К ОБЩЕМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Дан Г. Ионеску (Бухарест, Румыния)

Рассматриваются некоторые формы общего решения уравнений осесимметричных установившихся медленных движений вязких жидкостей. Строится общее решение в виде, представляющем собой одновременно систему основных формул метода интегрирования, основанного на свойствах p-аналитических функций [1].

1. Рассмотрим уравнения Стокса и уравнение непрерывности в цилиндрических координатах и в случае осесимметричных установившихся движений

$$\frac{\partial p}{\partial r}-\mu\Delta_1 v_r+\mu\frac{v_r}{r^2}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}-\mu\Delta_1 v_z=0 \qquad \left(\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) показывает, что существует функция тока $\Psi(r, z)$ такая, что

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad v_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{1.4}$$

Подставляя эти выражения в (1.1) и (1.2), получим, что Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2\Delta_2\Psi=0 \qquad \left(\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{1.5}$$

2. Для интегрирования уравнения (1.5) воспользуемся p-аналитическими функциями. Напомним их определения, а также свойства, которыми будем пользоваться в дальнейшем (см., например, [1], гл. 1, § 2, 3). Функция $f(\zeta)=\mu(x, y)+iv(x, y)$ комплексного переменного $\zeta=x+iy$ называется p-аналитической с характеристикой $p=p(x, y)$ в области D, если в этой области она определена однозначна, и ее вещественная и мнимая части имеют непрерывные частные производные и удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.1}$$

Если $p=p(\beta)$, где β — гармоническая функция от x и y, и $\omega=\alpha+i\beta$ — аналитическая функция от $\zeta=x+iy$, то под операторной производной функции $f(\zeta)$ по сопряженной переменной Z понимается выражение (2.2)

$$\frac{d_p' f(\zeta)}{dZ}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}-p\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) \qquad \left(Z=X+iY=\alpha+i\int\frac{d\beta}{p}\right)$$

и под операторной производной функции $f(\zeta)$ по антисопряженной переменной $\overline{Z}=X-iY$ — выражение

$$\frac{d_p' f(\zeta)}{d\overline{Z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}+p\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) \tag{2.3}$$

Если $f(\zeta)$ функция p-аналитическая, то

$$\frac{d_p' f(\zeta)}{dZ}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}+i\frac{\partial v}{\partial\alpha}=\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial\beta}-ip\frac{\partial u}{\partial\beta}, \qquad \frac{d_p' f(\zeta)}{d\overline{Z}}=0 \tag{2.4}$$

Однозначная функция комплексного переменного $f(\zeta)$ называется операторно интегрируемой по сопряженной переменной Z в области D, если существует функция комплексного переменного $f^*(\zeta)$, непрерывная в области D и такая, что в области D существует $d_p' f^*(\zeta)\,/\,dZ$, и имеет место равенство $d_p' f^*(\zeta)\,/\,dZ=f(\zeta)$.

Неопределенный операторный интеграл по сопряженной переменной Z функции $f(\zeta)$ обозначается через $\int' f(\zeta)\, d_p' Z$.

Для того чтобы операторный интеграл по сопряженной переменной Z произвольной p-аналитической функции $f(\zeta)$ был p-аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы $p = p(\beta)$, где β — гармоническая функция от x и y. Пусть теперь требуется найти общее решение уравнений четвертого порядка

$$\Delta_1^* \Delta_1^* u = 0 \qquad \left(\Delta_1^* = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) \tag{2.5}$$

$$\Delta_2^* \Delta_2^* v = 0 \qquad \left(\Delta_2^* = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) \tag{2.6}$$

Если $f = u + iv$, то уравнения (2.5) и (2.6) можно записать в виде

$$\frac{d_p'^4 f(\zeta)}{dZ^2\, d\bar{Z}^2} = 0$$

Отсюда при помощи неопределенного операторного интеграла по сопряженной переменной Z получаем общие решения этих уравнений, соответственно, в виде

$$u = 2\alpha\,[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi}_1(\zeta)] + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\zeta) \tag{2.7}$$

$$v = 2\alpha\,[\Phi_1(\zeta) - \overline{\Phi}_1(\zeta)] + \chi(\zeta) - \bar{\chi}(\zeta) \tag{2.8}$$

где $\Phi_1(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ — произвольные p-аналитические функции, а $\overline{\Phi}_1(\zeta)$ и $\bar{\chi}(\zeta)$ — функции, комплексно-сопряженные с $\Phi_1(\zeta)$, соответственно, с $\chi(\zeta)$.

3. Полагая $\zeta = x + iy = r + iz$, $p = r^{-1}$, $\omega = \alpha + i\beta = -z + ir$, уравнение (2.5) сведем к (1.5); следовательно, общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\Psi = -2z\,[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi}_1(\zeta)] + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\zeta) \tag{3.1}$$

где $\Phi_1(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ — произвольные r^{-1}-аналитические функции, а $\overline{\Phi}_1(\zeta)$ и $\bar{\chi}(\zeta)$ — соответствующие сопряженные функции. Однако, ввиду упрощения дальнейших формул, воспользуемся для Ψ выражением

$$\Psi = z\,[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi}_1(\zeta)] + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\zeta) \tag{3.2}$$

эквивалентным (3.1).

Обозначая $V_r = rv_r$ и учитывая соотношения (1.4) и (2.3), а также то, что Ψ — вещественная функция, и пользуясь затем выражением (3.2), получим

$$V_r + iv_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z} - i\,\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -2\,\frac{d_p'\Psi}{d\bar{Z}} = \Phi_1(\zeta) - 2z\,\overline{\frac{d_p'\Phi_1(\zeta)}{dZ}} - \overline{\Phi}_2(\zeta) \tag{3.3}$$

где $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta) = -\Phi_1(\zeta) + 2d_p'\chi(\zeta) / dZ$ — произвольные r^{-1}-аналитические функции от $\zeta = r + iz$. Введем обозначение

$$2\Omega = r\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = r\,\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}$$

Учитывая уравнение (1.1) и уравнение (1.3), продифференцированное по r, затем уравнение (1.2) и уравнение (1.3), продифференцированное по z, имеем

$$\frac{\partial(2\mu\Omega)}{\partial r} = r\,\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \frac{\partial(2\mu\Omega)}{\partial z} = -r\,\frac{\partial p}{\partial r}$$

Следовательно, $2\mu\Omega + ip$ будет r^{-1}-аналитической функцией от $\zeta = r + iz$. Используя уравнение непрерывности $(1/r)\,\partial V_r / \partial r + \partial v_z / \partial z = 0$, находим

$$2\Omega = \left(r\,\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) - i\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 2\,\frac{d_p'(V_r + iv_z)}{dZ} = 4R\left\{\frac{d_p'\Phi_1(\zeta)}{dZ}\right\}$$

Следовательно,

$$2\mu\Omega + ip = 4\mu\,\frac{d_p'\Phi_1(\zeta)}{dZ} \tag{3.4}$$

В силу соотношений (2.4), формулы (3.3) и (3.4) можно еще написать в виде

$$V_r + iv_z = \Phi_1(\zeta) + 2z\frac{\partial\overline{\Phi}_1(\zeta)}{\partial z} - \overline{\Phi}_2(\zeta), \quad 2\mu\Omega + ip = -4\mu\frac{\partial\Phi_1(\zeta)}{\partial z} \tag{3.5}$$

Формулу (3.5), представляющую собой общее решение системы (1.1) — (1.3), можно также преобразовать, заменяя комплексную переменную $\zeta = r + iz$ комплексной переменной $z = x + iy$, а функции $-i\Phi_1(\zeta)$ и $-i\Phi_2(\zeta)$ — соответственно функциями $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$.

Но, если функция $f(\zeta)$ p-аналитическая, то функция $if(\zeta)$ также p^{-1}-аналитическая; отсюда следует, что формулы (3.5) можно также написать в виде

$$v_y - iV_x = \Phi_1(z) - 2y\frac{\partial\overline{\Phi}_1(z)}{\partial y} + \overline{\Phi}_2(z), \quad p - 2i\mu\Omega = -4\mu\frac{\partial\Phi_1(z)}{\partial y} \quad (V_x = xv_x) \tag{3.6}$$

Здесь $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ — произвольные x-аналитические функции от $z = x + iy$.

Формулы (3.6) аналогичны основным формулам, установленным в работах [2,3] для случая плоских течений вязких жидкостей. Они составляют как общее решение системы (1.1) — (1.3), так и основные формулы применения теории p-аналитических функций в гидродинамике вязких жидкостей. Соотношения, аналогичные первым формулам (3.5) и (3.6), были получены Г. Н. Положим в теории упругости [4].

4. Формулы (3.5) дают возможность вывести и другие формы общего решения системы (1.1) — (1.3). Для этого положим

$$\Phi_1(\zeta) - 2z\frac{\partial\overline{\Phi}_1(\zeta)}{\partial z} + \overline{\Phi}_2(\zeta) = -r\frac{\partial\Lambda}{\partial r} - i\frac{\partial\Lambda}{\partial z} \tag{4.1}$$

где $\Lambda(r,z)$ — вещественная функция, и введем r^{-1}-аналитическую функцию

$$\Phi_1^*(\zeta) = M + iN = 2\int{}'\Phi_1(\zeta)\, d_p{}'Z$$

Здесь Z — сопряженная переменная, соответствующая характеристике $p = r^{-1}$, а $\omega = \alpha + i\beta = -z + ir$. Согласно (2.4), имеем

$$2\Phi_1(\zeta) = \frac{d_p{}'\Phi_1^*(\zeta)}{dZ} = -\frac{\partial M}{\partial z} - i\frac{\partial N}{\partial z} = r\frac{\partial N}{\partial r} - i\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r} \tag{4.2}$$

так что первую формулу (3.5) можно еще написать (4.3)

$$V_r + iv_z = 2\Phi_1(\zeta) - \left[\Phi_1(\zeta) - 2z\frac{\partial\overline{\Phi}_1(\zeta)}{\partial z} + \overline{\Phi}_2(\zeta)\right] = r\frac{\partial}{\partial r}(\Lambda + N) + i\frac{\partial}{\partial z}(\Lambda - N)$$

С другой стороны, обозначая $\Phi_1(\zeta) = P + iQ$, $\Phi_2(\zeta) = R + iS$, из соотношения (4.1) видим

$$r\frac{\partial\Lambda}{\partial r} = -P + 2z\frac{\partial P}{\partial z} - R, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial z} = -Q - 2z\frac{\partial Q}{\partial z} + S$$

Следовательно, $\Delta_1\Lambda = -4\partial Q / \partial z = 2\partial^2 N / \partial z^2$. Учитывая это соотношение, а также уравнение непрерывности (1.3), написанное в виде $\Delta_1(\Lambda + N) - 2\partial^2 N / \partial z^2 = 0$, в силу формулы (4.3), получим $\Delta_1 N = 0$. Так как $\Delta_1\Lambda = 2\partial^2 N / \partial z^2$ и $\Delta_1 N = 0$, то имеем $\Delta_1\Delta_1\Lambda = 0$.

Наконец, из второго соотношения (3.5) следует $p = -4\mu\partial Q / \partial z = \mu\Delta_1\Lambda$. Следовательно, общее решение системы (1.1) — (1.3) можно положить в форме [5]

$$v_r = \frac{\partial}{\partial r}(\Lambda + N), \quad v_z = \frac{\partial}{\partial z}(\Lambda - N), \quad p = \mu\Delta_1\Lambda, \quad \Delta_1 N = 0, \quad \Delta_1\Delta_1\Lambda = 0 \tag{4.4}$$

аналогичной первой форме Лява в теории упругости ([6], стр. 275).

5. Положим в (4.4) $\Lambda + N = \partial\Xi / \partial z$ и $2\partial N / \partial z = \Delta_1 \Xi$; поскольку $\Delta_1 N = 0$, имеем $\Delta_1 \Delta_1 \Xi = 0$. Следует, что общее решение системы (1.1) — (1.3) можно поставить в форме [5]

$$v_r = \frac{\partial^2 \Xi}{\partial r\, \partial z}, \quad v_z = -\Delta_1 \Xi + \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2}, \quad p = \mu \frac{\partial}{\partial z} \Delta_1 \Xi, \quad \Delta_1 \Delta_1 \Xi = 0 \tag{5.1}$$

аналогичной второй форме Лява в теории упругости ([6], стр. 276).

6. Положим в (4.4) $\Lambda - N = \psi + \eta$ и $\partial N / \partial r = -\psi / r$; поскольку $\Delta_1 N = 0$ и $\Delta_1 \Lambda = 2\partial^2 N / \partial z^2$, имеем $\Delta_1 \eta = 0$ и $\Delta_2 \varphi = 0$. Общее решение системы (1.1) — (1.3), следовательно, можно положить в форме [5]

$$v_r = -2 \frac{\psi}{r} + \frac{\partial}{\partial r}(\psi + \eta), \quad v_z = \frac{\partial}{\partial z}(\psi + \eta), \quad p = \mu \Delta_1 \psi, \quad \Delta_1 \eta = 0, \ \Delta_2 \psi = 0 \tag{6.1}$$

аналогичной форме А. Тимпе в теории упругости [7].

7. Положим, в (4.4) величину $\Lambda = (1 / r)\, \partial^2 \omega / \partial r \partial z$ и рассмотрим такую функцию $T(r, z)$, чтобы функция $T + 2iN$ комплексного переменного $\zeta = r + iz$ была бы r^{-1}-аналитической функцией. Так как $\Delta_1 N = 0$, то следует $\Delta_2 T = 0$, и так как $\Delta_1 \Lambda = 2\partial^2 N / \partial z^2$ и $\Delta_1 [(1 / r) \partial\omega / \partial r] = (1 / r)\, \partial (\Delta_2 \omega) / \partial r$, то смешанная производная $\partial^2 (\Delta_2 \omega - T) / \partial r \partial z = 0$; отсюда имеем $\Delta_2 \omega = T + A(r) + B(z)$, где $A(r)$ и $B(z)$ — произвольные функции. Если принять $A(r) = 0$, $B(z) = 0$, то получим общее решение системы (1.1) — (1.3) в форме [5]

$$\begin{gathered} v_r = \frac{1}{2r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3}, \quad v_z = -\frac{1}{2r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \omega}{\partial r\, \partial z^2} \\ p = \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z} \Delta_2 \omega, \quad \Delta_2 T = 0, \quad \Delta_2 \Delta_2 \omega = 0 \end{gathered} \tag{7.1}$$

аналогичной форме Г. Д. Гродского в теории упругости (см., например, [8], § 51).

Формулы (7.1) могут быть записаны также в виде

$$\begin{gathered} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \Delta_2 \omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \Delta_2 \omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \\ p = \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Delta_2 \omega, \quad \Delta_2 \Delta_2 \omega = 0 \end{gathered} \tag{7.2}$$

Поступила 4 XII 1966

Институт механики жидкостей и газов Траян Вуя
Академии Социалистической Республики Румынии

ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд. Киевск. ун-та, 1965.
2. Ionescu Dan Gh. La méthode des fonctions analytiques dans L'hydrodynamique des liquides visqueux. Rev. Méçanique Appliquée, 1963, t. 8, No. 4, pp. 675—709.
3. Ionescu Dan Gh. La théorie des fonctions analytiques et L'hydrodynamique des liquides visqueux. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Тр. Междун. симпоз., Тбилиси, 17—23 сентября 1963, т. 2, «Наука», 1965 стр. 236—251.
4. Положій Г. М. Метод p-аналітичних функцій в осесиметричній теорії пружності. Наук. щорічник Київського ун-ту за 1956, Вид-во київск. ін-та, 1957.
5. Ionescu Dan Gh. Integrale generale ale mişcărilor axial-simetrice înhidrodinamica fluidelor vîscoase. Rev. Univ. C. I. Parhon şi Politehn. Bucuresti, Ser., ştiint. natur., 1954, Nr. 4—5, pp. 143—147.
6. Love A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4-th., Edn., Cambridge, University Press, 1934.
7. Timpe A. Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern. Zeitschr. angew. Math. Mech., 1924, Bd. 4, H. 5, pp. 361—376.
8. Крутков Ю. А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1949.