

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК ПЕРЕХОДА ЧЕРЕЗ СКОРОСТЬ ЗВУКА

А. Г. Куликовский, Ф. А. Слободкина

(Москва)

Изучается поведение малых возмущений стационарных решений произвольной системы уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t в окрестности критической точки, т. е. точки, где обращается в нуль одна из характеристических скоростей. Все характеристики системы предполагаются действительными и различными, кроме $t = \text{const}$, которые могут быть кратными в случае параболически вырожденной системы.

Критические точки совпадают с особыми точками системы уравнений, описывающей стационарные решения. Исследованы возможные типы этих особых точек. Оказалось, что в окрестности каждой особой точки интегральные кривые лежат на двумерной плоскости, проходящей через эту точку.

Показано, что нестационарные процессы в окрестности критических точек описываются одним уравнением в частных производных первого порядка, коэффициенты которого определяются собственными числами особой точки стационарных уравнений. Исследование нестационарных процессов проведено с учетом нелинейных членов, которые существенно влияют на форму возмущений и их амплитуду.

Для уравнений газовой динамики уравнение первого порядка, описывающее поведение возмущений в окрестности критической точки, было получено и исследовано в работе [1]. Подобные методы были развиты также в работах об асимптотических законах распространения слабых ударных волн в газовой динамике [2-4] и магнитной гидродинамике [5,6].

Другой метод — метод построения функции Грина — эффективно использовался С. В. Иорданским¹ при исследовании устойчивости автономных нестационарных газодинамических решений в окрестности точки, скорость движения которой, вычисленная при постоянном значении автономной переменной, совпадает с характеристической скоростью.

Результаты, полученные в настоящей работе, находят приложение при изучении устойчивости различных газодинамических течений в каналах (течений с трением, теплообменом, химическими реакциями и т. п.), магнитогазодинамических течений и в задачах, связанных с плазмой.

Обобщение теории на случай параболически вырожденных систем позволяет рассматривать задачи в средах с диссипативными процессами, такими, как теплопроводность или конечная проводимость в магнитной гидродинамике.

В качестве примеров рассмотрены квазиодномерные магнитогазодинамические течения с заданными E и H и одномерные течения газа с конечной проводимостью в каналах переменного сечения с прямолинейным магнитным полем, перпендикулярным скорости.

¹ И о р д а н с к и й С. В. Об устойчивости некоторых автономных газодинамических решений. Кандидатская диссертация, защищенная в Институте прикладной математики в 1958 г. (Москва).

Рассмотрим систему уравнений

$$A_{ij}(u_k, x) \frac{\partial u_j}{\partial t} + B_{ij}(u_k, x) \frac{\partial u_j}{\partial x} + C_i(u_k, x) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Здесь и далее по повторяющимся нижним индексам предполагается суммирование.

Характеристические скорости c — скорости распространения слабых разрывов — определяются из уравнения

$$|B_{ij}(u_k, x) - cA_{ij}(u_k, x)| = 0 \quad (2)$$

Предположим, что все корни этого уравнения c^k действительны и различны в некоторой области переменных x, u_k . Будем считать, что в рассматриваемой области матрица $A_{ij}(u_k, x)$ имеет постоянный ранг $m \leq n$. Система (1) может быть как гиперболической, так и параболически вырожденной, как в системах, описывающих процессы с диссипацией.

Выберем область переменных x, u_k , в которой обращается в нуль одна из характеристических скоростей, например, $c^1(x, u_k)$. В точках поверхности $c^1(x, u_k) = 0$ ранг матрицы B_{ij} равен $n - 1$, а в остальной области матрица B_{ij} — невырожденная. Непрерывное стационарное решение системы (1) с переходом c^1 через нуль может существовать только при условии, что одновременно с c^1 обращается в нуль величина $C_i \beta_i$, где величины β_i определяются из уравнения $B_{ij} \beta_j = 0$.

Если условие $C_i \beta_i = 0$ не выполнено, то на поверхности $c^1 = 0$ производные всех величин обращаются в бесконечность и при переходе через эту поверхность меняют знак. Следовательно, в этом случае непрерывного однозначного по x решения не существует. Очевидно, что точки, в которых одновременно выполняются соотношения

$$c^1 = 0, \quad C_i \beta_i = 0$$

представляют собой особые точки уравнений, описывающих стационарные решения. Множество особых точек образует $(n - 1)$ -мерную поверхность в пространстве x, u_1, \dots, u_n .

Рассмотрим некоторое стационарное решение $u_{k0}(x)$ системы (1), в котором c^1 меняет знак в некоторой точке, которую примем за начало отсчета x . Поведение возмущений $v_k(x, t) = u_k(x, t) - u_{k0}(x)$ этого решения описывается системой уравнений

$$A_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} + B_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x} + F_i = 0 \quad \left(F_i = C_i - B_{ij} \frac{\partial u_{j0}}{\partial x} \right) \quad (3)$$

где A_{ij}, B_{ij}, F_i зависят от x, v_k , причем $F_i = 0$ при $v_k = 0$.

Будем считать v_k достаточно малыми и рассматривать решения системы (3) на некотором отрезке $[-\delta, \delta]$. Введем новую переменную $x^1 = x / \delta$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$A_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{\delta} B_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x^1} + F_i = 0 \quad (4)$$

Будем считать δ малым и искать решение в виде ряда

$$v_j = v_j^0 + \delta v_j^1 + \dots$$

Разлагая коэффициенты уравнения (4) в ряды по v_k и x в нулевом приближении, получим

$$B_{ij}^{\circ} \partial v_j^{\circ} / \partial x' = 0 \quad (5)$$

где B_{ij}° — значение B_{ij} при $v_k = 0, x = 0$. Решение системы (5) имеет вид

$$v_j^{\circ} = w(x', t) b_j^{\circ} + g_j(t) \quad (6)$$

где b_j° — определяются из уравнений

$$B_{ij}^{\circ} b_j^{\circ} = 0,$$

а $w(x', t)$ и $g_j(t)$ — произвольные функции. Решение (6) позволяет вместо v_k ввести новые переменные w, w_2, \dots, w_n , которые представляют собой линейные комбинации v_k такие, что в рассматриваемой малой окрестности критической точки только переменная w существенно меняется с изменением x , а w_2, \dots, w_n можно считать в этой окрестности функциями только времени. Как будет видно из дальнейшего, величина w представляет собой инвариант Римана, соответствующий характеристической скорости c^1 .

Величины $g_j(t)$ в равенствах (6) будут линейными комбинациями $w_2(t), \dots, w_n(t)$.

Для стационарных решений это означает, что в окрестности каждой особой точки интегральные кривые лежат на двумерных плоскостях, определяемых уравнениями $w_2 = \text{const}, w_3 = \text{const}, \dots, w_n = \text{const}$.

Уравнение для функции $w(x', t)$ получается, как обычно, из условия совместности системы уравнений первого приближения

$$B_{ij}^{\circ} \frac{\partial v_i^1}{\partial x'} = - \left(A_{ij}^{\circ} \frac{\partial v_j^{\circ}}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \Delta B_{ij} \frac{\partial v_j^{\circ}}{\partial x'} + F_{iv_k}^{\circ} v_k^{\circ} \right) \equiv P_i \quad (7)$$

$$\Delta B_{ij} = B_{ij}(x', v_k) - B_{ij}^{\circ}$$

Здесь A_{ij}° — значение A_{ij} при $x = 0, v_k = 0$, а $F_{iv_k}^{\circ}$ — частные производные по v_k функции F_i , вычисленные при $x = 0, v_k = 0$. Заметим, что при разложении F_i в ряд члены нулевой степени по v_k отсутствуют.

В силу того, что матрица B_{ij}° — вырожденная, для совместности системы уравнений (7) необходимо выполнение равенства $P_i \beta_i^{\circ} = 0$, где β_i° — постоянные величины, удовлетворяющие системе уравнений

$$B_{ij}^{\circ} \beta_i^{\circ} = 0$$

Уравнение $P_i \beta_i^{\circ} = 0$ с учетом (6) может быть записано так:

$$A_{ij}^{\circ} \beta_i^{\circ} b_j^{\circ} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \Delta B_{ij} \beta_i^{\circ} b_j^{\circ} \frac{\partial w}{\partial x'} + F_{iv_k}^{\circ} \beta_i^{\circ} b_k^{\circ} w +$$

$$+ A_{ij}^{\circ} \beta_i^{\circ} \frac{\partial g_j}{\partial t} + F_{iv_k}^{\circ} \beta_i^{\circ} g_k(t) = 0 \quad (8)$$

Можно показать, что с точностью до членов первого порядка

$$\Delta B_{ij} \beta_j^{\circ} b_j^{\circ} / A_{ij}^{\circ} \beta_i^{\circ} b_j^{\circ} = c^1$$

Действительно, c^1 определяется из условия существования величин β_i , удовлетворяющих системе линейных алгебраических уравнений $c^1 A_{ij} \beta_j = B_{ij} \beta_i$, причем $c^1 = 0$ при $v_k = 0, x = 0$. Придавая произвольные малые приращения величинам v_k и x и свертывая полученную систему с вектором b_j° , получим требуемое равенство.

Разделим уравнение (8) на $A_{ij} \beta_i \circ b_j \circ$ и, разлагая c^1 по w, w_2, \dots, w_n и x , будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [c_x^1 x + c_w^1 w + \varphi(t)] \frac{\partial w}{\partial x} = Kw + f(t) \quad (9)$$

Функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ определяются равенствами

$$\varphi(t) = B_{i v_k} \circ g_k(t) \beta_i \circ b_j \circ / A_{ij} \circ \beta_i \circ b_j \circ$$

$$f(t) = - \left(A_{ij} \circ \beta_i \circ \frac{\partial g_j}{\partial t} + F_{i v_k} \circ \beta_i \circ g_k(t) \right) / A_{ij} \circ \beta_i \circ b_j \circ$$

и представляют собой линейные комбинации w_2, \dots, w_n и их производных по времени. Коэффициенты c_x^1, c_w^1 и K — постоянные.

Величины $w_2(t), \dots, w_n(t)$, через которые выражаются $\varphi(t)$ и $f(t)$, определяются решением задачи вне рассматриваемой малой окрестности начала координат. Во многих случаях можно считать $\varphi(t)$ и $f(t)$ равными нулю. Если $\varphi(t)$ и $f(t)$ не равны нулю, то можно обратить их в нуль введением новых переменных

$$w_1 = w - w^*(t), \quad \xi = x - x^*(t)$$

где $w^*(t)$ и $x^*(t)$ — некоторые частные решения уравнений

$$\frac{dw^*}{dt} = Kw^* + f(t), \quad \frac{dx^*}{dt} = c_x^1 x^* + c_w^1 w^* + \varphi(t)$$

В дальнейшем будем считать, что функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ равны нулю.

Коэффициенты c_x^1, c_w^1 и K в уравнении (9) зависят от выбора стационарного решения $u_{j_0}(x)$, исследуемого на устойчивость. Для того чтобы исключить эту зависимость, введем вместо w в качестве новой неизвестной $c \equiv c^1 = c_x^1 x + c_w^1 w$, и уравнение (9) примет вид

$$\partial c / \partial t + c \partial c / \partial x = \alpha c + \beta x \quad (10)$$

где α и β — постоянные ($\alpha = K + c_x^1, \beta = -Kc_x^1$). Решение уравнения (10) находится путем интегрирования уравнений характеристик

$$dc / dt = \alpha c + \beta x, \quad dx / dt = c \quad (11)$$

Отметим, что в одномерных задачах газовой динамики и магнитной гидродинамики с малыми магнитными числами Рейнольдса $c = u - a \approx a_0 (M - 1)$, где $M = u / a$, a_0 — скорость звука в критической точке невозмущенного течения.

Указанную выше замену переменных нельзя сделать, если $c_w^1 = 0$ или если член $c_w^1 w \partial w / \partial x$ в уравнении (8) отброшен как нелинейный. В этом случае для решения задачи нужно пользоваться исходным уравнением (9) и соответствующими уравнениями характеристик

$$dw / dt = Kw, \quad dx / dt = c_x^1 x \quad (12)$$

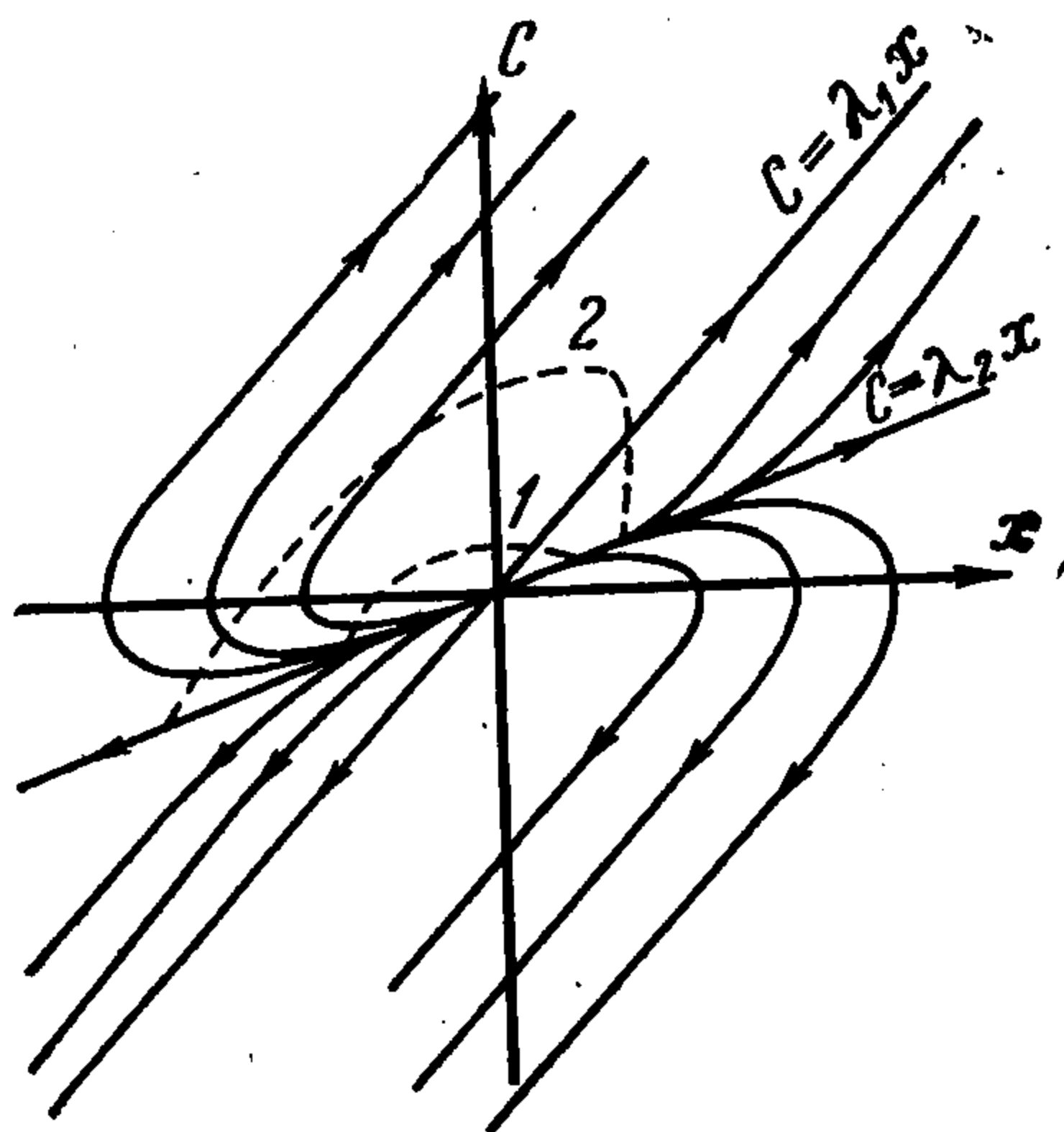
Уравнение (10) описывает как нестационарные, так и стационарные решения в окрестности критической точки. В стационарном случае система (1) дает решение $c(x)$ уравнения (10) в форме $c = c(t), x = x(t)$.

Для существования непрерывных решений системы (11), проходящих через критическую точку, необходимо, чтобы характеристическое уравнение этой системы, определяющее собственные числа,

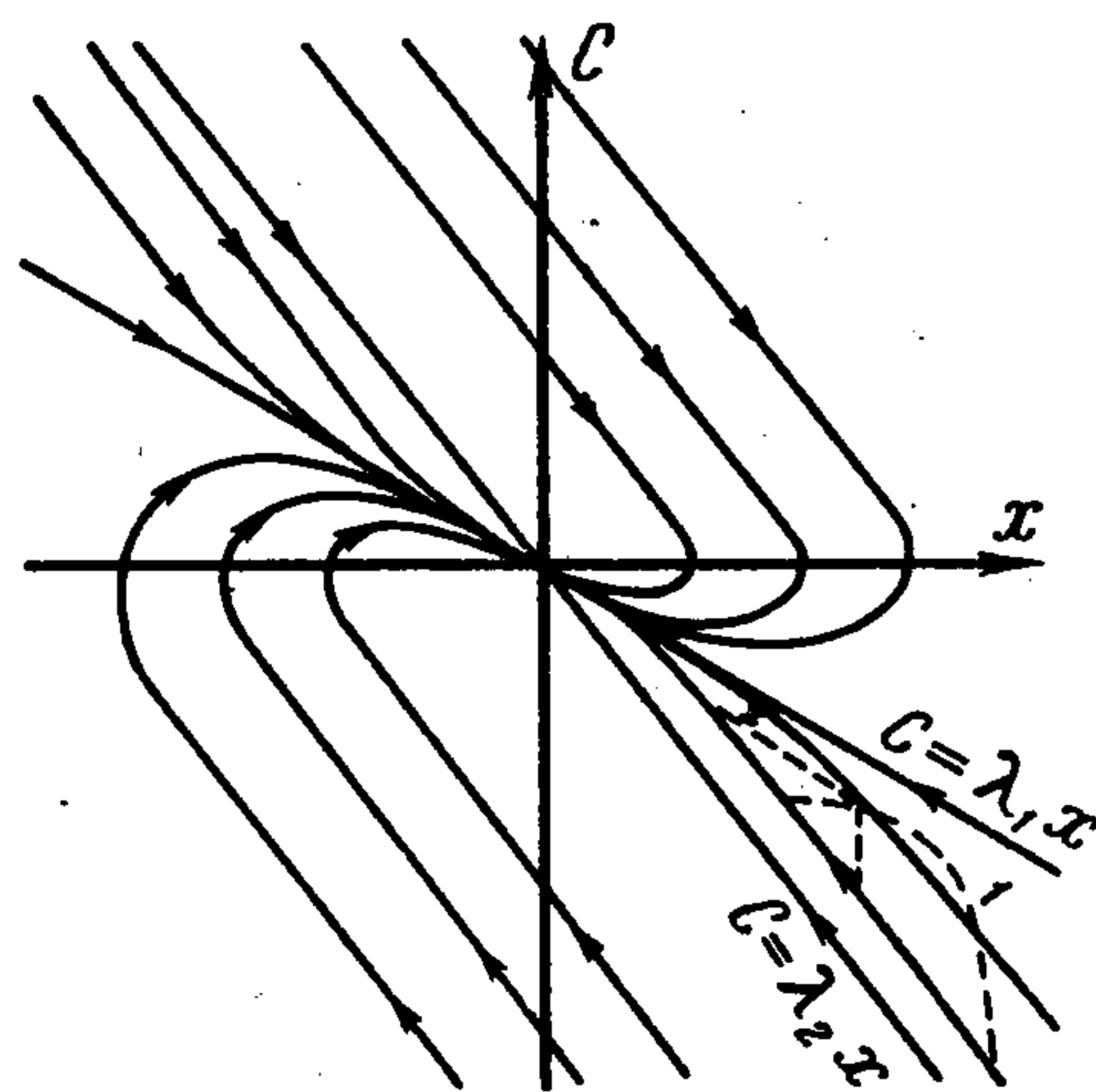
$$\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta = 0 \quad (13)$$

имело действительные корни λ_1, λ_2 . Для определенности будем считать, что $\lambda_1 > \lambda_2$.

Поведение интегральных кривых на плоскости x, c для различных действительных значений λ_1, λ_2 представлено на фиг. 1—3, где стрелки указывают направление роста t .



Фиг. 1



Фиг. 2

Собственные направления, соответствующие λ_1 и λ_2 , в особой точке определяются уравнениями $c = \lambda_1 x, c = \lambda_2 x$.

В качестве невозмущенного решения может рассматриваться любое стационарное решение $c_0(x)$, состоящее из однозначных по x отрезков интегральных кривых, проходящих через особую точку.

Рассмотрим на плоскости xc произвольную область площади S , ограниченную замкнутой кривой, точки которой перемещаются в соответствии с уравнениями (11).

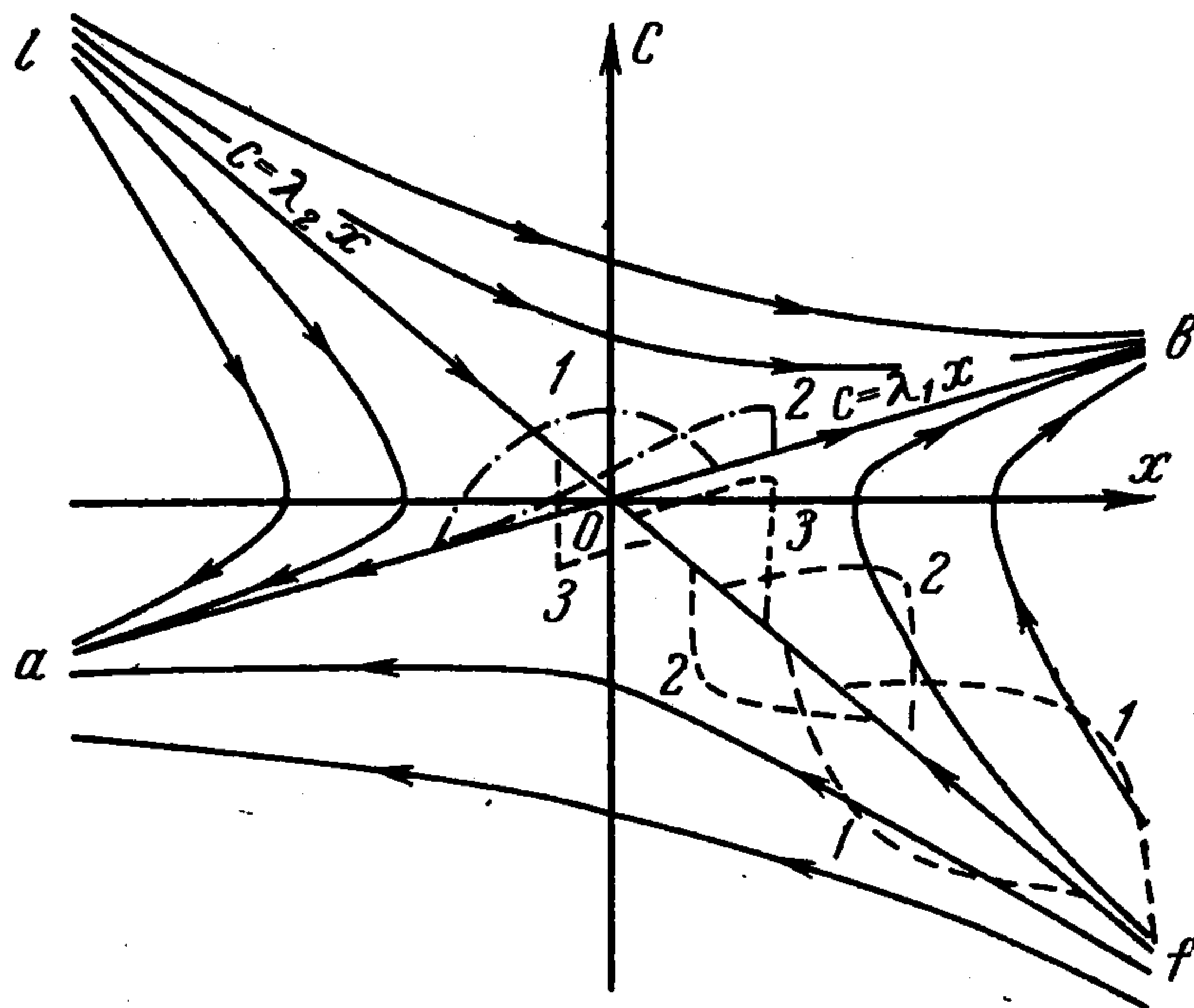
Так как поле «скоростей», задаваемое правыми частями уравнений (11), имеет постоянную дивергенцию, равную

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} &= \\ &= \alpha = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \end{aligned}$$

то $S = S_0 e^{\alpha t}$, где S_0 — площадь при $t = 0$.

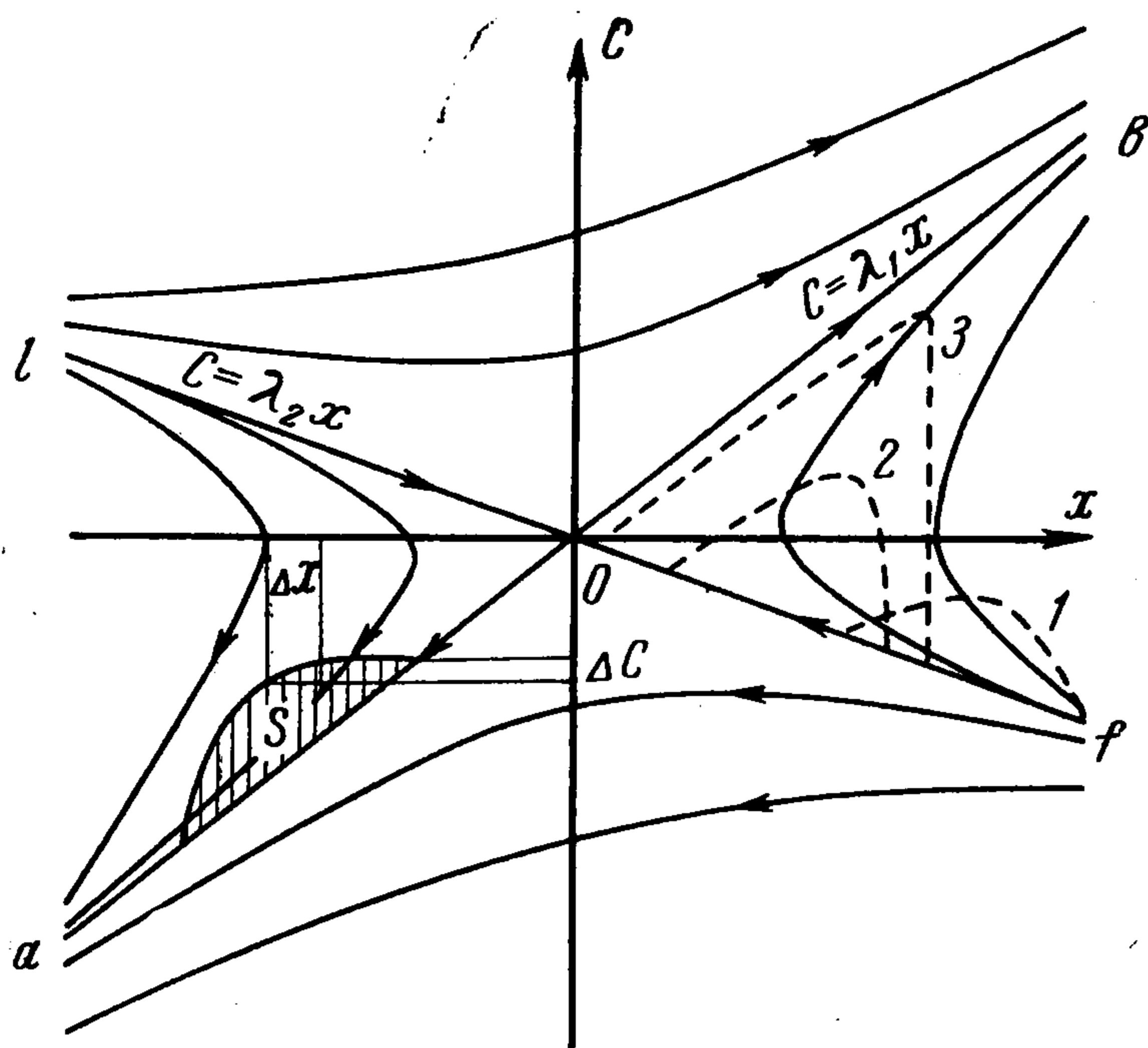
Таким же образом меняется площадь $\int \delta c dx$ произвольного ограниченного в пространстве возмущения $\delta c = c(x, t) - c_0(x)$, где δc отсчитывается от произвольной интегральной кривой системы (11), выбранной в качестве невозмущенного решения (фиг. 4). Если возмущение δc не сосредоточено целиком на некотором произвольно выбранном отрезке $[x_1, x_2]$, то, рассматривая изменение площади $\int \delta c dx$ на этом отрезке, необходимо учитывать поток площади через прямые $x = x_1$ и $x = x_2$, так что

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \delta c dx = \alpha \int_{x_1}^{x_2} \delta c dx + \int_{c(x_1)}^{c(x_1)+\delta c(x_1)} c dc - \int_{c(x_2)}^{c(x_2)+\delta c(x_2)} c dc \quad (14)$$



Фиг. 3

Рассмотрим нестационарное решение и две близкие точки, координаты x которых отличаются на Δx , а значения c на величину Δc (фиг. 4). Так как система (11) линейна, то Δx и Δc также удовлетворяют этой системе. Из уравнений (11) и фиг. 1—3 следует, что если начальное значение отношения $\Delta c / \Delta x > \lambda_2$, то эта величина с ростом времени стремится к предельному значению λ_1 , которое



Фиг. 4

представляет собой тангенс угла наклона собственного вектора.

Производная dc/dx стремится к пределу как $\exp[-(\lambda_1 - \lambda_2)t]$, а характеристика невозмущенного решения, проходящего через особую точку, стремится к критической точке как $\exp \lambda_2 t$ при $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ или как $\exp \lambda_1 t$ при $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Отсюда следует, что установление предельного наклона производной при $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ происходит быстрее, чем приближение невозмущенной характеристики к критической точке, а при $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ — медленнее.

Если $\Delta c / \Delta x < \lambda_2$, то это отношение за конечное время обращается в бесконечность.

В последнем случае непрерывное решение перестает существовать, и в последующие моменты времени необходимо рассматривать решение, содержащее разрывы. Таким образом, возмущение конечной протяженности по x стремится приобрести треугольную или пилообразную форму.

Как известно [7], в слабых ударных волнах приращения всех величин с точностью до членов второй степени по приращениям совпадают с приращениями величин в соответствующей простой волне. Таким образом, наличие слабой ударной волны не приводит к появлению за ней возмущений других переменных w_2, \dots, w_n .

Скорость ударной волны с той же точностью равна полусумме характеристических скоростей, вычисленных по состояниям до и после ударной волны. Отсюда следует, что наличие слабой ударной волны не будет приводить к дополнительному по сравнению с непрерывным случаем изменению со временем интеграла $\int \delta c dx$, и уравнение (14) остается справедливым.

Хотя в [7] рассматриваются гиперболические системы, однако результат сохраняет силу и для более общих систем, так как при доказательстве используется только то, что характеристика, соответствующая ударной волне, не кратная.

Рассмотрим поведение решений уравнения (10) при различных комбинациях знаков λ_1 и λ_2 .

Рост возмущений $\delta c = c(x, t) - c_0(x)$ во времени означает неустойчивость стационарного решения $u_{k0}(x)$, в то время как затухание возмущений δc не означает устойчивости $u_{k0}(x)$ на конечном отрезке оси x , так как причина неустойчивости может быть не связана с поведением решения в окрестности критической точки. Однако для краткости в последнем случае будем говорить, что решение устойчиво.

1. В случае $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ имеем особую точку — узел с положительными собственными направлениями. Поведение интегральных кривых системы (11) для этой особенности дано на фиг. 1. Из уравнений (11) и фиг. 1 видно, что любое непрерывное возмущение, отличное от нуля в точке $x = 0$ при $t = 0$, неограниченно растет со временем в окрестности этой точки. Передний и задний фронты такого возмущения будут двигаться от критической точки. Если один из фронтов представляет собой ударную волну, то скорость его движения от критической точки растет с ростом интенсивности ударной волны.

Таким образом, любое стационарное решение, проходящее через критическую точку рассмотренного типа, неустойчиво. Рост возмущений приведет к установлению нового стационарного решения, в котором знак s не меняется и совпадает со знаком начального возмущения при $x = 0$.

2. В случае $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ имеем особую точку — узел с отрицательными собственными направлениями (фиг. 2). При наличии такой особенности площадь и амплитуда любого ограниченного в пространстве возмущения стремятся к нулю. При этом передний и задний фронты возмущения движутся к критической точке.

Если на границе рассматриваемой области поддерживается постоянное значение возмущения, то при $t \rightarrow \infty$ установится новое стационарное решение, удовлетворяющее этому граничному условию. Если новое граничное значение s , задаваемое в точке $x = x_1$, удовлетворяет неравенству $\lambda_2 x_1 < s(x_1) < 0$, то осуществится непрерывное решение, проходящее через особую точку. При $s(x_1) < \lambda_2 x_1$ образуется решение с ударной волной вблизи начала координат.

3. Особая точка $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ будет седлом (фиг. 3, 4). Возможны четыре типа стационарных решений, проходящих через особую точку. На фиг. 3 эти решения представлены интегральными кривыми aob , lof , aof , lob .

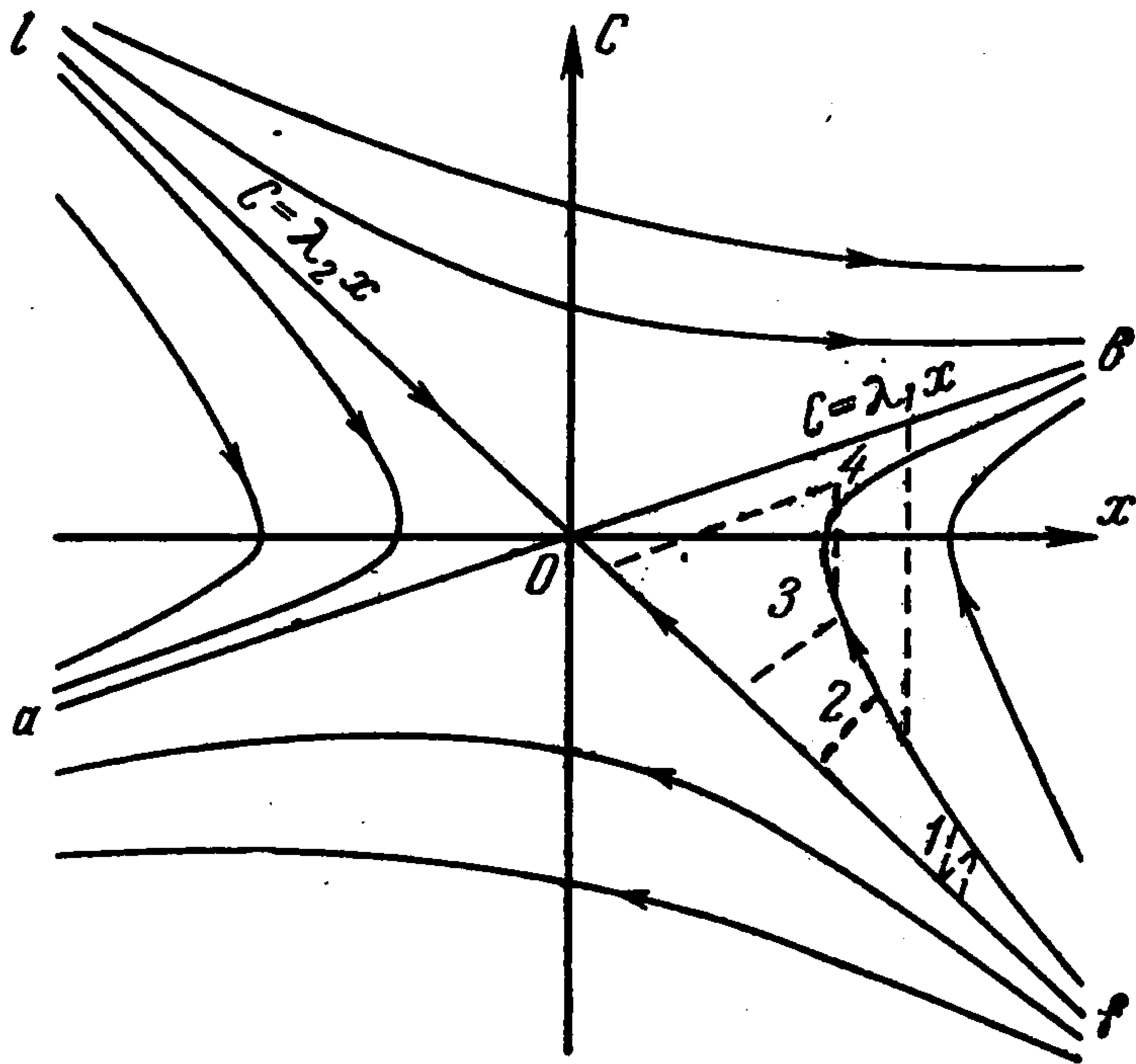
Рассмотрим возмущение решения aob . Величина δs стремится к нулю как $\exp \lambda_2 t$. Передний и задний фронты возмущения удаляются от критической точки. Возмущение решения aob для двух последовательных моментов времени 1 и 2 дано на фиг. 3 штрих-пунктирной линией.

Возмущения решения lof сходятся к критической точке. По прошествии достаточно большого времени любое ограниченное в пространстве возмущение приобретает вид треугольника, одна сторона которого лежит на прямой lof , другая параллельна aob , а третья параллельна оси ординат и представляет собой ударную волну. Сторона треугольника, параллельная прямой aob , с течением времени стремится к совпадению с этой прямой. Площадь возмущения растет при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$.

В последнем случае любое ограниченное в пространстве возмущение стремится к нулю, причем передний и задний фронты его движутся к критической точке. На фиг. 3 для случая $\alpha < 0$ вид положительного и отрицательного возмущений решения lof для последовательных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ изображен штриховой линией.

Если $\alpha > 0$, то развитие первоначального возмущения приводит к перестройке стационарного решения lof . Возмущения с положительными

δc приводят к образованию ударной волны, движущейся вправо от критической точки. В этом случае за ударной волной устанавливается решение lob . Возмущения с отрицательными δc приводят к установлению решения aof . Если начальное возмущение содержит δc обоих знаков, то устанавливается решение aob .



Фиг. 5

Вид положительного возмущения решения lof при $\alpha > 0$ для моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ представлен на фиг. 4 штриховой линией.

Если на границе рассматриваемой области поддерживается, начиная с некоторого момента времени, постоянное значение возмущения δc , то при $\alpha < 0$ с течением времени установится стационарное решение, содержащее ударную волну; положение ударной волны тем ближе к критической точке, чем меньше граничное значение δc .

На фиг. 5 изображены возмущения с положительным значением δc на границе для последовательных моментов времени t_1, t_2, t_3, \dots

Возмущения решения lob с положительными δc затухают так же, как положительные возмущения решения aob . Возмущения с отрицательными δc развиваются как отрицательные возмущения решения lof . В случае $\alpha > 0$ это приводит к решению aob .

Возмущения решения aof с отрицательными δc затухают, как отрицательные возмущения решения aob , а возмущения с положительными δc развиваются, как такие же возмущения решения lof , и при $\alpha > 0$ приводят к установлению решения aob .

Следовательно, решение aob всегда устойчиво в рассматриваемом здесь смысле, а решения lof, lob и aof устойчивы при $\alpha < 0$ и неустойчивы при $\alpha > 0$.

Таким образом, устойчивость решения в окрестности критической точки зависит от характера особенности стационарных решений в этой точке и определяется знаками коэффициентов α и β уравнения (13).

При $\alpha < 0$ любое решение устойчиво в окрестности критической точки. При $\alpha > 0$ все стационарные решения, в которых $c(x)$ обращается в нуль, неустойчивы, за исключением решения, которое представляется интегральной кривой, проходящей с положительным значением производной dc/dx через особую точку типа седла.

Заметим, что, если при изучении поведения возмущений в уравнении (8) сохранять только линейные по w члены, то, как следует из уравнений (12), эти возмущения затухают при $K < 0$ и неограниченно растут при $K > 0$. Учет нелинейности может привести и при $K > 0$ к затуханию возмущений, если $c_x < 0$ и $\alpha \equiv K + c_x < 0$. Изменение площади ограниченного по x возмущения в линейном и нелинейном приближениях описывается одним и тем же уравнением $S_t = S_0 \exp \alpha t$.

Различное поведение амплитуд возмущений в линейном и нелинейном приближениях связано с тем, что в нелинейном приближении возмущение стремится приобрести треугольную форму, и убывание площади возмущения означает одновременно убывание амплитуды. В линейном же случае амплитуда возмущения может стремиться к бесконечности, даже если его площадь стремится к нулю.

Приведем некоторые примеры течений с переходом через скорость звука.

Уравнения неразрывности движения и энергии квазиодномерного течения электропроводного газа при малых магнитных числах Рейнольдса¹ имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \rho u s &= m, \quad \rho u u' + p' + \sigma B (uB - E) = 0 \\ \left[u s \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} p + \frac{\rho u^2}{2} \right) \right]' + \sigma E s (uB - E) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь s — площадь сечения канала, u — скорость вдоль оси x , ρ — плотность, p — давление, m — расход, κ — отношение теплоемкостей, E — напряженность электрического поля, B — напряженность магнитного поля, σ — электропроводность среды, штрихом обозначены производные по x .

Величины s , B и E — заданные функции x . Векторы B и E взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, ортогональной оси x . Вектор E перпендикулярен стенкам — проводникам канала, а вектор B перпендикулярен стенкам — изоляторам.

Уравнения (15) получены в предположении, что газ совершенный, невязкий и не теплопроводный. Как следует из [10], уравнения (15) при различном задании величин, определяющих течение, могут иметь особенности всех рассмотренных выше типов.

Значения производных M' ($M = u/a$ — число Маха), вычисленные вдоль собственных направлений в особой точке, определяются из уравнения

$$M'^2 - \alpha M' - \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{\kappa + 1}{2} \frac{\kappa u \sigma}{m u^2} \left(uB - \frac{\kappa - 1}{\kappa} E \right) \left(uB - \frac{\kappa}{\kappa + 1} E \right) \quad (16)$$

Величина β выражается через B , B' , E , E' , s , s' , s'' , κ , σ (см. формулу (2.6) работы [10], где проводимость σ считалась постоянной). При $\alpha < 0$ течения устойчивы в окрестности точек перехода через скорость звука при любом типе особой точки.

Из (16) следует, что величина α отрицательна при выполнении одного из условий

$$uB > \frac{\kappa}{\kappa + 1} E, \quad uB < \frac{\kappa - 1}{\kappa} E$$

Заметим, что $\alpha < 0$ всегда для режимов с отводом электрической энергии, так как для них выполняется условие $uB - E > 0$.

Рассмотрим теперь одномерные магнитогидродинамические течения в канале переменного сечения при конечных значениях магнитных чисел Рейнольдса. Уравнения, описывающие такие течения, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u s &= m, \quad \rho u u' + p' + B\theta = 0, \quad u p' + \kappa \rho u u' + \kappa \rho u s' / s - (\kappa - 1) \nu_m \theta^2 = 0 \\ u' B + B' u + u B s' / s - \nu_m \theta' &= 0, \quad B' - \theta = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь ν_m — магнитная вязкость, предполагаемая в дальнейшем постоянной, остальные обозначения те же, что и в (15). При выводе уравнений (17) магнитные силовые линии предполагались параллельными прямыми, перпендикулярными к вектору скорости.

Поведение возмущений в линейном приближении для таких течений без перехода через скорость звука рассмотрено в работе [11]. Образование ударных волн при распространении возмущений в магнитогидродинамических течениях, рассматриваемых без предположения о прямолинейности магнитных силовых линий, но при $\nu_m = 0$ (используются уравнения адиабатичности и вмороженности магнитного поля), изучалось в [12].

¹ Исследование устойчивости этих течений в линейном приближении проведено в работе [9]

Разрешим уравнения (17) относительно производных и, вводя вместо одной из переменных, например вместо ρ , число Маха M , получим

$$M' = \frac{M}{2(1-M^2)} \left\{ \frac{\kappa+1}{\kappa\rho u} \theta \left[uB + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (1+\kappa M^2) v_m \theta \right] - \frac{s}{s'} [2 + (\kappa-1) M^2] \right\}$$

$$u' = \frac{u}{1+\kappa M^2} \left(2 \frac{M'}{M} + \frac{s'}{s} - \frac{B\theta}{p} \right), \quad p' = -(\rho u u' + B\theta) \quad \left(\rho = \frac{M^2}{\kappa\rho u^2} \right) \quad (18)$$

$$\theta' = \frac{1}{v_m} \left(u' B + u\theta + \frac{uBs'}{s} \right), \quad B' = \theta$$

В особой точке выполняются условия $\theta[uB + (\kappa-1)v_m\theta] = \kappa\rho u s' / s$, $M = 1$.

В окрестности особой точки приращения u , p , θ и B выражаются через приращения M и x согласно (18), а производные M' , вычисленные вдоль собственных направлений, определяются уравнением

$$M'^2 - \alpha M' - \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{1}{2\kappa v_m \rho u} (uB + \kappa v_m \theta) [uB + (\kappa-1)v_m\theta]$$

$$\beta = -\frac{\kappa+1}{4\kappa v_m \rho u} \left\{ \frac{1}{\kappa+1} \left(\frac{s'}{s} - \frac{B\theta}{p} \right) [uB(b + \kappa v_m \theta) + (\kappa-1)b v_m \theta] + \frac{v_m \theta^2}{p} (\rho u + bB) + \right.$$

$$\left. + u \left(\theta + \frac{s'}{s} B \right) [b + (\kappa-1)v_m\theta] \right\} + \frac{\kappa+1}{4} \left(\frac{s'}{s} \right)', \quad b = uB + (\kappa-1)v_m\theta \quad (19)$$

Из выражений (19) видно, что, располагаясь выбором формы канала s и величиной θ в окрестности особой точки, можно иметь любой тип особенности. Если дискриминант уравнения (19) положителен, т. е. $\Delta = \alpha^2 / 4 + \beta > 0$, то имеются непрерывные решения, проходящие через особую точку:

(1) при $\beta > 0$ — особая точка — седло; при $\alpha < 0$ оба решения, проходящие через особую точку, устойчивы; при $\alpha > 0$ решение, имеющее $M' < 0$ (решение *lof* на фиг. 3), неустойчиво;

(2) при $\beta < 0$, $\alpha < 0$ — особая точка — узел с отрицательными собственными направлениями, и все решения, проходящие через нее, устойчивы;

(3) при $\beta < 0$, $\alpha > 0$ — особая точка — узел с положительными собственными направлениями, и все решения, проходящие через нее, неустойчивы.

Из равенства (19) нетрудно видеть, что $\alpha < 0$ при выполнении одного из условий

$$uB < -\kappa v_m \theta, \quad uB > -(\kappa-1)v_m \theta$$

При $\Delta < 0$ особенность — фокус и непрерывных решений, проходящих через особую точку, не существует.

Поступила 22 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Fundamentals of Gas Dynamics. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. press, 1958. Имеется русск. пер.: Основы газовой динамики. Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, переработ. и доп., Гостехиздат, 1955.
3. Г у б к и н К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958 г. т. 22, вып. 4.
4. Р ы ж о в О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
5. Л у г о в ц е в А. А. Распространение слабых ударных волн в магнитном поле. ПМТФ, 1966, № 4.
6. К о р о б е й н и к о в В. П. О затухании слабых магнитогидродинамических ударных волн. Магнитная гидродинамика, 1967, № 2.
7. L a x P. D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws II. Commun. Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, No. 4.
8. R e s l e r E. L., S e a r s W. R. The prospects for magneto-Aerodynamics. J. Aerospace Sci., 1958, vol. 25, No. 4.
9. С л о б о д к и н а Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, вып. 3.
10. С л о б о д к и н а Ф. А. Качественное исследование уравнений квазиодномерного магнитогидродинамического течения в каналах. ПМТФ, 1966, № 3.
11. А р т ю ш к о в Е. В., М о р о з о в А. И. О продольной устойчивости одномерных течений проводящего газа. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
12. R u b i n S. G. Magnetogasdynamic channel Flows. AIAA Journal, 1965, vol. 3, № 2.