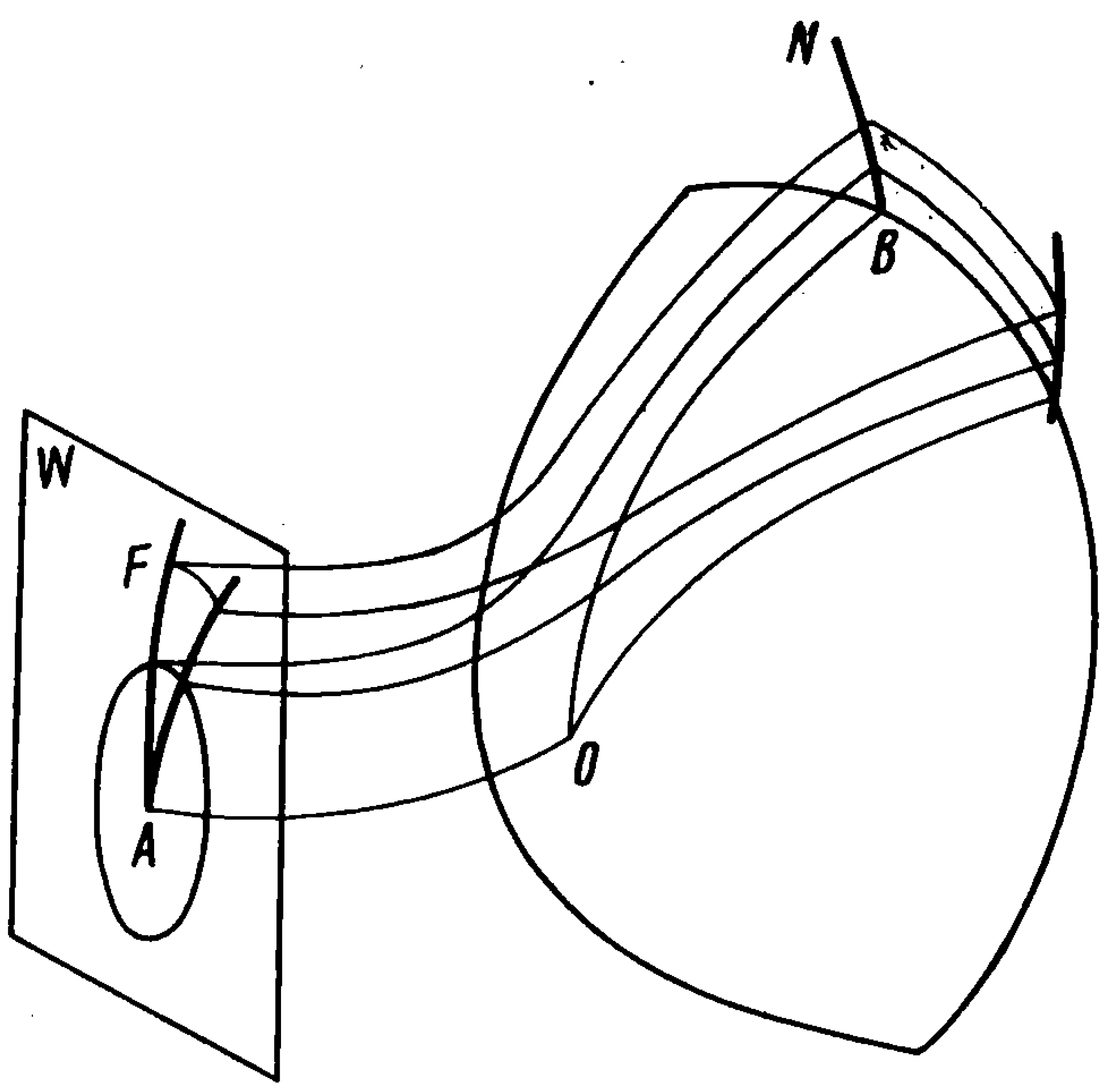
ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ЭНТРОПИИ НА КРИТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ТОКА[1]

Э. Г. Шифрин (Москва)

Рассмотрим пространственное обтекание гладкого тела вихревым потоком идеального газа. Предположим, что существует критическая линия тока, разветвляющаяся в виде узла в изолированной точке торможения O на поверхности тела, так что вся поверхность тела в достаточно малой окрестности точки O покрыта линиями тока, выходящими из этой точки. Введем вблизи критической линии тока и поверхности тела систему координат, связанную с поверхностями тока.

Пусть W — нормальная плоскость к критической линии тока в некоторой точке A, не совпадающей с точкой O. Проведем в этой плоскости семейство окружностей с центром в точке A. Поверхности тока, проходящие через эти окружности, будем считать координатным семейством u_2. На плоскости W имеем $u_2 = r$, где r — радиус индуцирующей u_2 окружности. При $r = 0$ поверхность u_2 состоит из поверхности тела и критической линии тока.



Фиг. 1

Проведем в достаточно малой окрестности точки O на поверхности тела замкнутый контур L, пересекающий каждую линию тока, выходящую из точки O, только один раз (точка O расположена на поверхности тела внутри L). Через каждую точку контура L проведем кривую N, не касающуюся линий тока и поверхности тела. Поверхности тока, проходящие через семейство кривых N, будем считать координатным семейством u_3.

От координатного семейства u_1 (не являющегося семейством поверхностей тока) потребуем только, чтобы одна из поверхностей этого семейства, проходящая через точку A, имела в ней касание достаточно высокого порядка с плоскостью W.

Пусть построенная координатная система трижды ортогональна в некоторой (произвольной) точке B на поверхности тела.

Обозначим через F линию $u_3 = \text{const}$ на плоскости W. Все линии F пересекаются в точке A, образуя узел, так как каждая поверхность u_3 непрерывна и содержит некоторую линию тока, выходящую из критической линии тока в точке O. Легко установить, что тип этого узла не зависит от выбора кривых N, направляющих семейства u_3; для определенности будем считать, что все кривые N ортогональны поверхности тела.

Производные по направлениям линий пересечения поверхностей u_2 и u_3, u_1 и u_3, u_1 и u_2 будем обозначать так:

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad h_i = (x_{u_i}^2 + y_{u_i}^2 + z_{u_i}^2)^{1/2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь h_i — коэффициенты Ламэ.

Уравнение неразрывности в форме закона сохранения массы для элементарной трубки тока, образованной поверхностями u_2, $u_2 + du_2$, u_3, $u_3 + du_3$, имеет вид

$$q(\lambda)\, h_2 h_3 \,|\sin\beta\cos\gamma| = G(u_2, u_3), \quad q(\lambda) = \lambda\, [{}^1/_2 (k+1) - {}^1/_2 \lambda^2 (k-1)]^{1/(k-1)} \qquad (1)$$

Здесь λ — коэффициент скорости, γ — угол между нормалью к поверхности u_1 и вектором скорости, β — угол между линиями пересечения поверхностей u_2 и u_3 с поверхностью u_1, $G(u_2, u_3)$ — произвольная функция, характеризующая расход газа через элементарную трубку тока и зависящая от выбора семейств u_2, u_3.

[1] Как стало известно автору, родственная задача исследовалась М. Д. Ладыженским.

Умножив скалярно уравнение $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \rho^{-1}\nabla p = 0$ на единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к поверхности u_2 и на единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ нормали к линии тока, касательный к поверхности u_2, получим, воспользовавшись уравнением Бернулли и условием изэнтропичности

$$\varkappa_n = -\frac{\partial \ln \lambda}{\partial n} - \frac{1}{kRM^2}\frac{\partial S}{\partial n}, \qquad \varkappa_\tau = -\frac{\partial \ln \lambda}{\partial \tau} - \frac{1}{kRM^2}\frac{\partial S}{\partial \tau} \tag{2}$$

Здесь $\varkappa_n$ и $\varkappa_\tau$ — нормальная и геодезическая кривизны линии тока на поверхности u_2, символы $\partial / \partial n$ и $\partial / \partial \tau$ означают производные по направлениям векторов $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$, через k обозначен показатель адиабаты; при выводе уравнений (2) без ограничения общности полагалось, что температура торможения постоянна во всем потоке.

В точке B на поверхности тела, в которой система координат триортогональна, уравнения (2) принимают вид

$$\varkappa_n = -\frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_2} - \frac{1}{kRM^2}\frac{\partial S}{\partial s_2}, \qquad \varkappa_\tau = -\frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_3} \tag{3}$$

так как, ввиду предположения о существовании критической линии тока, энтропия постоянна на поверхности тела. Так как $S = S(u_2, u_3)$, производная $\partial S / \partial s_2$ в точке B выражается через производную $\partial S / \partial s_2$ по направлению соответствующей линии F в точке A. Используя уравнение (1), получим

$$\left.\frac{\partial S}{\partial s_2}\right|_B = \left.\frac{\partial S}{\partial s_2}\right|_A \frac{h_2|_A}{h_2|_B} = \left.\frac{\partial S}{\partial s_2}\right|_A \frac{[q(\lambda)\, h_3]_B}{[q(\lambda)\, h_3 \sin\beta]_A} \tag{4}$$

Из того обстоятельства, что кривые F образуют в точке A узел, следует, что в плоскости W коэффициент Ламэ $h_3 \to 0$ при $u_2 \to 0$. В то же время семейство u_3 всегда можно пронумеровать так, чтобы $h_3 \neq 0$ на поверхности тела.

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda \neq 0$ в точке B. Поскольку нормальная кривизна линии тока на поверхности гладкого тела ограничена, из уравнений (3), (4) следует, что для ограниченности производной $\partial\lambda / \partial n$ на поверхности тела необходимо, чтобы производная $\partial S / \partial s_2$ по направлению соответствующей линии F в точке A обращалась в нуль.

Ввиду произвольности точки B производная $\partial S / \partial s_2$ должна при этом обращаться в нуль при перемещении по направлению к точке A вдоль любой линии F. Если узел линий F звездообразный (или частично звездообразный), то для ограниченности производной $\partial\lambda / \partial n$ на поверхности тела нужно, чтобы в точке A выполнялись необходимые условия существования экстремума энтропии. Тот же вывод получается и в случае не звездообразного узла, если все линии F не касаются в точке A поверхности $S = \text{const}$.

Предположим теперь, что узел линий F в точке A не звездообразный, и исключительное направление узла (направление, которого касаются все линии F из некоторого пучка) касается поверхности $S = \text{const}$, проходящей через точку A. Введем в плоскости W декартову систему координат xAy, направив ось Ax по исключительному направлению узла.

Пусть семейство кривых F в плоскости W задано $F = F(x, y)$. При перемещении вдоль любой кривой F, не совпадающей с осью Ax, по направлению к точке A,

$$F_x \to \infty, \quad F_y \to \infty, \quad dy / dx = -F_x / F_y \to 0 \tag{5}$$

где x, y — координаты точки на кривой F.

Коэффициент Ламэ h_3 в точке C, расположенной на кривой F в достаточно малой окрестности точки A, выражается в виде

$$h_3 = \frac{1}{|\nabla F|\sin\beta} = \frac{1}{F_y}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{yF_x}{xF_y}\right)^{-1/2} \tag{6}$$

Здесь β — угол в точке C между кривыми $F = \text{const}$ и $u_2 = \text{const}$.

В достаточно малой окрестности точки A на кривой $F = \mathrm{const}$, будем иметь $y / x \to 0$ при $C \to A$, поэтому при перемещении точки C по кривой $F = \mathrm{const}$ по направлению к точке A коэффициент Ламэ h_3 убывает как $1 / F_y$.

Производная $\partial S / \partial s_2$ по направлению линии F в точке C выражается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial s_2} = \frac{-S_x F_y + S_y F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \tag{7}$$

Пусть производные S_x и S_y непрерывны в некоторой окрестности точки A и

$$S_x = O(r^\delta), \quad S_y = S_y|_A + O(r^\varepsilon), \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (\delta > 0, \varepsilon > 0) \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), получим

$$\frac{\partial S}{\partial s_2} = \frac{S_y|_A F_x + F_y O(r^\delta) + F_x O(r^\varepsilon)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \tag{9}$$

Производная $\partial S / \partial s_2$ в точке B, в соответствии с (5), (6), (9), выразится в виде

$$\frac{1}{h_3|_B} \frac{\partial S}{\partial s_2}\bigg|_B = \frac{q(\lambda_B)}{q(\lambda_A)} \lim_{C \to A} \left[\frac{1}{h_3 \sin\beta} \frac{\partial S}{\partial s_2}\right]_C = \frac{q(\lambda_B)}{q(\lambda_A)} \lim_{C \to A} [F_y O(r^\delta) + S_y|_A F_x]_C$$

Легко видеть, что выражение в квадратной скобке может быть ограниченным только на изолированной кривой $F = \mathrm{const}$. Поэтому если $S_y \neq 0$ в точке A, то при приближении к точке B вдоль поверхности u_3 производная $\partial S / \partial s_2 \to \infty$, по крайней мере, как $F_x|_C$ при перемещении к точке A по соответствующей кривой F.

Итак, по существу доказано, что если на поверхности тела в некоторой окрестности точки O существует участок, не состоящий только из одной линии тока, на котором производная $\partial \lambda / \partial n$ ограничена, то на критической линии тока выполняются необходимые условия существования экстремума энтропии.

Если же на критической линии тока эти условия не выполняются, то производные $\partial \lambda / \partial n$ и $\partial S / \partial n$ обращаются в бесконечность почти всюду на поверхности тела, за исключением изолированных линий тока, на которых происходит изменение знака производных $\partial S / \partial n$, $\partial \lambda / \partial n$. Это означает, что поверхность тела почти всюду представляет собой огибающую поверхностей $\lambda = \mathrm{const}$.

Действительно, из условия ограниченности скорости, $\lambda \leqslant \sqrt{(k+1)/(k-1)}$ следует, что точки, в которых производная $\partial \lambda / \partial s_1$ по направлению линии тока обращается в бесконечность, являются изолированными на линии тока. Из условия ограниченности углов наклона вектора скорости следует, что точки, в которых обращается в бесконечность геодезическая кривизна линии тока на поверхности тела, также являются изолированными на линии тока. Поэтому из уравнения (3) вытекает изолированность на линии тока точек, в которых производная $\partial \lambda / \partial s_3 = \infty$.

В зависимости от знака производной $\partial S / \partial n$ на поверхности тела, поверхности $\lambda = \mathrm{const}$ будут касаться поверхности тела различным образом: либо поверхность $\lambda = \mathrm{const}$ касается направления линии тока, обращенного к точке O, либо поверхность $\lambda = \mathrm{const}$ касается направления линии тока, обращенного от точки O. На линиях тока, на которых производная $\partial S / \partial n$ изменяет знак, происходит изменение «типа» касания; на этих линиях тока поверхности $\lambda = \mathrm{const}$ не являются гладкими.

В заключение заметим, что выполнение на критической линии тока необходимых условий существования экстремума энтропии, вообще говоря, не является достаточным для ограниченности производных $\partial S / \partial n$ и $\partial \lambda / \partial n$ на поверхности тела. В качестве примера можно привести осесимметричное обтекание тела вихревым дозвуковым потоком, в котором энтропия в окрестности критической линии тока на бесконечном удалении от тела (где поток прямолинейный) распределяется по закону $S = Y^\alpha$, где Y — ордината линии тока на бесконечном удалении от тела и $1 < \alpha < 2$. Легко видеть, что в этом случае производная $\partial S / \partial s_2$ при приближении к поверхности тела (при $Y \to 0$) стремится к бесконечности как $Y^{\alpha-2}$.

Поступила 3 VIII 1966