

## О СПЕКТРЕ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКАХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Р. Н. Рудаков

(Пермь)

Задача о поведении тепловых (или концентрационных) возмущений в потоке жидкости представляет значительный интерес в теории тепло- и массообмена и в различных приложениях (см., например, [1-3]). В случае стационарного течения любое возмущение температуры (или концентрации примеси) может быть представлено в виде суперпозиции «нормальных» возмущений, экспоненциально зависящих от времени с характеристическими декрементами. Задача, таким образом, в значительной мере сводится к определению спектра характеристических нормальных возмущений. Ниже исследуется спектр тепловых возмущений для некоторых течений несжимаемой жидкости между параллельными изотермическими плоскостями.

1. Если в жидкости отсутствуют внутренние источники тепла, то возмущения температуры описываются уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T \quad (1.1)$$

где коэффициент температуропроводности  $\chi$  предполагается постоянным. Возмущения температуры считаются настолько малыми, что можно пренебречь эффектом свободной конвекции и считать скорость  $\mathbf{v}$  заданной.

Рассмотрим течение жидкости между параллельными плоскостями  $x = \pm h$ . Если выбрать ось  $z$  в направлении потока, то отлична от нуля только  $z$  — компонента скорости:  $v_x = v_y = 0$ ,  $v_z = v(x)$ . Уравнение (1.1) перепишем в безразмерном виде, выбрав за единицу скорости характерную скорость потока  $U$ , расстояния и времени  $h$  и  $h^2 / \chi$  и произвольную единицу для температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + pv(x) \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T, \quad p = \frac{Uh}{\chi} \quad (1.2)$$

Здесь все величины безразмерные, а  $p$  — число Пекле. Нормальные возмущения температуры имеют вид

$$T(x, z, t) = \theta(x) \exp(-\lambda t + ikz) \quad (1.3)$$

где  $\theta(x)$  — амплитуда возмущения,  $k$  — вещественное волновое число, а  $\lambda$  — декремент возмущения. Подставляя (1.3) в (1.2), получим амплитудное уравнение

$$\theta'' + [\lambda - k^2 - ikpv(x)] \theta = 0 \quad (1.4)$$

На изотермических плоскостях  $x = \pm 1$  возмущения обращаются в нуль

$$\theta(\pm 1) = 0 \quad (1.5)$$

Краевая задача (1.4), (1.5) определяет спектр характеристических возмущений  $\theta(x)$  и соответствующих декрементов  $\lambda$ . Если  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ , то вещественная часть  $\lambda_r$  дает собственно декремент, а мнимая часть  $\lambda_i$  определяет частоту и фазовую скорость возмущения. Очевидно, что при принятых предположениях отсутствуют механизмы (например, «перегревный»), приводящие к неустойчивости, и возмущения должны затухать. В этом можно непосредственно убедиться при помощи уравнения (1.4). Для этого умножим это уравнение на комплексно-сопряженное решение  $\theta^*(x)$ , проинтегрируем по  $x$  от  $-1$  до  $1$  и сложим получающееся интегральное соотношение с комплексно-сопряженным. Тогда получим

$$(\lambda + \lambda^*) \int_{-1}^1 |\theta|^2 dx = 2 \int_{-1}^1 (|\theta'|^2 + k^2 |\theta|^2) dx \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что  $\lambda + \lambda^* = 2\lambda_r > 0$ , т. е. нормальные возмущения всегда затухают.

Точно таким же путем легко показать, что нормальные тепловые возмущения затухают в стационарно движущейся несжимаемой жидкости в произвольной замкнутой полости с изотермической границей (такое движение может быть генерировано, например, движением части границы).

2. Исследование спектра при медленном течении можно произвести по аналогии со случаем гидродинамических возмущений в плоскопараллельном течении [4].

Разложим амплитуду и декремент в ряды по степеням параметра  $ikp$  (т. е. в сущности по степеням скорости потока)

$$\theta = \theta^{(0)} + (ikp)\theta^{(1)} + (ikp)^2\theta^{(2)} + \dots \quad (2.1)$$

$$\lambda - k^2 = \mu^{(0)} + (ikp)\mu^{(1)} + (ikp)^2\mu^{(2)} + \dots \quad (2.2)$$

Уравнения последовательных приближений имеют вид

$$\begin{aligned} \theta^{(0)''} + \mu^{(0)}\theta^{(0)} &= 0, & \theta^{(1)''} + \mu^{(0)}\theta^{(1)} &= -\mu^{(1)}\theta^{(0)} + v\theta^{(0)} \\ \theta^{(2)''} + \mu^{(0)}\theta^{(2)} &= -\mu^{(1)}\theta^{(1)} - \mu^{(2)}\theta^{(0)} + v\theta^{(1)} \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

с граничными условиями для амплитуд  $\theta^{(k)}$

$$\theta^{(k)}(\pm 1) = 0 \quad (2.4)$$

Первое из уравнений (2.3) определяет спектр возмущений в покоящейся жидкости ( $p = 0$ )

$$\mu_n^{(0)} = 1/4 (n+1)^2 \pi^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

$$\theta_n^{(0)} = \cos 1/2 (n+1) \pi x \quad (n = 0, 2, 4, \dots)$$

$$\theta_n^{(0)} = \sin 1/2 (n+1) \pi x \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.6)$$

Амплитуды нулевого приближения  $\theta_n^{(0)}$  ортогональны и нормированы

$$\int_{-1}^1 \theta_n^{(0)} \theta_k^{(0)} dx = \delta_{nk} \quad (2.7)$$

Для первого и более высоких приближений получаются неоднородные уравнения, из условия разрешимости которых находятся поправки к декрементам  $\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}, \dots$ . Амплитуды  $\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}, \dots$  можно искать в виде разложений по собственным функциям нулевого приближения (2.6)

$$\theta_n^{(k)} = \sum_m a_{nm}^{(k)} \theta_m^{(0)} \quad (2.8)$$

Коэффициенты разложения  $a_{nm}^{(k)}$  находятся из уравнений последовательных приближений (2.3) обычным образом, а из условий разрешимости имеем

$$\mu_n^{(1)} = V_{nn}, \quad \mu_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}^2}{\mu_n^{(0)} - \mu_m^{(0)}}, \dots \quad \left( V_{mn} = \int_{-1}^1 \theta_m^{(0)} v \theta_n^{(0)} dx \right) \quad (2.9)$$

3. Если профиль скорости течения обладает свойством четности  $v(x) = v(-x)$ , то, очевидно, возможны возмущения двух видов — четные и нечетные относительно  $x$ . Поправки к декрементам, начиная с  $\mu_n^{(1)}$ , в этом случае, вообще говоря, отличны от нуля. Это значит, что тепловые возмущения при четном профиле скорости при сколь угодно малых  $p$  имеют характер тепловых волн, распространяющихся вдоль потока с некоторой фазовой скоростью, определяемой  $\mu_n^{(1)}$ .

В качестве примера<sup>1</sup> приведем две первые поправки к декрементам для течения Пуазейля  $v = 1 - x^2$ :

$$\mu_n^{(1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi^2 (n+1)^2}, \quad \mu_n^{(2)} = \left( \frac{4}{\pi} \right)^6 \sum_{m \neq n} \frac{(n+1)^2 (m+1)^2}{[(n+1)^2 - (m+1)^2]^5} \quad (3.1)$$

В формуле для квадратичной поправки  $\mu_n^{(2)}$  суммирование проводится по индексам  $m$ , имеющим ту же четность, что и номер уровня  $n$ .

<sup>1</sup> В расчетах принимали участие М. Орешина и З. Штаркман.

Значения  $\mu_n^{(1)}$  и  $\mu_n^{(2)}$  для нижних уровней спектра приводятся в таблице.

Зная  $\mu_n^{(1)}$  и  $\mu_n^{(2)}$ , при помощи разложения (2.2) можно найти вещественную и мнимую части декрементов для медленных течений

$$\lambda_{nr} = k^2 + \mu_n^{(0)} - k^2 p^2 \mu_n^{(2)} + \dots$$

$$\lambda_{ni} = k p \mu_n^{(1)} + \dots \quad (3.2)$$

Величина  $\mu_n^{(1)}$  определяет фазовую скорость тепловых возмущений в единицах максимальной скорости потока (при малых  $p$ )

$$c = \frac{\lambda_i}{k p} = \mu_n^{(1)} \quad (3.3)$$

$n$	$\mu_n^{(1)}$	$\mu_n^{(2)}$
0	0.8693	-0.001185
1	0.7173	-0.001116
2	0.6832	0.0002357
3	0.6793	0.0003099
4	0.6748	0.0002545
5	0.6723	0.0001988
6	0.6708	0.0001559
7	0.6698	0.0001244

Как видно из (3.1) и таблицы, фазовая скорость тепловых возмущений не зависит от волнового числа  $k$  (нет дисперсии). Для больших  $n$ , как видно из (3.1),  $c = 2/3$ , т. е. фазовая скорость мелкомасштабных возмущений совпадает со средней скоростью потока.

Значения  $\mu_n^{(2)}$  весьма малы. При  $k = 1$ , например, значения  $\lambda_r$  вплоть до  $p \sim 10$  практически не отличаются от декрементов затухания в покоящейся жидкости.

4. В случае нечетного профиля скорости, когда  $v(x) = -v(-x)$ , легко видеть, что обращаются в нуль все нечетные поправки декрементов

$$\mu^{(1)} = \mu^{(3)} = \dots = 0 \quad (4.1)$$

Разложение (2.2) в этом случае принимает вид

$$\lambda = k^2 + \mu^{(0)} - k^2 p^2 \mu^{(2)} + \dots \quad (4.2)$$

Таким образом, при малых скоростях декременты оказываются вещественными, частоты и фазовые скорости равны нулю и соответствующие возмущения монотонно затухают. Разумеется, этот результат не может быть распространен на конечные значения  $p$ , поскольку может существовать (и действительно существует) особая точка на оси  $p$ , до которой только и справедливы разложения по степеням  $p$ . Для выяснения характера особенности следует рассмотреть пересечение вещественных декрементов  $\lambda_n$ . Дело здесь обстоит совершенно так же, как в случае гидродинамических возмущений в плоских потоках с нечетным профилем скорости [4]. Повторяя все рассуждения работы [4], легко установить, что в спектре декрементов невозможны «простые» пересечения, соответствующие обычному вырождению, а возможны лишь «слияния» при определенных  $p$  двух соседних вещественных уровней разной четности с образованием пары комплексно-сопряженных декрементов (возникновение колебательных возмущений с равными и противоположно направленными фазовыми скоростями).

Для нахождения спектра в этом случае можно применить метод Галеркина, выбрав в качестве базисных функций «невозмущенные» амплитуды  $\theta_n^{(0)}$ , определяемые (2.6). Аппроксимация амплитуды при конечном  $p$  запишется в виде

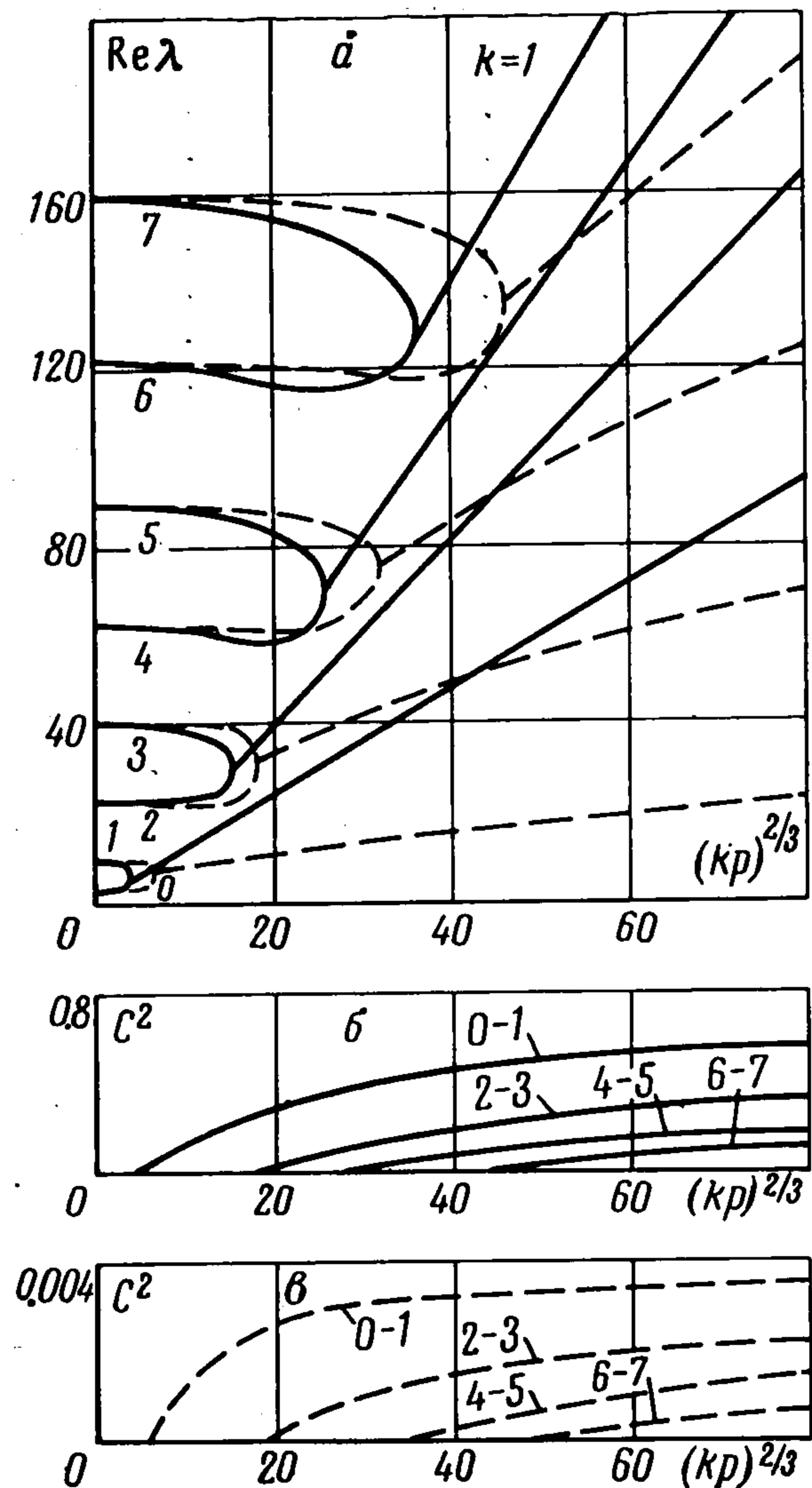
$$\theta = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \theta_n^{(0)} \quad (4.3)$$

Для коэффициентов  $c_n$  из условий ортогональности метода Галеркина получается система  $N$  линейных однородных уравнений

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n [(\lambda - \lambda_n^{(0)}) \delta_{mn} - i k p V_{mn}] = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.4)$$

Здесь  $V_{mn}$  — матричные элементы, определенные в (2.9). В случае нечетного профиля  $v(x)$  эти матричные элементы отличны от нуля только для индексов разной четности. Собственные значения  $\lambda$  матрицы системы (4.4) определяют характеристические декременты в зависимости от параметров  $p$  и  $k$  при определенном профиле скорости  $v(x)$ . Вычисления были проделаны для течения Куэтта  $v = x$  и для течения с куби-

ческим профилем скорости  $v = x - x^3$ . Аппроксимация (4.3) содержала  $N = 18$  функций. Диагонализация матрицы проводилась численно на ЭВМ «Арагац». На фигуре изображены нижние уровни спектра декрементов для волнового числа  $k = 1$ . Приведены вещественные части  $\lambda_r$  декрементов нижних восьми уровней и квадраты фазовых скоростей (в единицах скорости потока)  $c^2$  в зависимости от числа Пекле  $p$ .



Фиг.

Спектр декрементов и амплитуд в этом случае находится элементарно. Декременты равны

$$\lambda_n = 1/4 (n + 1)^2 \pi^2 + k^2 + 1/4 p^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (5.2)$$

Таким образом, все  $\lambda_n$  остаются вещественными при всех скоростях течения (монотонное затухание возмущений) и квадратично возрастают с ростом  $p$ . Отметим отличие спектра тепловых возмущений от спектра гидродинамических возмущений того же течения [5]. В гидродинамическом спектре все уровни попарно сливаются, и при больших  $p$  возможны лишь колебательные возмущения.

Амплитуды четных и нечетных относительно  $x$  возмущений таковы: (5.3)

$$\begin{aligned} \theta_n &= \exp(1/2 px) \cos 1/2 (n + 1) \pi x & (n = 0, 2, 4, \dots) \\ \theta_n &= \exp(1/2 px) \sin 1/2 (n + 1) \pi x & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

Сравнение (5.3) с амплитудами в покоящейся жидкости (2.6) показывает, что возмущения «прижимаются» поперечным потоком к плоскости  $x = 1$ , и при  $p \gg 1$  возмущения локализуются в пограничном слое, безразмерная толщина которого будет порядка  $1/p$ .

Интересно отметить, что спектр декрементов (5.2) сохранится и в случае теплоизолированных границ, когда условия (1.5) заменяются условиями отсутствия теплового потока.

Поступила 20 I 1967

Сплошные линии относятся к течению Куэтта, пунктир — к течению с кубическим профилем. Видно, что при увеличении  $p$  происходят попарные слияния вещественных уровней с порождением комплексно-сопряженных пар. Колебательные возмущения (тепловые волны) возникают при конечном значении  $p = p_*$ , причем фазовая скорость возмущений равна нулю в точке слияния и возрастает с ростом  $p$ ; колебательные возмущения появляются в результате слияния двух нижних уровней при  $p_* \sim 10$ .

5. В заключение рассмотрим спектр тепловых возмущений в однородном поперечном течении между пронизаемыми плоскостями. Пусть на плоскости  $x = -1$  имеется однородное вдувание с некоторой скоростью, а на плоскости  $x = 1$  — однородное отсасывание с той же скоростью. В этом случае скорость жидкости между плоскостями имеет единственную составляющую, перпендикулярную плоскостям и не зависящую от координат. Для амплитуд нормальных тепловых возмущений теперь вместо (1.4) будем иметь уравнение с постоянными коэффициентами

$$\theta'' - p\theta' + (\lambda - k^2)\theta = 0 \quad (5.1)$$

и граничные условия (1.5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. T a y l o r G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube Proc. Roy. Soc. 1953, vol. A. 219, No 1137.
2. T a y l o r G. Diffusion and mass transport in tubes. Proc. Phys. Soc., 1954, vol. B 67, No. 420.
3. Б ы з о в а Н. Л. Самовозбуждающиеся колебания потока тепловой конвекции. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1951, № 5.
4. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Ш в а р ц б л а т Д. Л. Об устойчивости поперечного течения жидкости между проницаемыми границами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.

**ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОЛУПРОСТРАНСТВО**

Ю. К. Братухин, Л. Н. Маурин

(Пермь, Иваново)

Известно, что наличие на свободной поверхности жидкости градиента температуры приводит (вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры) к появлению на этой поверхности касательных напряжений. При этом возникает движение жидкости — так называемая капиллярная конвекция [1].

Ниже дано решение задачи о стационарной термокапиллярной конвекции, вызванной действием точечного теплового источника постоянной мощности, помещенного на свободной поверхности жидкости, которая заполняет полупространство.

Пусть имеется жидкость, заполняющая полупространство  $z > 0$ . На поверхности жидкости  $z = 0$  расположен точечный тепловой источник постоянной мощности  $Q$ . Гравитационное поле отсутствует. (Последнее условие в определенном смысле эквивалентно отсутствию теплового расширения жидкости, так как и в отсутствии поля тяжести и в термически недеформируемой жидкости исчезает архимедова сила, приводящая к объемной конвекции.) Задача решается в сферической системе координат, начало которой совпадает с тепловым источником, а полярная ось направлена по  $z$ . Угол  $\vartheta$  отсчитывается от полярной оси. Тогда уравнения и граничные условия, описывающие стационарную капиллярную конвекцию, принимают вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

На свободной поверхности  $\vartheta = 1/2\pi$  выполнены условия

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad v_\vartheta = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{при } r \neq 0 \quad (2)$$

На бесконечности скорость и температура должны обращаться в нуль.

Полный тепловой поток через полусферу с центром начале координат — величина постоянная, не зависящая от радиуса сферы

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left[ v_r T - \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right] r^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{Q}{\rho c_p} \quad (3)$$

Здесь  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность и  $c_p$  — теплоемкость жидкости при постоянном давлении.

Пусть коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$  линейно зависит от температуры. Тогда  $\partial\alpha/\partial T = \text{const}$ , и рассматриваемая краевая задача допускает разделение переменных

$$v_r = \frac{\Theta_1(\vartheta)}{r}, \quad v_\vartheta = \frac{\Theta_2(\vartheta)}{r}, \quad T = \frac{\Theta_3(\vartheta)}{r} \quad (4)$$