоке жидкости или газа. Отметим, что модель среды, не выдерживающей растягивающих напряжений в связи с другими задачами, впервые предложена в работе [4].

Главные напряжения в плоской задаче равны

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (1.5)$$

В состоянии предельного равновесия наибольшее из главных напряжений согласно фиг. 1 равно нулю. Отсюда получаем

$$\sigma_x \sigma_y = \tau_{xy}^2 \quad (1.6)$$

Поставленная задача сводится к исследованию квазилинейной системы уравнений (1.1), (1.6). Условие (1.6) формально может быть получено из закона Кулона при $\delta = \frac{1}{2} \pi$. Однако математический аппарат в этом предельном случае существенно изменяется, так как меняется тип системы (ср. [6] и § 2, 3 настоящей работы).

§ 2. Исследование системы. 1°. Пусть напряжения имеют вид

$$\sigma_x = -\alpha^2(x, y), \quad \sigma_y = -\beta^2(x, y), \quad \tau_{xy} = -\alpha(x, y)\beta(x, y) \quad (2.1)$$

Уравнение (1.6) выполняется, а система (1.1) примет вид

$$2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -a, \quad \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = -b \quad (2.2)$$

Будем решать задачу Коши для системы (2.2). Пусть в плоскости xy задана дуга $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, на которой известны функции $\alpha = \alpha_0(s)$, $\beta = \beta_0(s)$. Дифференцируя последние функции по длине дуги s , получаем два условия «полоски»

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy = d\alpha, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy = d\beta \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) представляют собой систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех искомым производных.

Приравняв определитель этой системы нулю, находим

$$\alpha dy = \beta dx \quad (2.4)$$

Таким образом, система (2.2) имеет одно семейство характеристик и принадлежит параболическому типу. Найдем соотношение, которое должно выполняться на характеристике. Для этого потребуем, чтобы характеристика была линией слабого разрыва; тогда числители в формулах Крамера должны обращаться в нуль. Отсюда получаем соотношение

$$\alpha^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = a \frac{dy}{dx} - b \quad (2.5)$$

Установим физический смысл характеристик. На основании (1.5) и (2.1) в каждой точке тела имеем

$$\sigma_{\max} = 0, \quad \sigma_{\min} = \sigma_x + \sigma_y = -(\alpha^2 + \beta^2)$$

Вычислим угол θ , который составляет площадка максимального главного напряжения, равного нулю, с осью x . Имеем

$$-\sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta = 0$$

Отсюда, используя формулы (2.1) и (2.4), получаем

$$\operatorname{tg} \theta = dy / dx \quad (2.6)$$

Следовательно, характеристика является линией, на которой нормальное и касательное напряжения равны нулю.

Используя это обстоятельство, рассмотрим условие (1.4). Пусть σ_ξ — напряжение вдоль характеристик. Тогда для произвольной элементарной площадки, нормаль к которой составляет угол γ с касательной к характеристике в данной точке, имеем

$$\tau_{nt} = 1/2 \sin 2\gamma (-\sigma_\xi), \quad \sigma_n = \cos^2 \gamma (-\sigma_\xi) \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что условие (1.4) будет выполнено для любых γ при

$$\delta \geq 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - 2K / |\sigma_\xi|}{1 + 2K / |\sigma_\xi|} \quad (2.8)$$

2°. В произвольных ортогональных криволинейных координатах ξ и η исходная система (1.1) имеет вид [7]

$$\begin{aligned} H_1 Q_\xi + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_1 H_2 \sigma_\xi) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1^2 \tau_{\xi\eta}) - \sigma_\xi \frac{\partial \ln H_1}{\partial \xi} - \tau_{\xi\eta} \frac{\partial \ln H_2}{\partial \xi} &= 0 \\ H_2 Q_\eta + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_2^2 \tau_{\xi\eta}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1 H_2 \sigma_\eta) - \tau_{\xi\eta} \frac{\partial \ln H_1}{\partial \eta} - \sigma_\eta \frac{\partial \ln H_2}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь σ_ξ , σ_η , $\tau_{\xi\eta}$ — составляющие напряжения в системе координат $\xi\eta$; Q_ξ и Q_η — составляющие вектора объемной силы по осям ξ и η ; H_1 и H_2 — параметры Ляме

$$H_1^2 = (dx / d\xi)^2 + (dy / d\xi)^2, \quad H_2^2 = (\partial x / \partial \eta)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2 \quad (2.10)$$

Через $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ обозначены искомые уравнения семейства характеристик (условие $\eta = \text{const}$ выделяет одну характеристику семейства).

Пусть теперь линии $\eta = \text{const}$ представляют собой характеристики исходной системы (1.1), (1.6). Так как на характеристиках будет $\sigma_\eta = 0$, $\tau_{\xi\eta} = 0$, то уравнения (2.9) запишутся в следующем виде, эквивалентном системе уравнений (1.1), (1.6)

$$H_1 Q_\xi + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \sigma_\xi \frac{\partial \ln H_2}{\partial \xi} = 0, \quad Q_\eta = 0 \quad (2.11)$$

Компоненты Q_ξ и Q_η , очевидно, могут быть выражены через a и b

$$Q_\xi = -a \frac{\partial x}{\partial \xi} - b \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q_\eta = a \frac{\partial y}{\partial \xi} - b \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (2.12)$$

В качестве ξ примем просто длину дуги характеристики $\eta = \text{const}$. Тогда будет $H_1^2 = 1$ или

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = 1 \quad \text{при } \eta = \text{const} \quad (2.13)$$

Второе уравнение (2.11) на основании (2.12) запишется так:

$$a \frac{dy}{d\xi} = b \frac{dx}{d\xi} \quad (2.14)$$

С учетом (2.13) и (2.14) вдоль характеристики $\eta = \text{const}$ имеем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad (2.15)$$

Если задать уравнение семейства характеристик в виде $y = y(x, \eta)$, то, используя (2.14), легко получить простое уравнение

$$dy/dx = b/a \quad \text{при } \eta = \text{const} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) служит для определения искомого семейства характеристик (произвольная постоянная, появляющаяся при решении уравнения (2.16), обозначена выше через η).

Первое уравнение (2.11) запишем в виде

$$H_2 Q_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 \sigma_\xi) = 0 \quad (2.17)$$

Интегрируем (2.17), вспоминая формулу (2.12)

$$H_2 \sigma_\xi = \int_{\xi_0}^{\xi} H_2(\xi) \left(a \frac{\partial x}{\partial \xi} + b \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + A(\eta) \quad (2.18)$$

Здесь функция $A(\eta)$ определяется из граничных условий.

При задании семейства характеристик в виде $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ единственное неизвестное напряжение σ_ξ на основании (2.10), (2.15) окончательно получаем в следующей форме:

$$\sigma_\xi = \frac{1}{\sqrt{R(\xi, \eta)}} \left(A(\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{(a^2 + b^2) R(\xi, \eta)} d\xi \right), \quad R(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \quad (2.19)$$

Здесь знак перед радикалом, как и везде в дальнейшем, легче всего выбирать, используя физические соображения.

Перейдем к более удобному представлению семейства характеристик в виде $y = y(x, \eta)$. Записав результат дифференцирования тождества $y \equiv y(x(\xi, \eta), \eta)$ по η вместе с условием ортогональности координат $\xi\eta$, получим систему

$$\frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{dy}{d\eta} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$$

Здесь через dy/dx и $dy/d\eta$, как обычно, обозначены частные производные функции $y = y(x, \eta)$; это обозначение уже было использовано выше в записи уравнения (2.16). Решая указанную систему относительно $\partial x / \partial \eta$ и $\partial y / \partial \eta$ и используя формулы (2.15) и (2.16), получаем

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{dy}{d\eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{dy}{d\eta}$$

Итак, при задании семейства характеристик в виде $y = y(x, \eta)$ напряжение σ_ξ на основании (2.19) может быть записано в следующей простой форме:

$$\sigma_\xi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^{-1} \left[A(\eta) + \int_{x_0}^x \sqrt{a^2 + b^2} \frac{dy}{d\eta} dx \right] \quad (2.20)$$

или

$$\sigma_\xi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^{-1} \left[A(\eta) + \int_{y_0}^y \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} \frac{dy}{d\eta} dy \right] \quad (2.21)$$

§ 3. Краевая задача. 1°. Согласно предыдущему наиболее удобный порядок расчета в конкретных задачах такой: вначале исследуется поле характеристик по уравнению (2.16), затем по формуле (2.19), (2.20) или (2.21) определяется поле напряжений в теле, так чтобы удовлетворить граничным условиям на контуре тела.

Представляет интерес сравнение полученных результатов по изучению системы (1.1), (1.6) с соответствующими результатами для той же системы при $a = b = 0$, найденными ранее в работе [4].

Система уравнений (1.1), (1.6) при $a \neq 0, b \neq 0$ квазилинейна, принадлежит параболическому типу, единственное семейство характеристик вполне определяется коэффициентами задачи $a(x, y)$ и $b(x, y)$ и поэтому явно не зависит от формы тела и граничных условий; система в вырожденном случае при $a = b = 0$ также квазилинейна и принадлежит параболическому типу, однако семейство характеристик вполне определяется формой тела и граничными условиями.

В связи с этими особенностями семейства характеристик следует остановиться на вопросе о постановке корректной краевой задачи для этих уравнений, понимая под корректной задачей такую задачу, для решения которой гарантировано существование, единственность и устойчивость в некотором смысле по отношению к возмущениям формы тела и граничных условий. Нетрудно видеть, что единственной корректно поставленной задачей для системы (1.1), (1.6) при $a \neq 0, b \neq 0$ будет краевая задача для произвольной границы тела с поверхностными силами, направленными под углом $\arcs \operatorname{tg}(b/a)$ к оси x (т. е. поверхностные нагрузки должны быть направлены вдоль характеристик). Действительно, решение не будет существовать, если нагрузка на границе тела будет направлена как-то иначе, так как для среды (1.6) условиям равновесия (1.1) уже вблизи границы невозможно удовлетворить. В то же время, если указанное условие направления соблюдается, краевая задача корректна при любых однозначно определенных функциях a и b и произвольной форме тела. Это вытекает из рассмотрения уравнения характеристик (2.16) и формулы (2.20) для напряжения $\sigma_\xi = \sigma_x + \sigma_y$, если учесть, что σ_ξ может быть найдено вдоль каждой характеристики независимо от поля σ_ξ в остальной области.

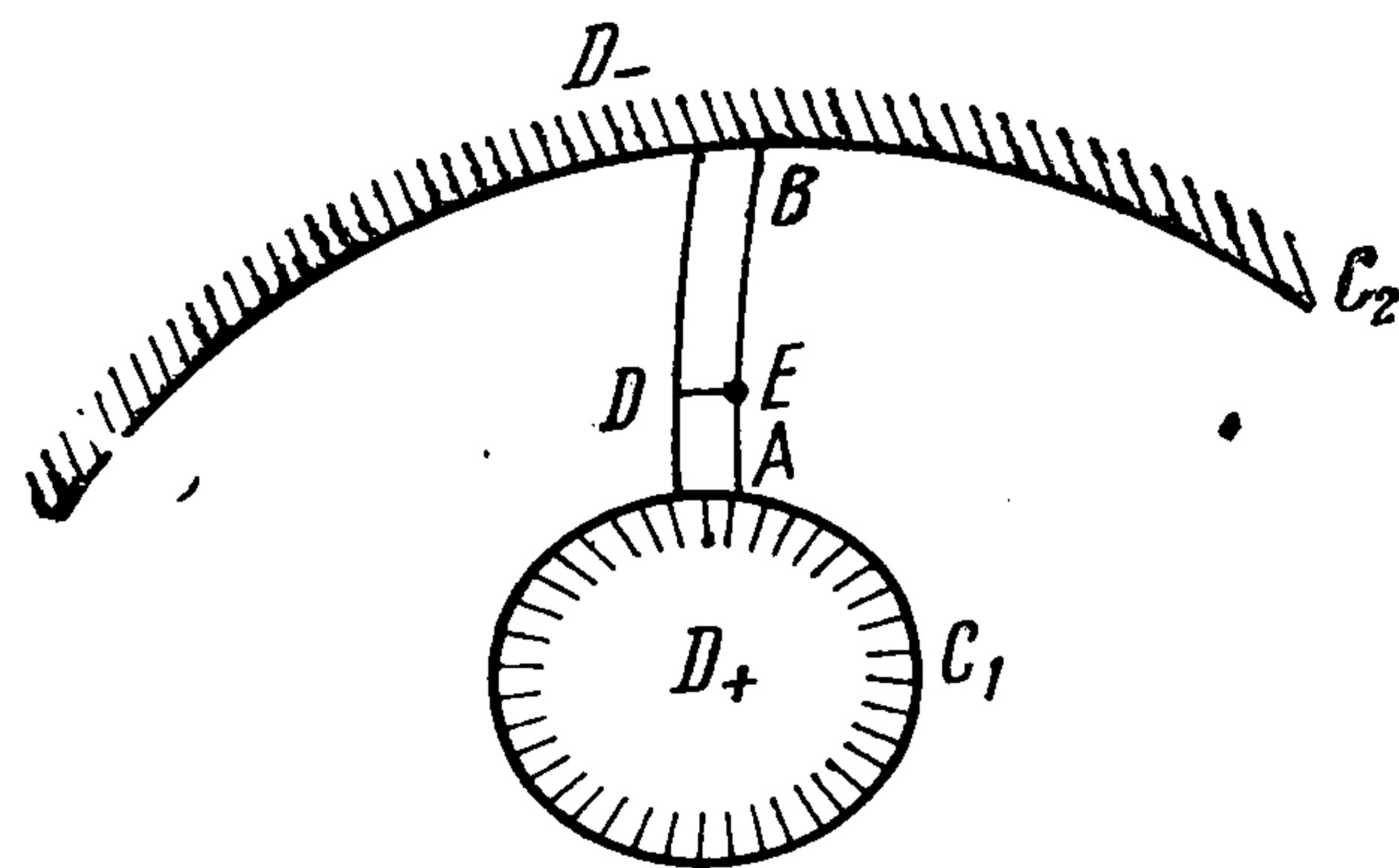
Напомним, что в вырожденном случае $a = b = 0$ корректной краевой задачей будет любая задача Коши (если характеристики не пересекаются) [4]. В связи с обсуждением корректных краевых задач для систем теории предельного равновесия (1.1), (1.2) следует упомянуть, поскольку это в литературе нигде ранее не указывалось, что для условий предельного равновесия (1.2), имеющих вид

$$F(p, \tau_m) = 0, \quad p = 1/2(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_m = \sqrt{1/4(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \left(\frac{\partial F / \partial p}{\partial F / \partial \tau_m} > 1 \right) \quad (3.1)$$

и приводящих к системам эллиптического типа [8], краевая задача Коши некорректна. В частности, это обстоятельство имеет место в некоторых задачах теории пластического плосконапряженного состояния [9, 10].

В этом свете представления Хилла о возможности существования пластических состояний, соответствующих кругам, лежащим целиком внутри огибающей Мора, кажутся неверными ([8], стр. 337).

2°. Приведем пример корректно поставленной краевой задачи для системы (1.1), (1.6). Пусть в тяжелой сыпучей среде, занимающей область D , имеется резервуар газа или жидкости, занимающий область D_+ (фиг. 2). Граница C_1 представляет собой жесткую перегородку с отверстиями, непроницаемую для твердых частиц. При увеличении давления в резервуаре D_+ происходит фильтрация газа через сыпучее тело в область D_- , заполненную газом при меньшем давлении. При некотором перепаде давлений среда переходит в критическое состояние, вслед за чем происходит разрушение тела и слой «закипает».



Фиг. 2

Для перепада давления, меньшего или равного критическому, напряжения в среде определяются по формулам (2.20) и (2.16), причем поле характеристик при изменении перепада, вообще говоря, также изменяется. Выделим произвольную элементарную полоску сыпучего тела AB , расположенную между некоторыми близлежащими характеристиками (фиг. 2). При очень малых перепадах давления в точках A и B напряжение σ_ξ вдоль всей полосы будет сжимающим, за исключением точки B , в которой напряжение σ_ξ будет равно нулю при любых перепадах давления. Последнее вытекает из того, что напряжение σ_ξ характеризует взаимодействие частиц сыпучего тела (см. замечание к (1.1)) и становится особенно очевидным, если к сыпучему телу на поверхности в точке B приложить дополнительно к любому гидростатическому давлению газа сколь угодно малое растягивающее усилие. Из физических соображений ясно, что при увеличении перепада давления в некоторой точке сыпучего тела E напряжение σ_ξ станет равным нулю. Очевидно, что в этот момент объемные силы, действующие на элементарную полоску BE , вблизи характеристики AB , проходящей через точку E , уравниваются.

Дальнейшее увеличение перепада давления, вообще говоря, вызовет динамическое движение столбика BE вверх; этот момент естественно считать началом разрушения насадки и перехода ее во взвешенное состояние.

Итак, искомые параметры критического состояния сыпучего тела в жидкости или газе определяются условием обращения в нуль напряжения σ_ξ в некоторой внутренней точке тела при сжимающих напряжениях σ_ξ во всех остальных внутренних точках. Впрочем, это условие является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для начала разрушения (возможен случай безразличного равновесия). Случай постепенного образования вблизи поверхности области с нулевыми напряжениями требует дополнительного исследования.

Из приведенного примера легко представить себе и кинематическую картину распределения поля скоростей, если принять ассоциированный закон течения и пренебречь упругими деформациями. Из ассоциированного закона вытекают равенства $\sigma_\xi \dot{\epsilon}_\xi = 0$, $\gamma_{\xi\eta} \dot{\gamma}_{\xi\eta} = 0$, где ϵ_ξ , $\gamma_{\xi\eta}$ — соответствующие компоненты скорости деформации. Отсюда для компонентов скорости получается линейная однородная система двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка; для этой системы нужно решать задачу Коши по заданным скоростям на решетке C_1 . Поэтому, если решетка неподвижна, скорости частиц в докритическом состоянии во всем теле будут нулевыми; при переходе через критическое состояние равновесие столбика BE нарушается.

3°. Следует отметить, что указанное условие критического равновесия справедливо также и при наличии твердых стенок, введение которых, однако, должно быть подчинено следующим двум условиям: во-первых, стенка должна совпадать с линией тока (требование со стороны фильтрационной задачи) и, во-вторых, на стенке должно выполняться неравенство

$$\tau_{nt}^{(w)} \leq K_w + \sigma_n^{(w)} \operatorname{tg} \delta_w \quad (3.2)$$

Здесь $\tau_{nt}^{(w)}$, $\sigma_n^{(w)}$ — касательное и нормальное напряжения на стенке, δ_w — угол трения для системы сыпучий материал — стенка, K_w — коэффициент сцепления сыпучего материала со стенкой.

Условие (3.2) накладывает ограничения на угол γ_w между касательной к характеристике в точке пересечения последней со стенкой и нормалью к стенке в этой точке. Действительно, для $\tau_{nt}^{(w)}$ и $\sigma_n^{(w)}$ имеем

$$\tau_{nt}^{(w)} = 1/2 \sin 2\gamma_w (-\sigma_\xi), \quad \sigma_n^{(w)} = \cos^2 \gamma_w (-\sigma_\xi) \quad (3.3)$$

После подстановки (3.3) в (3.2) получаем условие

$$\frac{\cos \gamma_w \sin (\gamma_w - \delta_w)}{\cos \delta_w} \leq \frac{K_w}{-\sigma_\xi} \quad (3.4)$$

Условие (3.4) выполняется при любых K_w , δ_w и σ_ξ в случае, когда $\gamma_w = 1/2\pi$, т. е. при совпадении характеристики со стенкой. Если же характеристика не совпадает со стенкой, то (3.4) справедливо при $\gamma_w \leq \delta_w$ и любых K_w и σ_ξ или при любых γ_w и

$$\delta_w \geq 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - 2K_w / |\sigma_\xi|}{1 + 2K_w / |\sigma_\xi|} \quad (3.5)$$

§ 4. Некоторые одномерные задачи о предельном равновесии. 1°. Переходя к решению конкретных задач о предельном равновесии насадки в потоке жидкости, заметим прежде всего, что действующая на сыпучее тело результирующая объемная сила, составляющие которой, взятые с обратным знаком, фигурируют в правых частях уравнений статического равновесия (1.1), равна

$$Q = \rho^* F^* - \operatorname{grad} p \quad (a = -Q_x, \quad b = -Q_y) \quad (4.1)$$

Здесь ρ^* — плотность двухфазной системы насадка плюс жидкость, Q — внешняя массовая сила, действующая на насыщенное жидкостью сыпучее тело, причем

$$\rho^* = \varepsilon \rho + (1 - \varepsilon) \rho', \quad \rho^* F^* = \varepsilon \rho F + (1 - \varepsilon) \rho' F' \quad (4.2)$$

Здесь ε — пористость сыпучего тела, ρ и ρ' — плотности жидкости и твердых частиц, F и F' — векторы внешних массовых сил, действующих на жидкую и твердую фазы соответственно. Вообще говоря, $F \neq F'$ (например, при действии магнитного поля); однако, обычно на практике $F \equiv F'$, тогда из (4.2) следует, что и $F^* \equiv F$.

Градиент давления в (4.1) находится из решения фильтрационной задачи, т. е. из решения, при надлежащих граничных условиях, системы [5]

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{u} \Phi(|\mathbf{u}|) + \rho F, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.3)$$

Здесь μ — вязкость жидкости, k — коэффициент проницаемости, $\Phi(|\mathbf{u}|)$ — функция модуля скорости фильтрации \mathbf{u} , определяющая заданный (вообще говоря, нелинейный) закон фильтрации. На практике обычно используют линейную аппроксимацию

$$\Phi(|\mathbf{u}|) = 1 + \lambda |\mathbf{u}| \quad (4.4)$$

Зависимость коэффициента проницаемости k и коэффициента λ в (4.4) от свойств жидкости, размеров частиц насадки и пористости слоя устанавливается с точностью до числового множителя из анализа размерностей. Действительно

$$|\operatorname{grad} p| \sim \mu^{1-n} l^{n-2} \rho^n u_\varepsilon^{1+n}$$

где l — характерный размер пор, u_ε — скорость жидкости в порах. Если, следуя Козени, определить l аналогично определению гидравлического диаметра канала, то $l = 1/6 D\varepsilon (1 - \varepsilon)^{-1}$, где D — эквивалентный диаметр частицы насадки, равный диаметру равновеликой сферы. Из условия неразрывности $u_\varepsilon = u / \varepsilon$. Тогда

$$|\operatorname{grad} p| \sim \mu^{1-n} D^{n-2} \rho^n \varepsilon^{-1-n} (1 - \varepsilon)^{2-n} u^{1+n}$$

При $uDr\mu^{-1} \ll 1$ grad p не должен зависеть от ρ , поэтому $n = 0$. Напротив, при $uDr\mu^{-1} \gg 1$ grad p не должен зависеть от μ , т. е. в этом случае $n = 1$. Следовательно, можно заключить, что

$$\frac{\mu}{k} = c_1 \frac{\mu (1 - \varepsilon)^2}{D^2 \varepsilon^3}, \quad \lambda = c_2 \frac{\rho D}{\mu} \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (4.5)$$

где c_1 и c_2 — числовые константы. Для определения c_1 и c_2 можно использовать, например, результаты Эргана [11], обработавшего большое количество экспериментальных данных разных авторов. Согласно [11] постоянные $c_1 = 150$, $c_2 = 1/87.5$.

2°. Картина перехода слоя во взвешенное состояние будет наиболее простой при совпадении характеристик системы (1.1), определяемых (2.16), с линиями тока. Рассмотрим сначала случай, когда насадка находится в поле тяжести и заключена между плоскими вертикальными стенками; жидкость подается снизу равномерно по всему сечению. Направим ось x прямоугольной декартовой системы координат по нормали к стенке, ось y — противоположно направлению силы тяжести и пусть насадка занимает область $0 \leq y \leq H$ (поверхность $y = 0$ проницаема для жидкости, но непроницаема для частиц).

Решением системы (4.3) является $u \equiv 0$, $v = \text{const}$ и $\partial p / \partial x = 0$. В данном случае характеристики представляют собой согласно (2.16) прямые $x = \text{const}$, поэтому $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$. По формулам (1.1) и (4.1), используя условие $\sigma_y = 0$ на свободной поверхности $y = H$, получаем

$$\sigma_y = - \int_y^H (\partial p / \partial y + \rho^* g) dy \quad (4.6)$$

Если параметры насадки, т. е. ее пористость, плотность и размер твердых частиц, не меняются по высоте слоя, то, очевидно, ρ^* , $\partial p / \partial y = \text{const}$. Тогда из (4.6) следует, что переход слоя во взвешенное состояние происходит одновременно по всему объему насадки, и условием перехода служит равенство

$$- \partial p / \partial y = \rho^* g \quad (4.7)$$

Для однородных насадок условие (4.7) хорошо подтверждается экспериментом. Из (4.3) и (4.7) нетрудно получить выражение для минимальной скорости фильтрации, обеспечивающей переход слоя во взвешенное состояние.

Выше был рассмотрен случай однородной насадки. Однако на практике нередко встречаются случаи, когда насадочный слой неоднороден по высоте колонны. Обычно эта неоднородность связана с неравномерным распределением пористости по высоте, обусловленным местными уплотнениями слоя. Неоднородность насадки существенно влияет на условия и на характер перехода слоя во взвешенное состояние. Пусть, например, в однородном слое насадки пористостью ε_0 имеется местное уплотнение, занимающее область $h \leq y \leq h + \Delta h$ ($h > 0$, $h + \Delta h < H$), где пористость равна $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Рассмотрим условие равновесия такого слоя. Из (4.6) и (4.3) следует

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_y^0(y), & h + \Delta h < y \leq H \\ \sigma_y^0(h + \Delta h) + \sigma_y^1(y), & h \leq y \leq h + \Delta h \\ \sigma_y^0(y + \Delta h) + \sigma_y^1(h), & 0 \leq y < h \end{cases} \quad (4.8)$$

где с использованием (4.4)

$$\begin{aligned} \sigma_y^0(y) &= [(\mu / k_0) v (1 + \lambda_0 v) - (\rho' - \rho)(1 - \varepsilon_0) g] (H - y) \\ \sigma_y^1(y) &= [(\mu / k_1) v (1 + \lambda_1 v) - (\rho' - \rho)(1 - \varepsilon_1) g] (h + \Delta h - y) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$(k_i = k(\varepsilon_i), \lambda_i = \lambda(\varepsilon_i), i = 0, 1)$$

Подставляя функции $k(\varepsilon_i)$ и $\lambda(\varepsilon_i)$, определяемые (4.5), в (4.8), можно видеть, что критическое состояние рассматриваемого неоднородного слоя, соответствующее обращению в нуль σ_y , впервые достигается при $y = h$, т. е. на нижней границе уплотненного слоя.

Этому условию соответствует уравнение для критической скорости v_* :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{H-h-\Delta h}{k_0} \lambda_0 + \frac{\Delta h}{k_1} \lambda_1 \right) v_*^2 + \left(\frac{H-h-\Delta h}{k_0} + \frac{\Delta h}{k_1} \right) v_* = \\ & = \left[(H-h)(1-\varepsilon_0) + \Delta h(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \right] \frac{\rho' - \rho}{\mu} g \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует, в частности, что $v_{*1} < v_* < v_{*0}$, где v_{*0} и v_{*1} — критические скорости фильтрации, соответствующие предельному равновесию однородных насадок пористостью ε_0 и ε_1 . Распределение напряжения $\sigma_y(y)$ по высоте неоднородной насадки (4.8) и (4.9) построено на фиг. 3, где кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям скорости фильтрации $v < v_{*1}$, $v = v_{*1}$, $v_{*1} < v < v_*$, $v = v_*$.

Условие критического состояния для неоднородной насадки выполняется лишь локально, поэтому следует ожидать возникновения разрыва в слое насадки вдоль нижней границы местного уплотнения; возникновение такого рода разрывов в виде своеобразных «трещин» в слое насадки наблюдалось в экспериментах [12].

По-видимому, образование местных уплотнений в слое с последующим разрывом слоя является основным механизмом в процессе образования поршней, наблюдаемых при псевдоожигении слоев большой высоты в трубах малого диаметра.

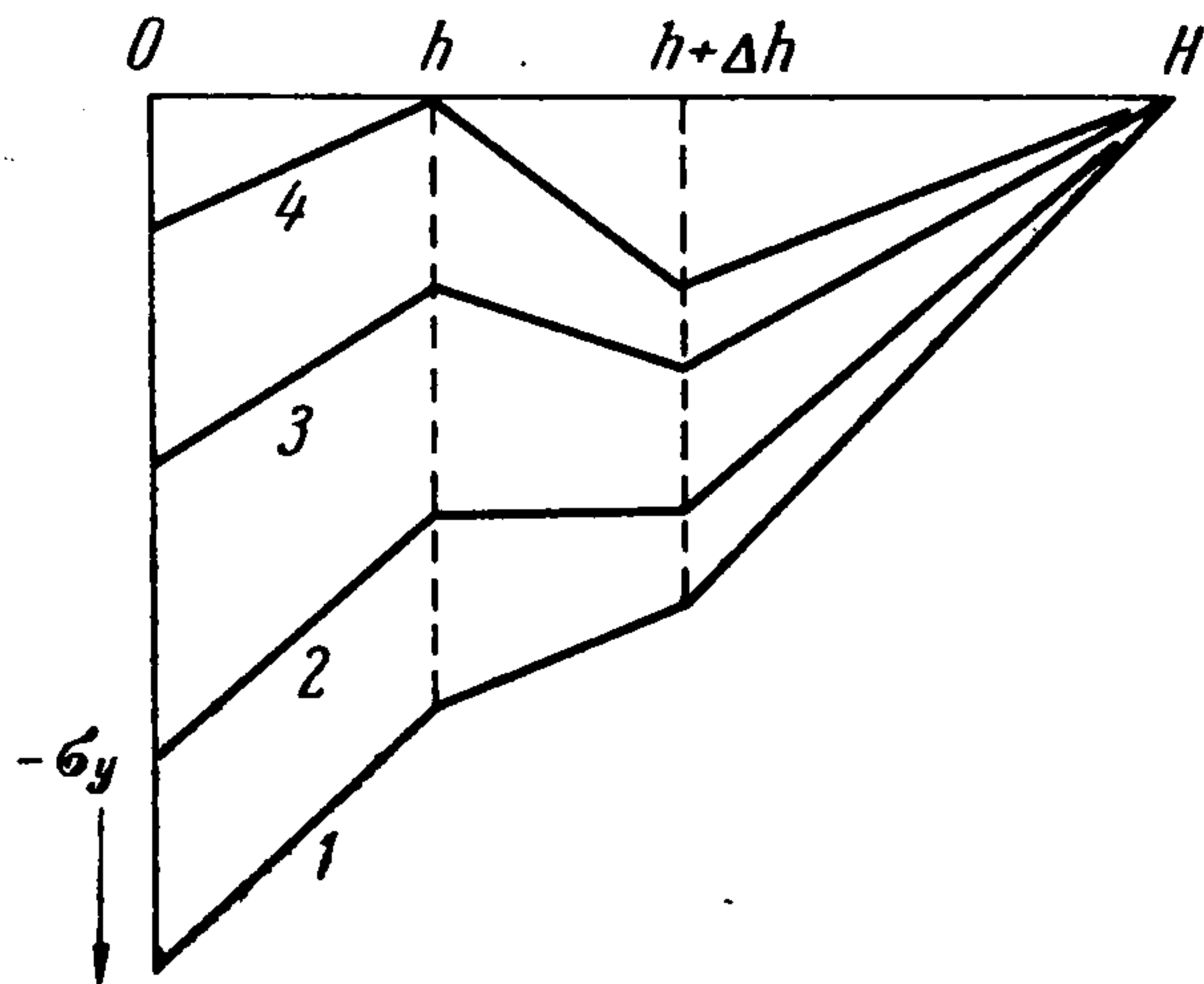
3°. В пункте 2° массовая сила F была постоянна по всему объему насадки. Однако иногда это условие может быть не выполнено. Примером служит случай псевдоожигения вращающегося слоя (ось вращения нормальна к плоскости течения), применяемого в ракетной технике [13] и химической технологии [14]. В этом случае насадка расположена кольцевым слоем на внутренней поверхности кругового цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, жидкость подается равномерно через пористую поверхность цилиндра, непроницаемую для твердых частиц, и движется радиально в направлении оси вращения, т. е. поле течения в плоской задаче описывается стоком на оси вращения. Совмещая начало координат с осью вращения, имеем для a и b из (4.1) и (4.3)

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mu}{k} \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \Phi \left(\frac{q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho) \omega^2 x \\ b &= \frac{\mu}{k} \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \Phi \left(\frac{q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho) \omega^2 y \end{aligned} \quad (4.11)$$

где ω — угловая скорость вращения, q — расход жидкости.

Из (2.16) и (4.11) следует, что характеристиками являются прямые, проходящие через начало координат, т. е., как и в 2°, характеристики совпадают с линиями тока.

Вводя полярную систему координат $r\varphi$, из (2.19) получим



Фиг. 3

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \int_{r_0}^r \left\{ \frac{\mu}{k} \frac{q}{2\pi} \Phi \left(\frac{q}{2\pi r} \right) - \right. \\ & \left. - (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho) \omega^2 r^2 \right\} dr \end{aligned} \quad (4.12)$$

Так как $\Phi(|u|)$ обычно представляет собой монотонно возрастающую функцию, то при увеличении расхода q изменение знака напряжения σ_r согласно (4.12) произойдет впервые на границе при $r = r_0$. Очевидно, соответствующий минимальный расход q_* определяется условием $(\partial \sigma_r / \partial r)_{r=r_0} = 0$. Получаем

$$\frac{\mu}{k} \frac{q_*}{2\pi r_0} \Phi \left(\frac{q_*}{2\pi r_0} \right) = (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho) \omega^2 r_0 \quad (4.13)$$

Переход во взвешенное состояние происходит постепенно, с поверхности слоя. Это согласуется с физическими соображениями и подтверждается на опыте [14].

Заметим, что при увеличении расхода сверх $q_* = q_*(r_0)$ происходит постепенное и равномерное «съедание» внутренней поверхности неподвижного слоя. При этом поле течения и поле характеристик не меняются. Свободная поверхность, отделяющая неподвижный слой, где $\sigma_r < 0$, от взвешенного, где $\sigma_r = 0$, по-прежнему имеет вид $r = \text{const}$ и постепенно приближается к наружной поверхности насадки $r = R$. В таком случае весь слой полностью перейдет во взвешенное состояние при значении $q = q_{**}$ причем $q_{**} = q_*(R)$; значения q_* и q_{**} хорошо подтверждаются экспериментом [14].

§ 5. Некоторые неоднородные задачи. 1°. Рассмотрим плоскую задачу о предельном равновесии слоя в аппаратах с расширяющимся кверху сечением в поле тяжести.

Пусть насадка заключена между двумя пересекающимися плоскостями, составляющими угол κ с вертикалью, ограничена снизу проницаемой для жидкости и непроницаемой для частиц цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = r_0^2$, верхняя, свободная поверхность насадки есть также цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 = R^2$. Жидкость равномерно подается снизу через проницаемую поверхность. В данном случае поле течения жидкости описывается источником в начале координат. Ограничившись, ради простоты, рассмотрением линейного закона фильтрации, получим a и b из (4.1) и (4.3) в виде

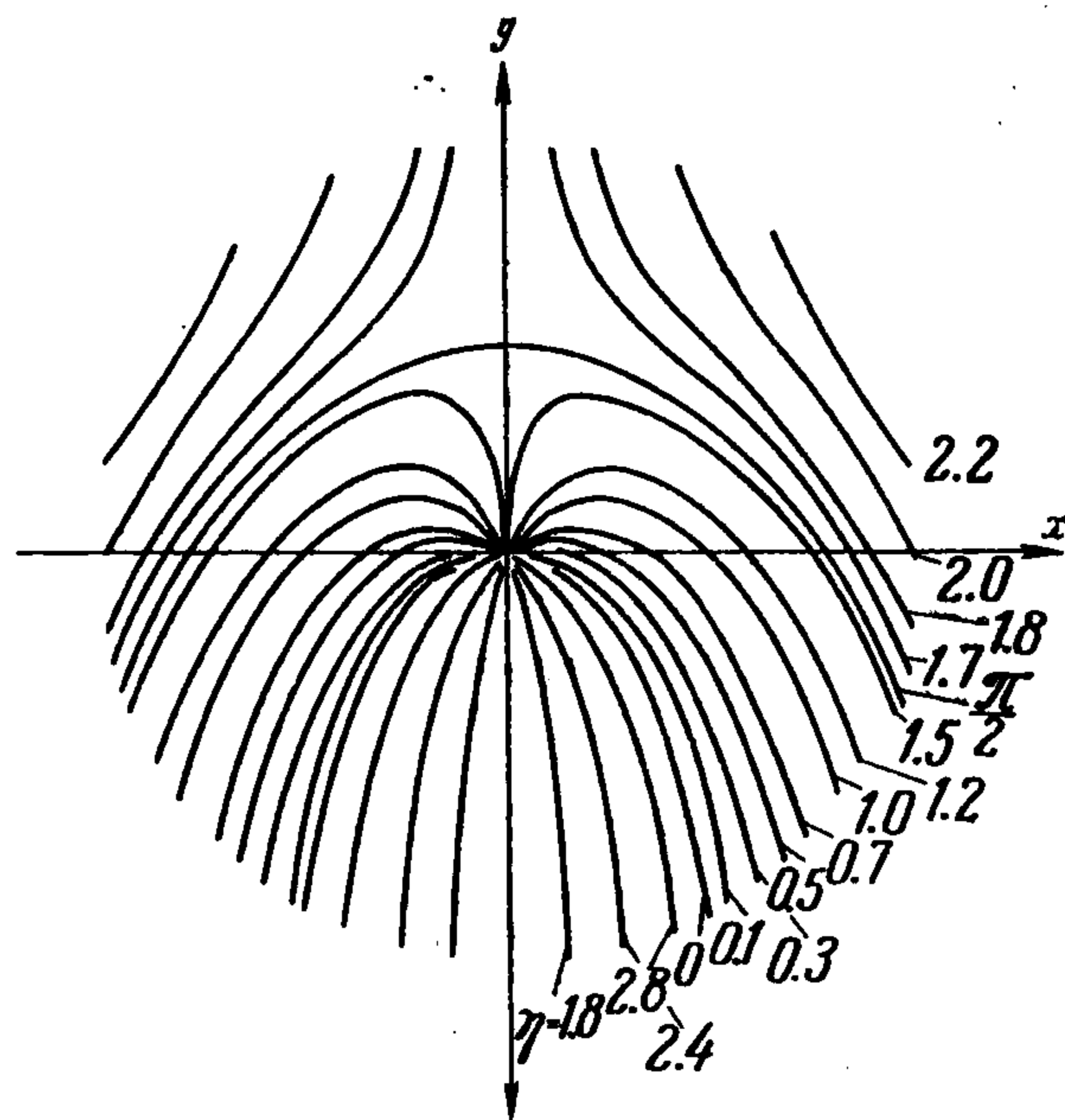
$$a = -\frac{\mu}{k} \frac{q}{\kappa} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (5.1)$$

$$b = -\frac{\mu}{k} \frac{q}{\kappa} \frac{y}{x^2 + y^2} + (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g$$

где q — расход жидкости. Интегрируя уравнение характеристик (2.16), получим следующее однопараметрическое семейство

$$y = x \operatorname{tg}(-Gx + \eta) \quad (5.2)$$

$$G = (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g \left(\frac{\mu}{k} \frac{q}{\kappa} \right)^{-1}$$



Фиг. 4

представленное на фиг. 4 (сплошные линии). Поле характеристик имеет две особые точки: дикритический узел в начале координат (0,0) и седло в точке (0, 1 / G).

Подставляя (5.1) и (5.2) в (2.21), получим для характеристик, выходящих на свободную поверхность, следующее выражение для напряжения σ_ξ :

$$\sigma_\xi = \frac{\mu q}{k\kappa} \left(\frac{1 - 2Gy}{x^2 + y^2} + G^2 \right)^{1/2} \int_{y_0}^y \frac{\sqrt{1 - 2Gy + G^2(x^2 + y^2)}}{G(x^2 + y^2) - y} \sqrt{x^2 + y^2} dy \quad (5.3)$$

где $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ — уравнение свободной поверхности. Интеграл в (5.3) выражается через эллиптические функции.

Из физических соображений следует, что критическое состояние впервые достигается на линии симметрии $x = 0$. Переходя в (5.3) к пределу при $x \rightarrow 0$, получим

$$\sigma_\xi = \left[\frac{\mu q}{k\kappa} \frac{1}{y} - (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)g \right] (R - y) \quad \text{при } x = 0 \quad (5.4)$$

Из (5.4) вытекает, что минимальный расход q_* , обеспечивающий обращение в нуль δ_ξ внутри слоя, соответствует значению $y = r_0$ и равен

$$q_* = \frac{\kappa k}{\mu} (1 - \varepsilon)(\rho' - \rho)gr_0 \quad (5.5)$$

Из (5.5) видно, в частности, что в докритическом состоянии, т. е. при $q < q_*$, особая точка (0, 1 / G) расположена под нижней поверхностью слоя, а в критическом состоянии, т. е. при $q = q_*$, она совпадает с центральной точкой нижней поверхности.

На основании сказанного представляется следующая картина перехода слоя во взвешенное состояние в рассматриваемом случае. При малых расходах поле характе-

ристик имеет вид, показанный на фиг. 4, т. е. седловая точка расположена под нижней поверхностью. Напряжения σ_z вдоль характеристик внутри слоя при этом отрицательны. Увеличение расхода сопровождается непрерывным изменением поля характеристик, причем седловая точка перемещается вверх по оси симметрии, пока не достигнет нижней поверхности слоя при $q = q_*$. В этот момент напряжения σ_z в слое обращаются в нуль в точке $(0, r_0)$ и столбик $x = 0, r_0 \leq y \leq R$ начинает двигаться вверх. Поле течения, а соответственно и поле характеристик при этом видоизменяются. При дальнейшем увеличении расхода возникает восходящее движение частиц вдоль оси аппарата, компенсируемое нисходящим движением частиц вдоль стенок, т. е. возникает циркуляция твердой фазы, столь характерная для взвешенного слоя в аппаратах с расширяющимися кверху сечением [2,15] и для фонтанирующего слоя [3,15].

2°. Следуя п. 1°, нетрудно рассмотреть задачу о предельном равновесии слоя насадки в аппаратах с суживающимся кверху сечением. Отличие от примера, приведенного в п. 1°, будет лишь в том, что направление силы тяжести заменено на противоположное, верхняя, свободная поверхность, и нижняя, проницаемая лишь для жидкости, определяются соответственно уравнениями $x^2 + y^2 = r_0^2$ и $x^2 + y^2 = R^2$, источник в начале координат заменен стоком. Уравнение характеристик по-прежнему имеет вид (5.2) и поле характеристик соответствует фиг. 4.

Для напряжения вдоль характеристики $x = 0$ имеем в отличие от (5.4)

$$\sigma_z = \left[\frac{\mu q}{kx} \frac{1}{y} - (1 - \varepsilon) (\rho' - \rho) g \right] (y - r_0) \quad \text{при } x = 0 \quad (5.6)$$

Из (5.6) следует, что при увеличении расхода q изменение знака напряжения σ_z произойдет впервые при $y = r_0$. Очевидно, соответствующий минимальный расход q_* определяется условием $(\partial \sigma_z / \partial y)_{y=r_0} = 0$, т. е., как прежде, имеем (5.5).

В данном случае переход слоя во взвешенное состояние происходит путем постепенного «разъедания» слоя сверху, начиная с центральной точки свободной поверхности.

Поступила 28 III 1967

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Z e n z F. A., O t h m e r D. F. Fluidization and fluid-particle systems. N. Y., Reinhold publish. corp., 1960.
2. R i d g w a y K. The tapered fluidized bed — a new processing tool? Chem. Proc. Engng., 1965, vol. 46, № 6, p. 317.
3. В е с к е r Н. А. An investigation of laws governing the spouting of coarse particles. Chem. Engng Sci., 1961, vol. 13, № 4, p. 245.
4. Ч е р е п а н о в Г. П. О выпучивании мембран с отверстием при растяжении. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 275.
5. Л е й б е н з о н Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
6. С о к о л о в с к и й В. В. Статика сыпучей среды. Изд. 3-е, М., Физматгиз, 1960.
7. К о ч и н Н. Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. Изд. 8-е, М., Изд-во АН СССР, 1961.
8. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
9. С о к о л о в с к и й В. В. Теория пластичности. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
10. К о ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
11. E r g u n S. Fluid flow through packed columns. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, p. 89.
12. Р о у П. Н., Х е н в у д Д. А. Силы давления потока в гидравлической модели псевдооживленного слоя. ч. I, В сб.: «Гидродинамика и массопередача в псевдооживленном слое». М., Атомиздат, 1964.
13. H a t c h L. P., R e g a n W. H., P o w e l l J. R. Fluidized Solids as a Nuclear Fuel for Rocket Propulsion. ARS Journal., 1961, vol. 31, № 4.
Русск. перевод: Применение псевдооживленного твердого ядерного топлива в ракетных двигателях. Ракетная техника, 1961, № 4, стр. 99.
14. Г е л ь п е р и н Н. И., А й н ш т е й н В. Г., Г о й х м а н И. Д. Скорость начала псевдооживления и расширение псевдооживленного слоя в поле центробежных сил. Химическое и нефтяное машиностроение, 1964, № 5, стр. 18.
15. З а б р о д с к и й С. С. Гидродинамика и теплообмен в псевдооживленном (кипящем) слое. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.