О КАЧЕСТВЕННЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ТРУБАХ

П. П. Мосолов, В. П. Мясников

(Москва)

Настоящая статья непосредственно примыкает к работам [1,2] и посвящена изучению качественных особенностей течений вязко-пластической среды в цилиндрических трубах с произвольным поперечным сечением под действием постоянного перепада давлений по концам трубы.

Использованный в работе метод качественного анализа движения позволил получить глобальное условие существования застойных зон, связанное с конфигурацией поперечного сечения трубы, и в ряде случаев уточнить место расположения застойных зон.

Кроме того, получена более точная оценка для размеров ядер течения. Именно, в случае односвязного поперечного сечения каждое ядро содержит круг радиуса, большего τ_0 / c, причем для случая течения в плоскопараллельном зазоре ширина ядра течения в точности равна τ_0 / c.

Полученные результаты опираются на следующую лемму.

Лемма. Если непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ определена в открытой двусвязной области ω с внутренней границей Γ_1 и внешней границей Γ_0, причем $u|_{\Gamma_0} = 0$, $u|_{\Gamma_1} = 1$, то

$$\int_\omega |\nabla u|\, d\omega \geqslant \inf_\Gamma \operatorname{mes} \Gamma \tag{1}$$

где правая часть (1) — нижняя грань длин замкнутых кривых Γ в ω, гомотопных [1] границам Γ_0, Γ_1.

Доказательство. Очевидно, неравенство (1) достаточно установить на непрерывно дифференцируемых функциях в ω, не имеющих локальных максимумов и минимумов. Из теоремы Сарда [3] следует, что можно удалить множество меры нуль значений функции $u(x, y)$ так, что оставшиеся значения $u = \rho$ соответствуют линиям уровня Γ_ρ, в окрестности $O(\Gamma_\rho)$ которых можно ввести локальные координаты, выбирая в качестве одной координаты s длину дуги вдоль Γ_ρ, а в качестве другой n — нормаль к Γ_ρ (положительное направление нормали соответствует возрастанию функции $u(x, y)$).

Рассмотрим область $O_1 = O(\rho, \rho + \Delta\rho) \subset O(\Gamma_\rho)$, заключенную между линиями уровня Γ_ρ, $\Gamma_{\rho+\Delta\rho}$, такую что

$$dx\,dy = I(s, n)\, ds\, dn, \quad |I(s, n) - 1| < \varepsilon \quad \text{в } O_1$$

Тогда

$$\int_{O_1} |\nabla u|\, d\omega \geqslant (1 - \varepsilon)\, \Delta\rho \operatorname{mes} \Gamma_\rho \tag{2}$$

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать конечную последовательность ρ_i $(i = 0, 1, \ldots, 2n(\varepsilon))$ такую, что ρ_i — некритическое значение для $u(x, y)$, в области

$$O_i = O(\rho_{2i}, \rho_{2i} + \Delta\rho_{2i}), \qquad \Delta\rho_{2i} = \rho_{2i+1} - \rho_{2i}$$

выполнено неравенство (2) и

$$\sum_0^{n(\varepsilon)} \Delta\rho_{2i} > 1 - \varepsilon$$

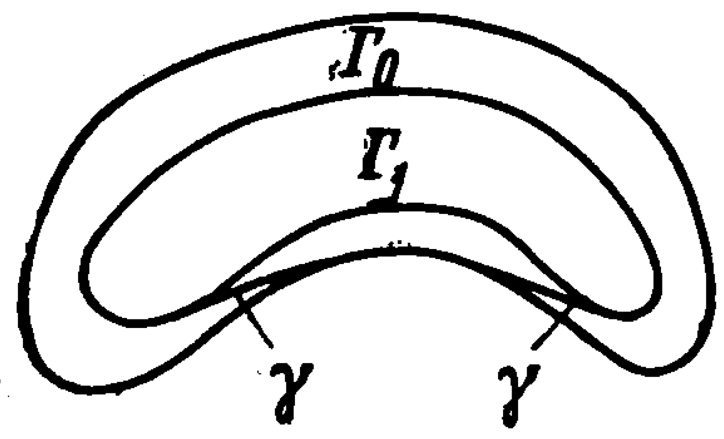
---

[1] Две замкнутые непрерывные кривые Γ_1, Γ_2, лежащие в ω, будем называть гомотопными друг другу, если непрерывной деформацией в области ω один контур можно перевести в другой.

Очевидно,

$$\int\limits_{\omega} |\nabla u|\, d\omega \geqslant \sum_{0}^{n(\varepsilon)} \int\limits_{O_i} |\nabla u|\, d\omega \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{0}^{n(\varepsilon)} \Delta\rho_{2i} \operatorname{mes} \Gamma_{\rho_{2i}} \tag{3}$$

Рассмотрим контур[1] γ, гомотопный Γ_ρ в ω, имеющий наименьшую длину среди всех замкнутых кривых, гомотопных Γ_ρ в ω. Очевидно, контур γ в случае, если Γ_1 — выпуклая, совпадает с Γ_1; если Γ_0 — невыпуклая, то γ совпадает с выпуклой оболочкой Γ_1. В общем случае контур γ в окрестности каждой точки ω есть отрезок, касающийся кривых Γ_1, Γ_0 (фиг.1).



Фиг. 1

Из неравенства(3) следует

$$\int\limits_{\omega} |\nabla u|\, d\omega \geqslant (1-\varepsilon)^2 \operatorname{mes} \gamma \tag{4}$$

Так как ε — произвольно, то неравенство (4) эквивалентно неравенству (1).

Заметим, что неравенство (1)—точное. Действительно, можно построить последовательность непрерывно-дифференцируемых функций $u_n(x, y)$, $u_n|_{\Gamma_0} = 0$, $u_n|_{\Gamma_1} = 1$, сходящуюся к характеристической функции области, ограниченной контуром γ и такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\omega} |\nabla u_n|\, d\omega = \operatorname{mes} \gamma$$

Рассмотрим задачу о стационарном движении вязко-пластической среды в цилиндрической трубе под действием градиента давления. Обозначим через ω поперечное сечение трубы. Пусть Γ — граница ω. Для простоты будем предполагать, что ω — односвязная область. Стационарное движение характеризуется распределением скоростей $u(x, y)$ по области ω. Согласно [1], истинное движение выделяется из всех кинематически возможных условием, что функционал

$$J(v) = \int\limits_{\omega} \left\{ \frac{\mu}{2} |\nabla u|^2 + \tau_0 |\nabla v| - cv \right\} d\omega, \qquad v|_\Gamma = 0 \tag{5}$$

достигает на нем своего минимума. Кинематически возможными являются все распределения скоростей $v(x, y)$, принадлежащие пространству $W_2^{(1)}(\omega)$ (см. [4]) и удовлетворяющие условию $v|_\Gamma = 0$. В [1] было доказано существование и единственность распределения скоростей $u(x, y)$, минимизирующего (5). Это распределение $u(x, y)$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(\omega)$ и является непрерывной функцией, причем $u(x, y)$ положительна, не имеет локальных минимумов и имеет конечное число локальных максимумов.

Рассмотрим открытое множество ω_ρ, состоящее из точек области ω таких, что $u(x, y) > \rho$. Множество ω_ρ представляет собой объединение конечного числа открытых односвязных областей ω_ρ^ν; $\omega_\rho = \bigcup_1^{n(\rho)} \omega_\rho^\nu$. Очевидно, что существует такое достаточно малое число $\Delta\rho$, что

$$n(\rho) = n(\rho + \Delta\rho), \quad \omega_{\rho+\Delta\rho} = \bigcup_1^{n(\rho)} \omega_{\rho+\Delta\rho}^\nu, \quad \omega_{\rho+\Delta\rho}^\nu \subset \omega_\rho^\nu$$

Линией уровня функции $u(x, y)$ будем называть границу Γ_ρ области ω_ρ. Очевидно, $\Gamma_\rho = \bigcup_1^{n(\rho)} \Gamma_\rho^\nu$. Обозначим через $\omega_{\rho,\rho+\Delta\rho}^\nu$ множество $\omega_{\rho,\rho+\Delta\rho}^\nu = \omega_\rho^\nu / \overline{\omega}_{\rho+\Delta\rho}^\nu$.

Теорема 1. Линии уровня Γ_ρ минимизирующей функции имеют конечную длину

$$\operatorname{mes} \Gamma_\rho^\nu \leqslant \frac{c}{\tau_0} \operatorname{mes} \omega_\rho^\nu \tag{6}$$

---

[1] Контуром называется замкнутая кривая, являющаяся взаимнооднозначным и взаимнонепрерывным образом окружности.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u^*(x, y)$

$$u^*(x, y) = u(x, y), \qquad \text{если } (x, y) \in \omega_\rho^{\nu}$$
$$u^*(x, y) = \rho, \qquad \text{если } (x, y) \in \omega^{\nu}_{\rho, \rho+\Delta\rho}$$
$$u^*(x, y) = u(x, y) - \Delta\rho, \text{ если } (x, y) \in \overline{\omega}^{\nu}_{\rho+\Delta\rho}$$

Очевидно, $J(u^*) > J(u)$, откуда непосредственно следует, что

$$\tau_0 \int\limits_{\omega^{\nu}_{\rho, \rho+\Delta\rho}} |\nabla u| \, d\omega \leqslant c\Delta\rho \operatorname{mes} \omega_\rho^{\nu}$$

Используя лемму, находим

$$\operatorname{mes} \gamma^{\nu}_{\rho, \rho+\Delta\rho} \leqslant \frac{c}{\tau_0} \operatorname{mes} \omega_\rho^{\nu} \tag{7}$$

Здесь $\gamma^{\nu}_{\rho, \rho+\Delta\rho}$ — контур, введенный в лемме, лежащий в области $\omega^{\nu}_{\rho, \rho+\Delta\rho}$. Далее $\omega^{\nu}_{\rho+\Delta\rho_1} \supset \omega^{\nu}_{\rho+\Delta\rho_2}$, если $\Delta\rho_1 < \Delta\rho_2$ и $\lim \omega^{\nu}_{\rho+\Delta\rho} = \omega_\rho^{\nu}$ при $\Delta\rho \to 0$. Отсюда следует, что если Γ_ρ^{ν} имеет бесконечную длину, то $\lim \operatorname{mes} \gamma^{\nu}_{\rho, \rho+\Delta\rho} = \infty$ при $\Delta\rho \to 0$, что противоречит неравенству (7). Таким образом, выполняется неравенство (6) и Γ^{ν}_ρ имеет конечную длину. Теорема доказана.

Теорема 2. Если граница Γ области ω и число c в функционале (5) таковы, что

$$\tau_0 \left(\frac{\operatorname{mes} \omega}{\operatorname{mes} \Gamma}\right)^{-1} > c > \tau_0 \left(\sup_{\omega' \subseteq \omega} \frac{\operatorname{mes} \omega'}{\operatorname{mes} \Gamma'}\right)^{-1}$$

где Γ' — граница подобласти ω', то течение в области ω существует и имеет застойные зоны, т. е. области, примыкающие к границе Γ, где $u \equiv 0$.

Доказательство. Существование течения следует из необходимого и достаточного условия, сформулированного в [1].

Докажем существование застойной зоны. Предположим противное, тогда Γ является линией уровня $u = 0$, и из теоремы 1 следует, что $\operatorname{mes} \Gamma \leqslant (c / \tau_0) \operatorname{mes} \omega$, что противоречит предположению теоремы 2.

Физический смысл утверждения теоремы 2 весьма прост. Действительно, теорема 2 позволяет заключить, что при некоторых достаточно малых c граница области ω не может служить линией, ограничивающей область течения, что всегда имеет место, когда контур страгивания не совпадает с границей области ω. В качестве конкретного примера можно указать случай течения в трубе с квадратным поперечным сечением [1].

Теорема 3. Ядро течения[1] A с границей a таково, что

$$\operatorname{mes} a \leqslant \frac{c}{\tau_0} \operatorname{mes} A \tag{8}$$

и содержит круг радиуса

$$R \geqslant \frac{2\tau_0}{c} \left[1 + \left(1 - \frac{4\pi\tau_0^2}{c^2 \operatorname{mes} \omega}\right)^{1/2}\right]^{-1}$$

Доказательство. Неравенство (8) непосредственно следует из теоремы I. Оценим величину R. Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллером [5] было установлено неравенство, которое в случае, когда A — плоская односвязная область с границей a и внутренним радиусом [2] R, имеет вид

$$\operatorname{mes} A \leqslant R \operatorname{mes} a - \pi R^2$$

---

[1] Ядром течения (см. [2]) называется внутренняя подобласть ω, на которой $u(x, y)$ постоянно и достигает своего локального максимума.

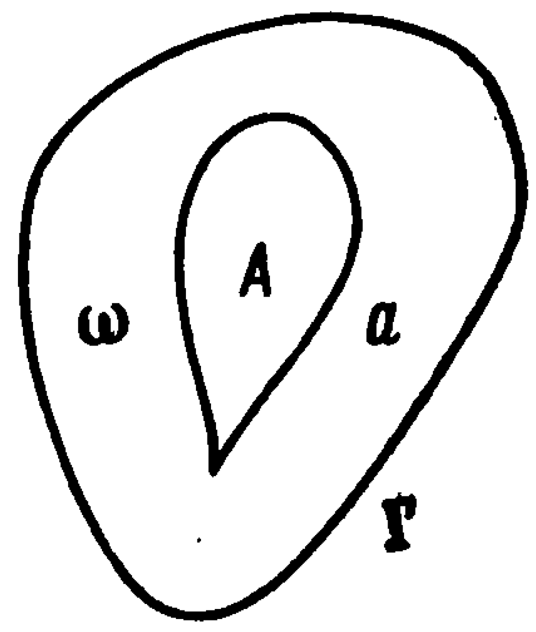
[2] Внутренним радиусом области A называется число R такое, что $R = \sup \rho(x, a)$, где $\rho(x, a)$ — расстояние от точки x области A до границы a.

Отсюда, используя неравенство (9), находим

$$R \geqslant \frac{2\,\mathrm{mes}\,A}{\mathrm{mes}\,a + \sqrt{(\mathrm{mes}\,a)^2 - 4\pi\,\mathrm{mes}\,A}} \geqslant \frac{2\tau_0}{c}\left[1 + \left(1 - \frac{4\pi\tau_0^2}{c^2\,\mathrm{mes}\,\omega}\right)^{1/2}\right]^{-1} > \frac{\tau_0}{c}$$

Заметим, что в [1] были получены для R оценки сверху и снизу. Верхняя оценка $R \leqslant 2\tau_0/c$ была точной, нижние же оценки были грубыми. Оценка снизу (9), по-видимому, близка к точной, так как в случае, если ω — полоса, то $R = \tau_0/c$; заметим еще, что подкоренное выражение в (9) в случае, когда течение существует, положительно.

Теорема доказана. Изложенные методы применимы и в случае, если ядра течения имеют многосвязную структуру; получаемые при этом оценки, однако, существенно более грубые.



Фиг. 2

Теорема 1 позволяет также указать следующее свойство ядер. Для каждого ядра A границей a

$$\tau_0\,\mathrm{mes}\,a = c\,\mathrm{mes}\,A$$

и для любой подобласти A' в A с границей a'

$$\tau_0\,\mathrm{mes}\,a' \geqslant c\,\mathrm{mes}\,A'$$

Последнее неравенство показывает, например, что ядро не может иметь угловых точек, направленных в сторону течения. Такая невозможная конфигурация ядра показана на фиг. 2.

Отметим еще одну качественную особенность застойных зон. В работе [1] были введены замкнутые кривые K_α, определяемые условием $(\mathrm{mes}\,\Omega_\alpha/\mathrm{mes}\,K_\alpha) = \sup\,(\mathrm{mes}\,\omega'/\mathrm{mes}\,\Gamma')$, где Ω_α — область в ω, ограниченная кривой K_α; Γ' — граница ω'. Предположим, что существует только одна замкнутая кривая K, дающая верхнюю грань отношению $\mathrm{mes}\,\omega'/\mathrm{mes}\,\Gamma'$; тогда застойная зона, если движение существует, находится вне области Ω, ограниченной кривой K. Предварительно докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть

$$J_i(u) = \int\limits_\omega \left\{\frac{\mu}{2}\,|\nabla u|^2 + \tau_0\,|\nabla u| - c_i u\right\} d\omega, \qquad u\,|_\Gamma = 0, \qquad i = 1, 2$$

Если u_i — функция, минимизирующая $J_i(u)$ и $c_1 \geqslant c_2$, то $u_1 \geqslant u_2$, т. е. при увеличении градиента давления скорость движения не может уменьшиться ни в одной точке области ω.

Доказательство. Очевидно, имеет место цепочка неравенств

$$J_1(u_1) \leqslant J_1(u_2) \leqslant J_2(u_2) \leqslant J_2(u_1)$$

Предположим противное. Пусть $u_2 > u_1$ в области ω^* и $u_2 = u_1$ на Γ^*, Γ^* — граница ω^*. Очевидно, имеет место аналогичная цепочка неравенств

$$J_1^*(u_1) \leqslant J_1^*(u_2) \leqslant J_2^*(u_2) \leqslant J_2^*(u_1)$$

$$J_i^*(u) = \int\limits_{\omega^*} \left\{\frac{\mu}{2}\,|\nabla u|^2 + \tau_0\,|\nabla u| - c_i u\right\} d\omega, \qquad i = 1, 2$$

Но тогда

$$\int\limits_{\omega^*} \left\{\frac{\mu}{2}\,|\nabla u_1|^2 + \tau_0\,|\nabla u_1|\right\} d\omega \leqslant \int\limits_{\omega^*} \left\{\frac{\mu}{2}\,|\nabla u_2|^2 + \tau_0\,|\nabla u_2| - c_1(u_2 - u_1)\right\} d\omega$$

$$\int\limits_{\omega^*} \left\{\frac{\mu}{2}\,|\nabla u_2|^2 + \tau_0\,|\nabla u_2|\right\} d\omega \leqslant \int\limits_{\omega^*} \left\{\frac{\mu}{2}\,|\nabla u_1|^2 + \tau_0\,|\nabla u_1| - c_2(u_1 - u_2)\right\} d\omega$$

Складывая два последних неравенства, находим

$$c_1 A \leqslant c_2 A, \qquad A = \int\limits_{\omega^*} (u_2 - u_1)\, d\omega > 0$$

Так как $A > 0$, то $c_1 \leqslant c_2$, что противоречит условию теоремы.

Теорема 5. Если в области ω существует лишь одна замкнутая кривая K, ограничивающая область Ω и дающая верхнюю грань отношению $\operatorname{mes} \omega'/\operatorname{mes} \Gamma'$, где ω' — подобласть ω с границей Γ', и если движение среды в ω существует, то застойные зоны движения вязко-пластической среды находятся вне области Ω.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функционалов

$$J_i(u) = \int\limits_{\omega} \left\{ \frac{\mu_i}{2} |\nabla u|^2 + \tau_0 |\nabla u| - c_i u \right\} d\omega, \qquad |u|_\Gamma = 0$$

Здесь числа c_i, убывая, стремятся к числу $c^* = \tau_0 \operatorname{mes} K / \operatorname{mes} \Omega$, числа $\mu_i \to 0$, так что $\max u_i = 1$, где u_i — функция, минимизирующая $J_i(u)$. Нетрудно видеть, что $J(u_i) \to 0$, $i \to \infty$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\omega} \frac{\mu_i}{2} |\nabla u_i|^2\, d\omega \to 0, \qquad 0 \leqslant \int\limits_{\omega} \{\tau_0 |\nabla u_i| - c^* u_i\}\, d\omega \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

Рассмотрим в ω подобласти $\omega_\rho{}^i$ (см. теорему 1), представимые в виде $\omega_\rho{}^i = \bigcup_1^{n(\rho, i)} \omega_\rho{}^{i, \nu}$

Обозначим границу $\omega_\rho^{i,\nu}$ через $\Gamma_\rho^{i,\nu}$. Из теоремы 1 следует

$$\sum_\rho \operatorname{mes} \Gamma_\rho{}^{i,\nu} \leqslant \frac{c^*}{\tau_0} \sum_\rho \operatorname{mes} \omega_\rho{}^{i,\nu} + \varepsilon_i \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Перепишем неравенство (9) в виде

$$\sum_\rho \operatorname{mes} \Gamma_\rho{}^{i,\nu} \leqslant \sum_\rho \operatorname{mes} \Gamma_\rho{}^{i,\nu} \left[\frac{\operatorname{mes} \omega_\rho{}^{i,\nu}}{\operatorname{mes} \Gamma_\rho{}^{i,\nu}} \left(\sup \frac{\operatorname{mes} \omega'}{\operatorname{mes} \Gamma'} \right)^{-1} \right] + \varepsilon_i \tag{10}$$

Из неравенства (10) следует, что

$$\int\limits_{\omega} |u_i - \theta(x, y)|\, d\omega \to 0 \tag{11}$$

Здесь $\theta(x, y)$ — характеристическая функция Ω. Предположим, что некоторая функция $u_i(x, y)$ имеет застойную зону, пересекающуюся с областью Ω. Из теоремы 4 следует, что функции $u_k(x, y)$ при $k > i$ имеют застойные зоны, содержащие застойную зону функции $u_i(x, y)$. Следовательно, (11) невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему 5.

Поступила 19 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
2. Мосолов П. П., Мясников В. П. О застойных зонах течений вязкопластической среды в трубах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Sard A. The mesure of the critial valies of differentiable maps. Bull. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 48, No. 12.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленингр. ун-та, 1950.
5. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Изопериметрическая задача при ограничении ширины области на поверхности. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1965, т. 76.