

ЛИТЕРАТУРА

1. T a y l o r G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube Proc. Roy. Soc. 1953, vol. A. 219, No 1137.
2. T a y l o r G. Diffusion and mass transport in tubes. Proc. Phys. Soc., 1954, vol. B 67, No. 420.
3. Б ы з о в а Н. Л. Самовозбуждающиеся колебания потока тепловой конвекции. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1951, № 5.
4. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Ш в а р ц б л а т Д. Л. Об устойчивости поперечного течения жидкости между проницаемыми границами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Ю. К. Братухин, Л. Н. Маурин

(Пермь, Иваново)

Известно, что наличие на свободной поверхности жидкости градиента температуры приводит (вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры) к появлению на этой поверхности касательных напряжений. При этом возникает движение жидкости — так называемая капиллярная конвекция [1].

Ниже дано решение задачи о стационарной термокапиллярной конвекции, вызванной действием точечного теплового источника постоянной мощности, помещенного на свободной поверхности жидкости, которая заполняет полупространство.

Пусть имеется жидкость, заполняющая полупространство $z > 0$. На поверхности жидкости $z = 0$ расположен точечный тепловой источник постоянной мощности Q . Гравитационное поле отсутствует. (Последнее условие в определенном смысле эквивалентно отсутствию теплового расширения жидкости, так как и в отсутствии поля тяжести и в термически недеформируемой жидкости исчезает архимедова сила, приводящая к объемной конвекции.) Задача решается в сферической системе координат, начало которой совпадает с тепловым источником, а полярная ось направлена по z . Угол ϑ отсчитывается от полярной оси. Тогда уравнения и граничные условия, описывающие стационарную капиллярную конвекцию, принимают вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

На свободной поверхности $\vartheta = 1/2\pi$ выполнены условия

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad v_\vartheta = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{при } r \neq 0 \quad (2)$$

На бесконечности скорость и температура должны обращаться в нуль.

Полный тепловой поток через полусферу с центром в начале координат — величина постоянная, не зависящая от радиуса сферы

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left[v_r T - \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right] r^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{Q}{\rho c_p} \quad (3)$$

Здесь η — динамическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность и c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении.

Пусть коэффициент поверхностного натяжения α линейно зависит от температуры. Тогда $\partial\alpha/\partial T = \text{const}$, и рассматриваемая краевая задача допускает разделение переменных

$$v_r = \frac{\Theta_1(\vartheta)}{r}, \quad v_\vartheta = \frac{\Theta_2(\vartheta)}{r}, \quad T = \frac{\Theta_3(\vartheta)}{r} \quad (4)$$

Из условий симметрии

$$v_\varphi = 0, \quad \partial(\dots) / \partial\varphi = 0 \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнения и граничные условия (1), (2), получим после исключения давления

$$(-\Theta_1^2 + \Theta_1'\Theta_2 - \Theta_2^2)' + 2\Theta_2\Theta_2' = \nu(\Theta_1'' + \Theta_1' \operatorname{ctg}\vartheta - 2\Theta_1 - 2\Theta_2' - 2\Theta_2 \operatorname{ctg}\vartheta + 2\Theta_2'' + 2\Theta_2' \operatorname{ctg}\vartheta + 4\Theta_1' - 2\Theta_2/\sin^2\vartheta) \quad (6)$$

$$\Theta_1 + \Theta_2' + \Theta_2 \operatorname{ctg}\vartheta = 0 \quad (7)$$

$$-\Theta_1\Theta_3 + \Theta_2\Theta_3' = \chi \operatorname{csc}\vartheta (\Theta_3' \sin\vartheta)' \quad (8)$$

Условия на свободной поверхности $\vartheta = 1/2\pi$:

$$\eta\Theta_1' = \Theta_3\partial\alpha / \partial T, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Theta_3' = 0 \quad \text{при } r \neq 0 \quad (9)$$

Условие постоянства теплового потока

$$2\pi \int_0^{\pi/2} (\Theta_1\Theta_3 + \chi\Theta_3) \sin\vartheta d\vartheta = \frac{Q}{\rho c_p} \quad (10)$$

Из условий симметрии

$$\Theta_1' = \partial p / \partial\vartheta = \Theta_3' = \Theta_2 = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (11)$$

Условия убывания на бесконечности выполнены автоматически представлением решения в виде (4). Проинтегрируем уравнения (6) и (8) один раз, исключив из них Θ_1 при помощи уравнения непрерывности (7). Получим

$$-\Theta_2'^2 - 3\Theta_2'\Theta_2 \operatorname{ctg}\vartheta + \Theta_2^2 - \Theta_2\Theta_2'' - \nu(-\Theta_2''' - 2\Theta_2'' \operatorname{ctg}\vartheta + \Theta_2' \operatorname{ctg}^2\vartheta - \Theta_2 \operatorname{ctg}\vartheta / \sin^2\vartheta - 2\Theta_2 \operatorname{ctg}\vartheta) + Av^2 = 0 \quad (12)$$

$$\Theta_2\Theta_3 = \chi\Theta_3' \quad (13)$$

В уравнении (12) появилась постоянная интегрирования Av^2 . В уравнении (13) постоянная интегрирования равна нулю, как это следует из условий (11).

Уравнение (12) интегрируем еще раз

$$\Theta_2 (\Theta_2 \sin\vartheta)' - \nu \sin\vartheta (\Theta_2'' + \Theta_2' \operatorname{ctg}\vartheta - \Theta_2 / \sin^2\vartheta + 2\Theta_2) - Av^2 (1 - \cos\vartheta) = 0 \quad (14)$$

Постоянная интегрирования здесь выбрана в согласии с условием (11). Уравнение (14) допускает еще одно интегрирование

$$1/2 (\Theta_2 \sin\vartheta)^2 + \nu (-\Theta_2' \sin^2\vartheta + \Theta_2 \sin\vartheta \cos\vartheta) - 1/2 Av^2 (1 - \cos\vartheta)^2 = 0 \quad (15)$$

Здесь постоянная интегрирования выбрана так, чтобы выполнялось условие (11).

Уравнение (15) можно преобразовать к виду

$$\frac{du}{dv} + u^2 = \frac{A}{4v^2} \quad \left(u = \frac{\Theta_2}{2v \sin\vartheta}, \quad v = 1 + \cos\vartheta \right)$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\exp\left(-\int u dv\right) \frac{d^2}{dv^2} \left(\exp\int u dv\right) = \frac{A}{4v^2} \quad (16)$$

Уравнение (16) есть обыкновенное линейное уравнение относительно экспоненты. Оно будет частным случаем уравнения, полученного Н. А. Слезкиным [2] для струй, связанных с импульсными источниками. Решая его, получим

$$\exp\int u dv = \operatorname{const}(v^{n_1} + Bv^{n_2}), \quad n_{1,2} = 1/2(1 \pm \sqrt{1+A})$$

Возвращаясь к функции Θ_2 , найдем

$$\Theta_2 = -\frac{Av \sin\vartheta}{2} \frac{(1 + \cos\vartheta)^{n_1-1} - (1 + \cos\vartheta)^{n_2-1}}{n_2(1 + \cos\vartheta)^{n_1} - n_1(1 + \cos\vartheta)^{n_2}} \quad (17)$$

Постоянная интегрирования B выбрана в согласии с условием (9). Подставляя (17) в (13), найдем

$$\Theta_3 = \frac{C}{[n_2(1 + \cos \vartheta)^{n_1} - n_1(1 + \cos \vartheta)^{n_2}]^{2P}}, \quad P = \frac{\nu}{\chi} \quad (18)$$

Здесь P — число Прандтля. Постоянную C определим из условия (9)

$$C = - \frac{Av\eta(1+A)^P}{\partial\alpha/\partial T}$$

Наконец, постоянная A определяется из условия постоянства теплового потока (10). Подставляя Θ_1 и Θ_3 в (10), получаем

$$(1+A)^P \int_1^2 \left[\frac{4P^2}{F^{2P+2}} \left(\frac{dF}{dv} \right)^2 v(2-v) + \frac{1}{F^{2P}} \right] dv = - \frac{Q \partial\alpha/\partial T}{2\pi\nu\eta\chi A} \quad (19)$$

$$F = n_1 v^{n_2} - n_2 v^{n_1}$$

Уравнение (19) определяет A через мощность теплового источника Q и параметры жидкости, так что для данной жидкости A зависит только от Q .

Из (19) видно, что малым Q соответствуют малые A . Разлагая интеграл в (19) по степеням A , получим для малых Q :

$$A = - \frac{\partial\alpha/\partial T}{2\pi\nu\eta\chi} Q + \dots \quad (20)$$

Для произвольных Q исследование интеграла в (19) в общем виде провести не удастся. Но для заданного числа Прандтля зависимость $A(Q)$ может быть найдена численным интегрированием в нужном интервале A .

На фиг. 1 изображена кривая $A(Q)$ для воды ($P = 7$). Видно, что во всем рассмотренном промежутке A является однозначной функцией Q .

Из (19) видно, что область существования интеграла в (19) ограничена по A , именно, для отрицательных значений A , достаточно больших по модулю, интеграл в (19) (и все полученное решение) теряет смысл. Это происходит при тех значениях A , при которых $F(v)$ обращается в нуль. При этом функции $\Theta_2(\vartheta)$ и $\Theta_3(\vartheta)$ обращаются в бесконечность, и интеграл в (19) теряет смысл. Найдем это конечное значение A .

Предварительно покажем, что оно лежит левее (-1) . Для этого положим

$$\varepsilon = \sqrt{1+A}$$

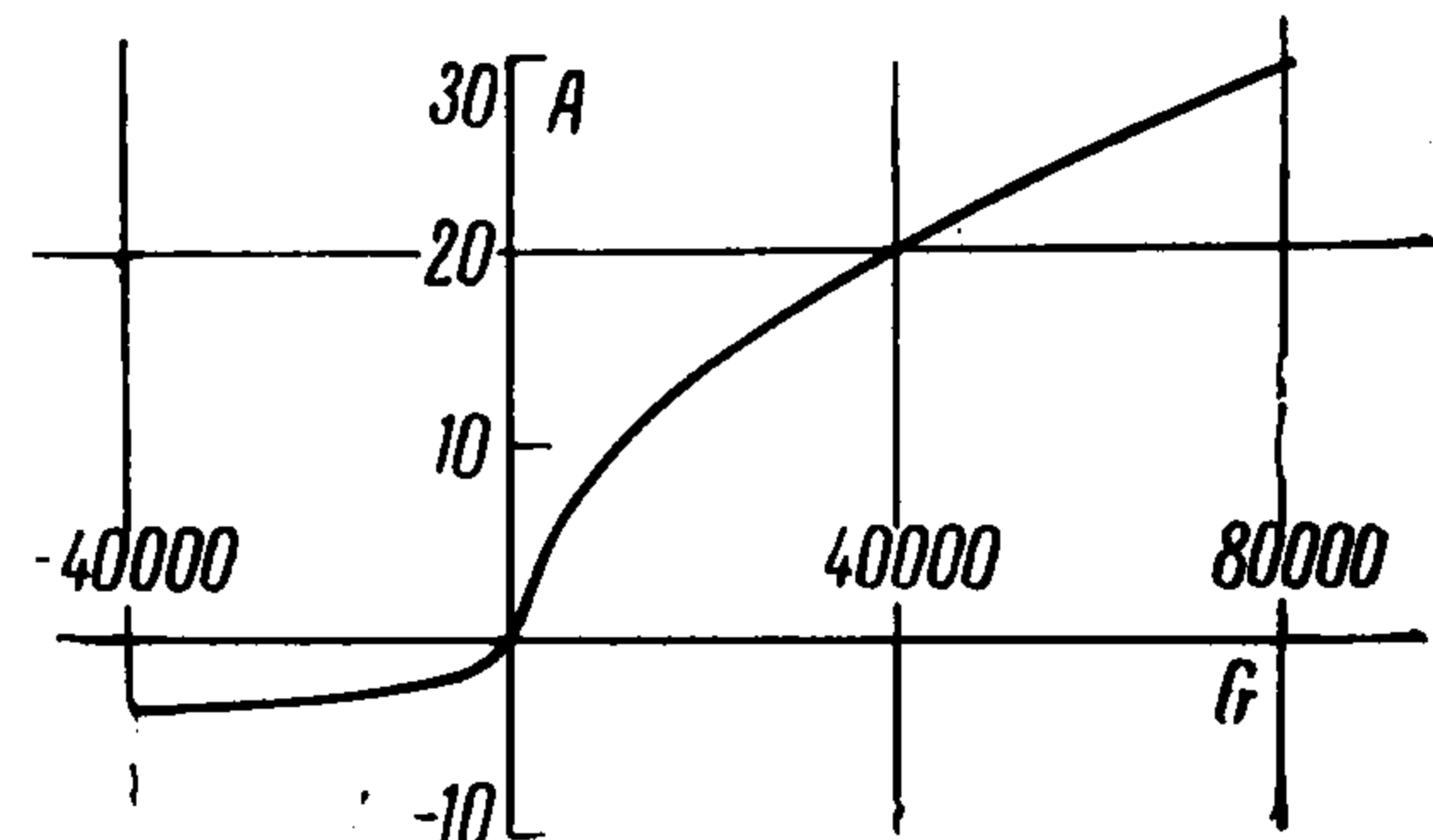
$$\begin{aligned} F(v) &= (1/2\varepsilon - 1/2)v^{1/2+1/2\varepsilon} + (1/2\varepsilon + 1/2)v^{1/2-1/2\varepsilon} = \\ &= \sqrt{v} [\varepsilon \operatorname{ch}(1/2\varepsilon \ln v) - \operatorname{sh}(1/2\varepsilon \ln v)], \quad (1 \leq v \leq 2) \end{aligned}$$

Очевидно, $F(v)$ ни при каком v в промежутке $1 \leq v \leq 2$ не обращается в нуль, если $A > -1$ (т. е. если ε вещественно и не равно нулю). В точке $\varepsilon = 0$ ($A = -1$) полученное решение формально не годится. Это связано с тем, что уравнение (16) в точке $A = -1$ имеет присоединенное решение, так что

$$\exp \int u dv = \operatorname{const} (v^{1/2} + Bv^{1/2} \ln v) \quad (21)$$

Функции $\Theta_2(\vartheta)$ и $\Theta_3(\vartheta)$, которые определяются из (21), не имеют особенностей. Поэтому при $\varepsilon = 0$ решение существует.

Можно, однако, не переходя к присоединенному решению, получить решение при $\varepsilon = 0$ как предел найденного решения (17) и (18) при $A \rightarrow -1$. При этом интеграл в (19) существует. Таким образом, точка $\varepsilon = 0$ ($A = -1$) не является конечной



Фиг. 1

для полученного решения. Рассмотрим поэтому $A < -1$. Для $A < -1$.

$$F(v) = i \sqrt{v} [|\varepsilon| \cos(1/2 |\varepsilon| \ln v) - \sin(1/2 |\varepsilon| \ln v)] \quad (1 \leq v \leq 2)$$

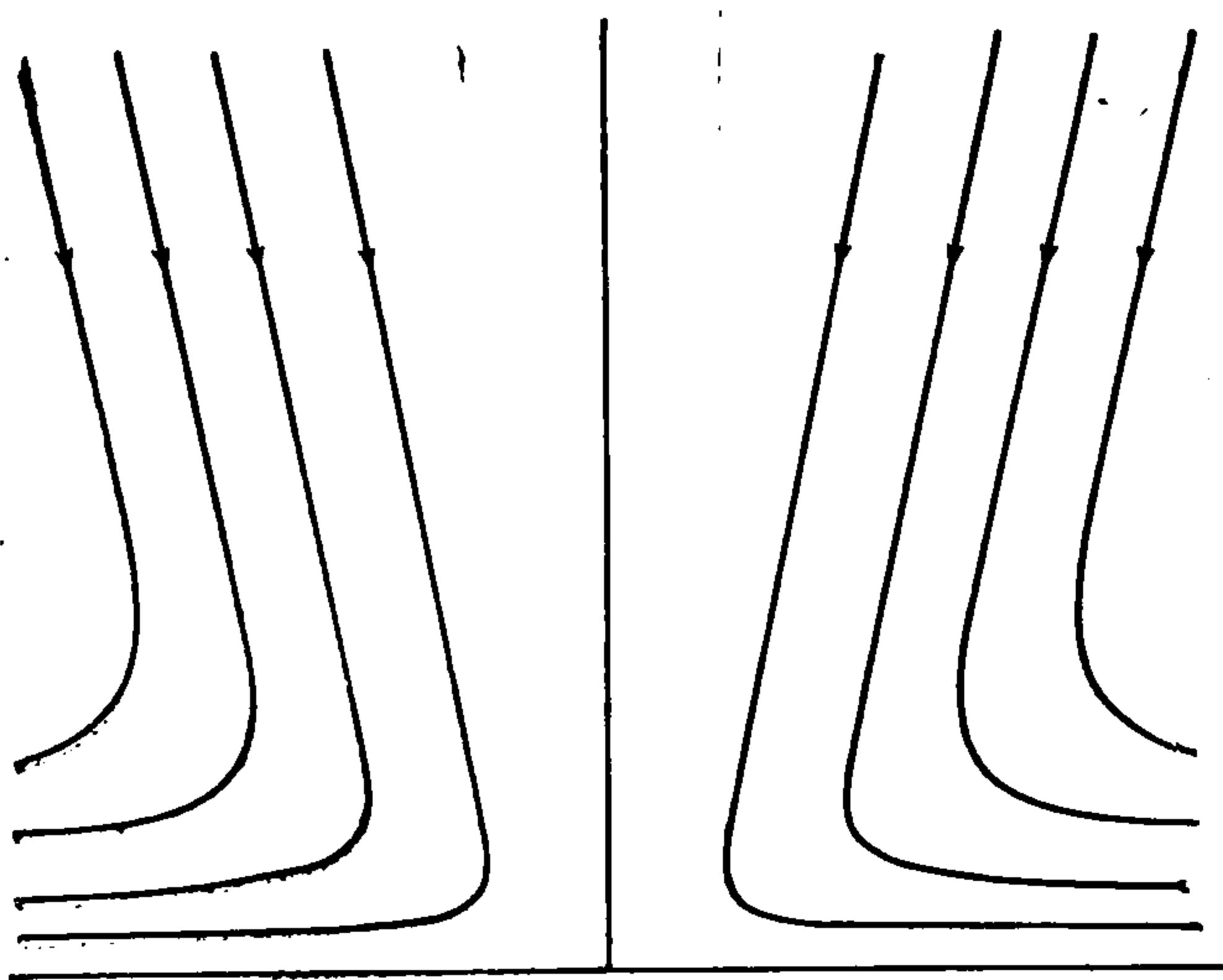
Если $F(v) = 0$

$$\operatorname{tg}(1/2 |\varepsilon| \ln v) = |\varepsilon|$$

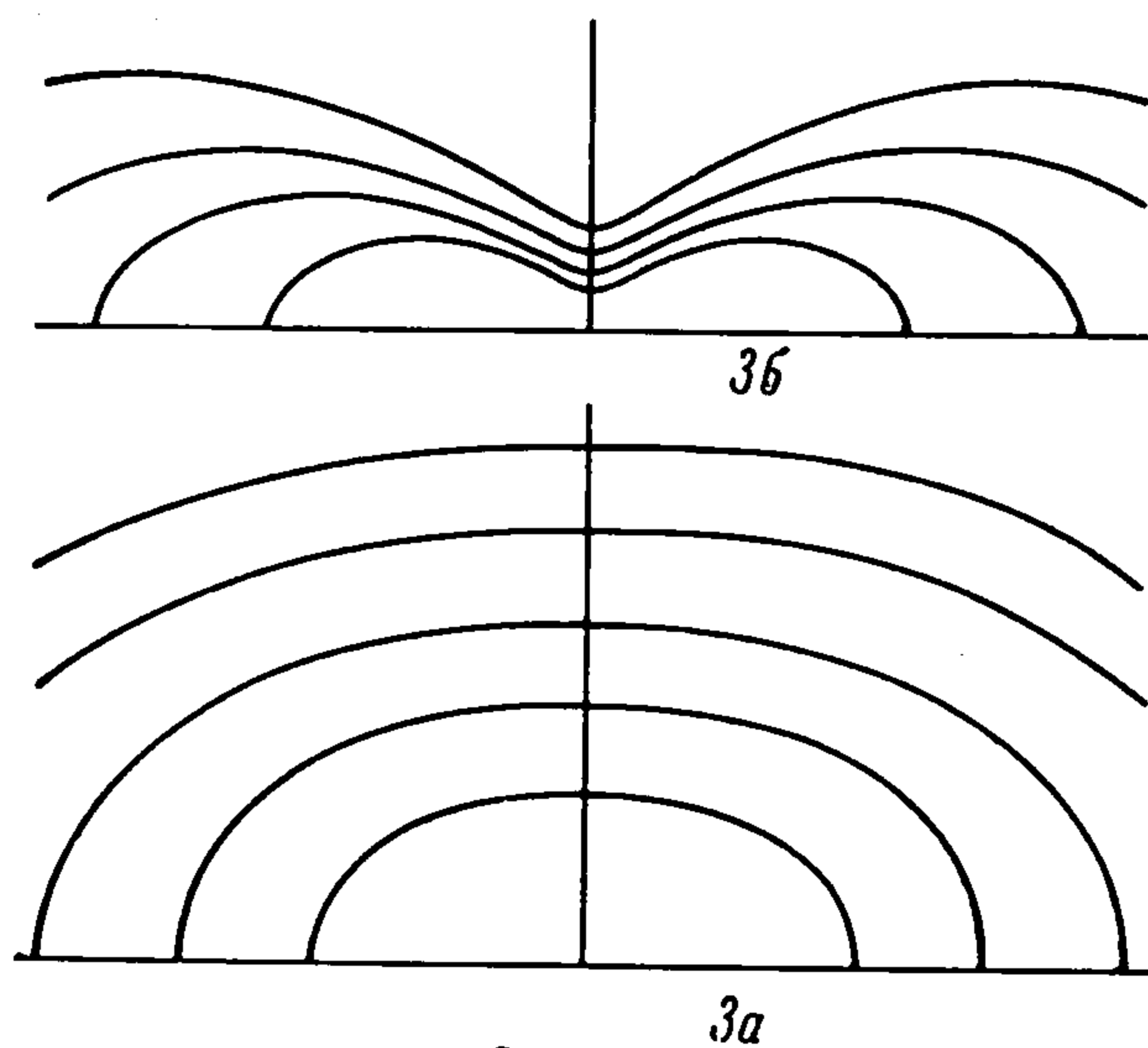
Это уравнение имеет корни. Наименьшее значение $|\varepsilon|$, при котором в промежутке $1 \leq v \leq 2$ появляется корень, удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}(1/2 |\varepsilon_*| \ln 2) = |\varepsilon_*|$$

Отсюда $|\varepsilon_*| = 3.73$ и, следовательно, $A_* = -1 - |\varepsilon_*|^2 = -14.9$. Таким образом, при $A = A_* = -14.9$ найденное решение задачи перестает существовать.



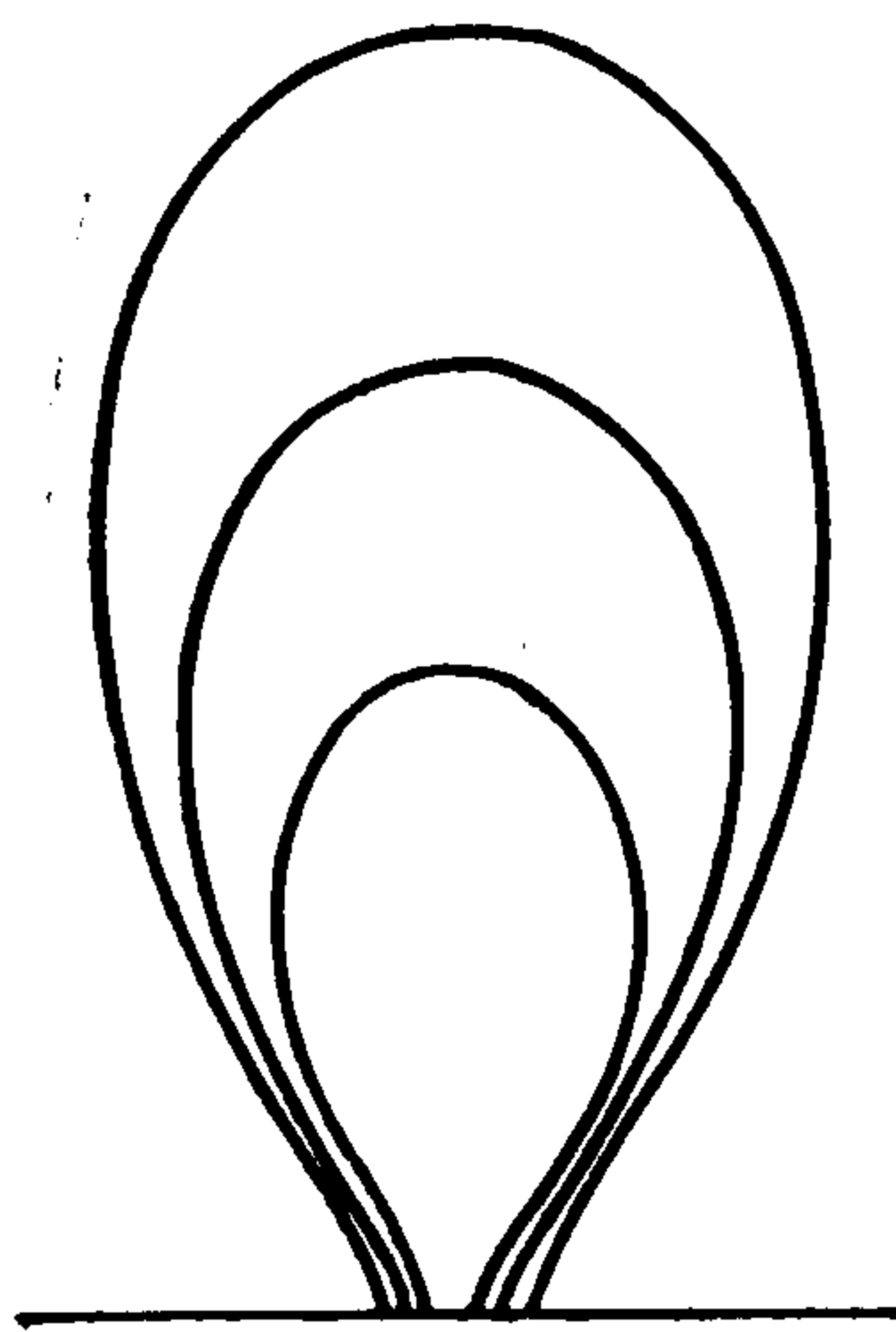
Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2—4 дают представление о характере движения и о поле температур. Расчет сделан для воды. На фиг. 2 изображены линии тока ($A = 2.24$), на фиг. 3 — изотермы (3а для $A = 0.44$, 3б — для $A = 2.24$). Изотерма 3а соответствует малым Q .

В этом случае теплопередачу в основном выполняют процессы теплопроводности. На фиг. 2 и 3б отчетливо виден механизм капиллярной конвекции: под действием капиллярных сил возникает характерное растаскивание жидкости вдоль поверхности и подсосывание к вертикали. Растекаясь от теплового источника вдоль поверхности, жидкость увлекает за собой изотермы — поэтому изотермы вытянуты вдоль поверхности, а подсосываемый по оси z поток поджимает изотермы в центре. Наконец, вид изотерм указывает на то, что возле поверхности (достаточно далеко от источника тепла) образуется пограничный слой.



Фиг. 4

При отрицательных значениях A жидкость подтекает вдоль поверхности к началу координат (теловому источнику), поджимая изотермы к вертикальной оси, и оттекает в глубину по вертикальной оси, затягивая изотермы за собой. Этот характер изотерм отчетливо виден на фиг. 4, где изотермы изображены при $A = -2.33$. Соответствующие линии тока похожи на линии тока, изображенные на фиг. 2, только направление движения здесь обратное.

Благодарим Г. Ф. Шайдурова, обратившего наше внимание на эту задачу.

Поступила 10 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Изд. 2, М., Физматгиз, 1959.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.