

получим

$$v_- = qx \frac{2}{\sqrt{\pi}} u \left(1 - \frac{u^2}{12}\right) - \frac{qx}{2} u^2 = qx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} u + \frac{u^2}{12}\right) u =$$

$$= 1.13 qx (u - 0.443u^2 + 0.083u^3) \quad (4.8)$$

В работе [1] функция  $v_-$  выражается следующей формулой:

$$v_- = qx \left\{ 1 - \left(1 + \frac{u^2}{2}\right) \left[ 1 - \left( \int_0^u \exp \frac{-u^2}{4} \frac{du}{(2+u^2)^2} \right) \left( \int_0^\infty \exp \frac{-u^2}{4} \frac{du}{(2+u^2)^2} \right)^{-1} \right] \right\} \quad (4.9)$$

$$\int_0^\infty \exp \frac{-u^2}{4} \frac{du}{(2+u^2)^2} = 0.23 \quad (4.10)$$

Тогда с точностью до членов порядка  $u^3$  формула (4.9) дает

$$v_- = qx \left\{ 1 - \left(1 + \frac{u^2}{2}\right) \left[ 1 - \frac{1}{0.92} \left(u - \frac{5}{12} u^3\right) \right] \right\} = 1.08 qx (u - 0.46u^2 + 0.083u^3) \quad (4.11)$$

Сравнение с (4.8) показывает, что в рассматриваемой области приближенная формула (4.11) близка к точной.

Поступила 29 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. of the Camb. Phil. Soc., 1953, vol. 49, № 1, pp. 136.
2. Гринберг Г. А. О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, стр. 80.
3. Гринберг Г. А. Об установившемся течении вязкой проводящей жидкости по прямоугольным трубам, находящимся в поперечном магнитном поле. ЖТФ, 1964, т. 34, № 10, стр. 1721—1731.
4. Hunt J. C. R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. J. Fl. Mech., 1965, vol. 21, No. 4, pp. 577—590.
5. Hunt J. C. R., Stewartson K. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II. J. Fl. Mech., 1965, vol. 23, pp. 563—581.

#### О СПЕКТРЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В. И. Якушин (Пермь)

До недавнего времени в теории гидродинамической устойчивости исследовались почти исключительно незамкнутые потоки. Из замкнутых потоков наиболее подробно исследовано движение жидкости между вращающимися цилиндрами (задача Тейлора). Однако это течение не является типичным примером замкнутых потоков, в которых потеря устойчивости происходит совершенно иначе [1]. Наиболее характерным примером таких потоков может служить движение жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. В работе [2] исследовалось такое движение, когда внешняя сфера радиуса  $r_2$  покоится, а внутренняя радиуса  $r_1$  вращается с угловой скоростью.

Было исследовано поведение трех отдельных возмущений при малых числах Рейнольдса для  $r_2/r_1 \equiv a = 2$ . Между тем, для построения нелинейной теории устойчивости, при исследовании возмущений произвольного вида необходимо знание более полного спектра нормальных возмущений во всем диапазоне чисел Рейнольдса  $R$ . В данной работе строятся и исследуются разложения нормальных возмущений и их декрементов в ряды по степеням  $R$ . Показано, что в данной задаче возможны как монотонные (с вещественными декрементами), так и колебательные возмущения (с комплексными декрементами). Образование комплексных декрементов происходит при некотором критическом значении  $R_* \neq 0$ . Поправки к декрементам при медленном вращении вычислялись методом возмущений для  $a = 2.5, 2.0, 1.7$ .

§ 1. Основное ламинарное течение. Примем в качестве единиц измерения радиуса, скорости и давления соответственно  $r_1$ ,  $v/r_1$ ,  $\rho v^2/r_1^2$ , где  $\rho$  — плотность и  $v$  — кинематическая вязкость жидкости. Уравнения стационарного движения имеют вид

$$(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\nabla P - \text{rot rot } \mathbf{U}, \quad \text{div } \mathbf{U} = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями ( $\mathbf{r}_0$  — единичный вектор)

$$\mathbf{U}|_{s_1} = R\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{U}|_{s_2} = 0 \quad \left( R = \frac{r_1^2 \Omega}{\nu} \right) \quad (1.2)$$

Здесь  $R$  — число Рейнольдса. При малых числах Рейнольдса решение можно искать в виде рядов [3].

$$\mathbf{U} = R\mathbf{U}_1 + R^2\mathbf{U}_2 + \dots, \quad P = RP_1 + R^2P_2 + \dots \quad (1.3)$$

Функция  $\mathbf{U}_1$  приводится в [4], а  $\mathbf{U}_2$  нашел Ю. К. Братухин [2], используя векторные шаровые функции [5]

$$\mathbf{U}_1 = \varphi(r) \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{a^3 - 1} \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right)$$

$$\mathbf{U}_2 = F(r) \mathbf{r}_0 Y_2 + G(r) r \nabla Y_2 \quad (Y_2 = 1/2(3 \cos^2 \vartheta - 1)) \quad (1.4)$$

$$F = \frac{a^6}{2(a^3 - 1)^2} \frac{1}{r^4} \left[ -\frac{c_2}{2} + r + c_4 r^2 + \frac{r^4}{a^3} + \frac{c_3 r^5}{3} + \frac{c_1}{5} r^7 \right], \quad G = \frac{1}{6r} (r^2 F)'$$

Коэффициенты  $c_1, c_2, c_3, c_4$  определяются из граничных условий (1.2). Линии тока вторичного течения  $\mathbf{U}_2$  приведены в [2]. Амплитуда  $\mathbf{U}_2$  примерно на два порядка меньше амплитуды  $\mathbf{U}_1$  для  $a = 2$ , причем это отношение увеличивается при  $a \rightarrow 1$  и уменьшается для больших  $a$ .

§ 2. Возмущения в неподвижном шаровом слое. Уравнения для нормальных возмущений в неподвижной жидкости имеют вид [1]

$$-\lambda_0 \mathbf{u}_0 + \nabla p + \text{rot rot } \mathbf{u}_0 = 0, \quad \text{div } \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{u}_0|_{s_1, s_2} = 0 \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) являются самосопряженными, так что все  $\lambda$  вещественны. Легко показать [1], что они будут еще и положительны. Следовательно, в неподвижной жидкости все возмущения монотонно затухают. Возмущение  $\mathbf{u}_0$  удобно искать в виде разложения по векторным шаровым функциям [2, 5]

$$\mathbf{u}_0 = f(r) \mathbf{r}_0 Y + g(r) r \nabla Y + h(r) \mathbf{r} \times \nabla Y, \quad p = q(r) Y \quad (2.2)$$

Здесь  $Y \equiv Y_l(\vartheta) = P_l(\cos \vartheta)$  — шаровые функции Лежандра. В неподвижном шаровом слое существуют возмущения двух типов: азимутальные

$$\boldsymbol{\mu}_0 = h(r) \mathbf{r} \times \nabla Y \quad (2.3)$$

когда частицы жидкости не выходят из своего шарового слоя, и меридиональные

$$\mathbf{v}_0 = f(r) \mathbf{r}_0 Y + g(r) r \nabla Y \quad (2.4)$$

когда частицы не имеют азимутальной составляющей скорости  $f, g, h$  выражаются через функции Бесселя первого рода полуцелого индекса и приведены в [2]. Для определения декрементов  $\mu_0$  получается уравнение<sup>1</sup>

$$I_{l+1/2}(\sqrt{\mu_0}) I_{-l-1/2}(\sqrt{\mu_0} a) = I_{-l-1/2}(\sqrt{\mu_0}) I_{l+1/2}(\sqrt{\mu_0} a) \quad (2.5)$$

и для определения декрементов  $\nu_0$  уравнение

$$\frac{4}{\pi} (-1)^l \frac{2l+1}{\nu_0} - a^{l+3/2} [I_{l+3/2}(\sqrt{\nu_0} a) I_{-l+1/2}(\sqrt{\nu_0}) - I_{-l-3/2}(\sqrt{\nu_0} a) I_{l-1/2}(\sqrt{\nu_0})] - a^{-l+1/2} [I_{-l+1/2}(\sqrt{\nu_0} a) I_{l+3/2}(\sqrt{\nu_0}) - I_{l-1/2}(\sqrt{\nu_0} a) I_{-l-3/2}(\sqrt{\nu_0})] = 0 \quad (2.6)$$

<sup>1</sup> Братухин Ю. К. Диссертация, Пермский ун-т, 1962.

Для каждого  $l$  уравнения (2.5) и (2.6) дают бесконечную последовательность декрементов  $\nu_{(0)l}^i$  и  $\mu_{(0)l}^i$ :  $i = 1, 2, \dots$ ;  $l = 1, 2, \dots$

Уравнения (2.5) и (2.6) решались численно. Значения двадцати нижних декрементов для  $a = 2.5, 2.0, 1.7$  приведены в таблице. Представляет интерес рассмотреть поведение декрементов при больших  $a$  и при  $a$ , близких к единице. Для простоты будем рассматривать минимальные корни уравнений (2.5) и (2.6) при  $l = 1$ .

(Поправки к декрементам взяты со множителем  $10^4$ )

$a$	$\mu_1^1$		$\mu_2^1$		$\mu_3^1$		$\mu_4^1$		$\mu_5^1$	
1.7	21.3	-188	23.5	-189	26.9	-195	21.3	-202	36.9	-210
2.0	10.8	3.06	12.6	-1.64	15.4	-11.2	19.0	-15.0	23.4	-36.9
2.5	5.09	6.40	6.47	-3.46	8.48	-18.3	11.1	-35.0	14.2	-55.1
	$\mu_6^1$		$\mu_7^1$		$\mu_8^1$		$\mu_9^1$		$\mu_{10}^1$	
1.7	43.5	-221	51.1	-231	59.8	-244	69.4	-255	80.0	-270
2.0	28.7	-52.1	34.6	-70.0	41.3	-108	48.7	-121	56.6	-
2.5	17.7	-	21.8	-	26.2	-	31.0	-	36.2	-
	$\mu_1^2$		$\mu_2^2$		$\mu_3^2$		$\mu_4^2$		$\nu_1^1$	
1.7	81.7	-372	84.1	-441	87.6	-108	92.2	-63.4	79.5	339
2.0	40.5	-163	42.4	-212	45.4	-108	49.3	-63.4	38.6	135
2.5	18.3	-129	19.9	-153	22.2	-74.6	25.3	-37.6	16.9	98.8
	$\nu_2^1$		$\nu_3^1$		$\nu_5^1$		$\nu_5^1$		$\nu_6^1$	
1.7	77.8	345	76.2	213	75.4	161	75.9	145	78.2	141
2.0	37.5	234	36.9	167	37.3	98.4	39.1	87.8	42.3	91.2
2.5	16.4	291	16.5	118	17.7	98.2	19.9	-	23.0	-

А. При больших  $a$  уравнение (2.5) и (2.6) можно представить соответственно в виде

$$x = \operatorname{tg} x, \quad x = \sqrt{\mu_0} a \quad (2.7)$$

$$\left( \frac{1}{x} - \frac{x}{3} \right) \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \sqrt{\nu_0} a \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) легко определить, что

$$\mu_0 \approx \frac{9\pi^2}{4a^2}, \quad \nu_0 \approx \frac{\pi^2}{16a^2} \quad (2.9)$$

Таким образом, для больших  $a$  декременты азимутальных возмущений  $\mu_0$  будут иметь более высокие значения, чем декременты меридиональных возмущений  $\nu_0$ . Из (2.8) и (2.9) видно, что  $\mu_0$  и  $\nu_0$  при больших  $a$  стремятся к нулю как  $1/a^2$ .

Б. При  $a$ , близких к единице, уравнения (2.5) и (2.6) можно представить соответственно в виде

$$\sin(\sqrt{\mu_0} \delta a) = 0, \quad \delta a = a - 1 \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2} x \sin x + \cos x = 1, \quad x = \sqrt{\nu_0} \delta a \quad (2.11)$$

Корни этих уравнений легко определяются

$$\mu_0 \approx \frac{\pi^2}{(\delta a)^2}, \quad \nu_0 \approx \frac{4\pi^2}{(\delta a)^2} \quad (2.12)$$

т. е. при  $a \rightarrow 1$  декременты увеличиваются как  $1/(\delta a)^2$ , причем декременты  $\nu_0$  лежат выше соответствующих декрементов  $\mu_0$  примерно в четыре раза. Такую закономерность

уже можно проследить по таблице. Как показано общим образом в [2], декременты  $\mu_0$  монотонно растут с увеличением номера  $l$ . Поведение декрементов  $\nu_0$  с изменением  $l$  общим образом проследить не удастся, но численный расчет показывает, что декременты  $\nu_0$  имеют минимальное значение при некотором  $l$  (см. таблицу), причем при увеличении  $a$  минимум достигается при меньших значениях номера  $l$ . Очевидно, что, начиная с некоторого  $a$ , декременты  $\nu_0$  и  $\mu_0$  будут вести себя с изменением  $l$  монотонно.

§ 3. Возмущения в шаровом слое при медленном вращении. Возмущения во вращающейся жидкости удовлетворяют уравнениям [1]

$$-\lambda u + \nabla p + \text{rot rot } u = -[(U \nabla)u + (u \nabla)U] \quad \text{div } u = 0, \quad u|_s = 0 \quad (3.1)$$

с условием нормировки

$$\int v_\beta^* u_\alpha dV = \delta_{\beta\alpha}$$

где  $v$  — решение сопряженной задачи.

Решение ищем в виде рядов по степеням  $R$ :

$$u = u_0 + u_1 R + u_2 R^2 + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 R + \lambda_2 R^2 + \dots \quad (3.2)$$

Из симметрии задачи относительно изменения направления вращения сразу следует, что все коэффициенты при нечетных степенях  $R$  в разложении для декрементов (3.2) равны нулю. Вещественные разложения (3.2) справедливы лишь до особой точки. Последовательными приближениями можно найти все  $u_n$  и  $\lambda_n$ . Их удобно искать с помощью метода возмущений, разлагая  $u_n$  по базисной системе функций невозмущенной задачи (2.1). При медленном вращении возмущения перестают быть чисто азимутальными или меридиональными из-за оператора в правой части (3.1). Но мы будем продолжать говорить о  $\mu$ - и  $\nu$ -возмущениях, прослеживая их декременты до  $R = 0$ . Легко видеть, что существуют следующие разложения для возмущений и их декрементов по степеням  $R$ :

$$\begin{aligned} \nu_n^i &= \nu_{(0)n}^i + R \sum_{m,k} a_{mn}^{ki} \mu_{(0)m}^k + \dots, & \nu_n^i &= \nu_{(0)n}^i + R^2 \nu_{(2)n}^i + \dots \\ \mu_n^i &= \mu_{(0)n}^i + R \sum_{m,k} b_{mn}^{ki} \nu_{(0)m}^k + \dots, & \mu_n^i &= \mu_{(0)n}^i + R^2 \mu_{(2)m}^i + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для квадратичных поправок к декрементам получаем формулы

$$\nu_{(2)n}^i = N_{nn}^{ii} + \sum_{m,k} \frac{H_{mn}^{ik} K_{nm}^{ki}}{\nu_{(0)n}^i - \mu_{(0)m}^k}, \quad \mu_{(2)n}^i = M_{nn}^{ii} + \sum_{m,k} \frac{H_{nm}^{ik} K_{mn}^{ki}}{\mu_{(0)n}^i - \nu_{(0)m}^k} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} M_{nn}^{ii} &= \int \mu_{(0)n}^i [(U_2 \nabla) \mu_{(0)n}^i + (\mu_{(0)n}^i \nabla) U_2] dV \\ H_{nm}^{ik} &= \int \mu_{(0)n}^i [(U_1 \nabla) \nu_{(0)m}^k + (\nu_{(0)m}^k \nabla) U_1] dV \end{aligned} \quad (3.5)$$

Интегралы  $N_{nn}^{ii}$  и  $K_{nm}^{ki}$  отличаются от интегралов (3.5) заменой в подынтегральных выражениях  $\mu_{(0)n}^i$  на  $\nu_{(0)n}^i$  и наоборот. Суммирование в (3.4) ведется по невозмущенным уровням. Из-за взаимной ортогональности векторных шаровых функций интегралы  $H_{mn}^{ik}$  и  $K_{mn}^{ki}$  отличны от нуля только для  $|m - n| = 1$ . Это «правило отбора» намного облегчает вычисления, делая суммирование в (3.4) практически однократным. Вычисление интегралов (3.5) проводилось на ЭЦВМ «Арагац» в В. Ц. Пермского университета. Два первых члена разложения декрементов (3.3), вычисленных из уравнений (2.5) и (2.6), по формулам (3.4), приведены в таблице.

В работе [2] вычислялись поправки к декрементам  $\mu_1^1$ ,  $\nu_1^1$ ,  $\nu_2^1$ . Значения этих поправок в [2] не совпадают с соответствующими величинами таблицы, а поправки  $\nu_{(2)2}^1$  и  $\mu_{(2)1}^1$  отличаются и по знаку. Такое несовпадение объясняется, по-видимому, малой точностью вычислений, проведенных в [2].

§ 4. Пересечения декрементов в шаровой полости. Из-за несамосопряженности краевой задачи (3.1) вещественные разложения (3.2) справедливы лишь до особой точки  $R_*$ : при  $R > R_*$  в спектре  $\lambda$  появляются комплексные декременты, что соответствует возникновению колебательных возмущений, осциллирующих с частотой  $\omega = \text{Im}(\lambda)$ . Такого рода особенность обнаружена уже во многих задачах (см., например, [7-9]).

Получим необходимое условие возникновения колебательных возмущений. Уравнения для сопряженных возмущений имеют вид [1]

$$\begin{aligned} -\lambda^* \mathbf{v} + \nabla q + \text{rot rot } \mathbf{v} - (U \nabla) \mathbf{v} + \nabla (U \mathbf{v}) &= 0 \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v}_s = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решение основной (3.1) и сопряженной (4.1) задач можно разбить на азимутальную ( $\mu$ ) и меридиональную ( $\nu$ ) части

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mu + \mathbf{u}_\nu, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\mu + \mathbf{v}_\nu \quad (4.2)$$

Умножая (3.1) поочередно на  $\mathbf{v}_\mu$  и  $\mathbf{v}_\nu$ , а (4.1) на  $\mathbf{u}_\mu$  и  $\mathbf{u}_\nu$  и интегрируя по объему полости, получим четыре интегральных соотношения, из которых следует:

$$(\lambda^* - \lambda) I \equiv (\lambda^* - \lambda) \int (\mathbf{u}_\nu \mathbf{v}_\nu - \mathbf{u}_\mu \mathbf{v}_\mu) dV = 0 \quad (4.3)$$

Необходимым условием появления колебательных возмущений ( $\lambda^* \neq \lambda$ ) будет обращение в нуль интеграла  $I$  в (4.3). Пока справедливы разложения (3.2), декременты вещественны ( $\lambda^* = \lambda$ ), а интеграл  $I$  отличен от нуля и имеет разные знаки для  $\mu$ - и  $\nu$ -возмущений. Действительно, при  $R = 0$   $I = +1$  для  $\nu$ -возмущений и  $I = -1$  для  $\mu$ -возмущений. Обращение в нуль возможно лишь при конечном числе Рейнольдса  $R_*$ . При  $R = R_*$  происходит слияние двух вещественных декрементов, которые при  $R > R_*$  переходят в пару комплексно-сопряженных. Для выяснения поведения вблизи особой точки можно применить приближенный метод, используемый при исследовании пересечений молекулярных термов ([8] § 79). Этот метод уже применялся для аналогичных целей в работах [7, 8].

Обозначим в (3.1)

$$H(R) \mathbf{u} \equiv (U \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U} \quad (4.4)$$

и запишем (4.4) в точке  $R = R_0 + \delta R$ , в которой

$$H(R) = H(R_0) + (\partial H / \partial R)_{R_0} \delta R \quad (4.5)$$

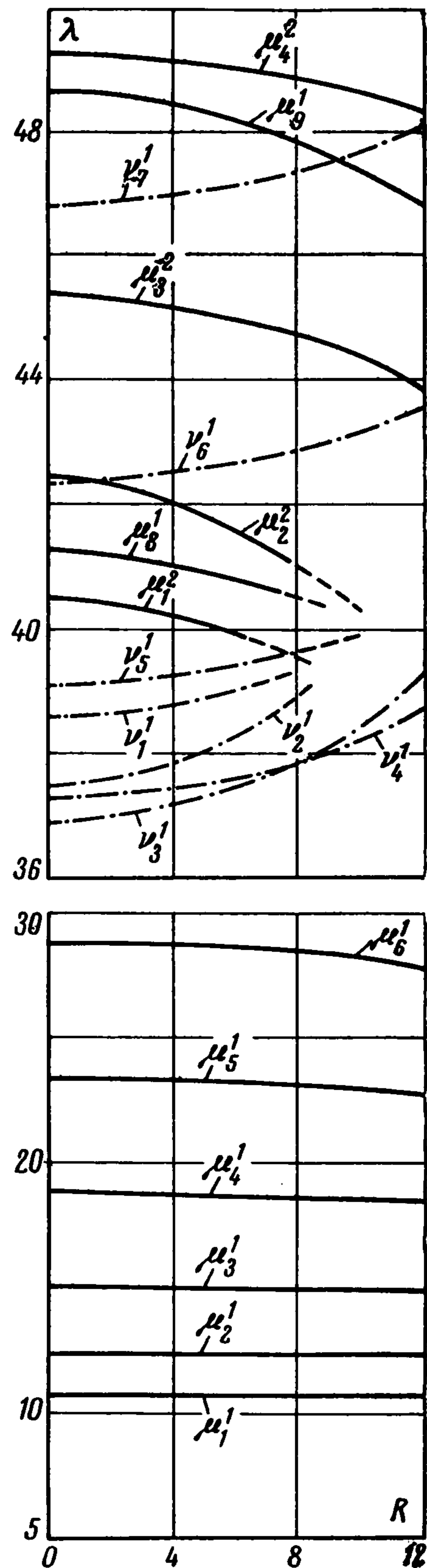
Пусть в точке  $R_0$  близки два вещественных декремента  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Обозначим  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  решения, соответствующие  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а через  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — их сопряженные решения. Решение  $\mathbf{u}$  ищем в виде

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \quad (4.6)$$

Подставляя в (3.1) выражения (4.5) и (4.6), умножая на  $\mathbf{v}_1^*$  и  $\mathbf{v}_2^*$  и интегрируя по объему полости, получим для  $c_1$  и  $c_2$  систему линейных однородных уравнений.

Из условия совместности этой системы можно определить декременты вблизи  $R_0$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 + (V_{11} + V_{22}) \delta R] \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} [\lambda_1 + \lambda_2 + (V_{11} - V_{22}) \delta R]^2 + V_{12} V_{21} (\delta R)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$



Фиг.

Здесь

$$V_{mn} = \int v_m^* \left( \frac{\partial H}{\partial R} \right) u_n dV \quad (4.8)$$

Величина  $V_{mn}$  зависит от пространственной симметрии возмущений. Из разложений (3.3) видно, что  $\mu$ - и  $\nu$ -возмущения обладают разными свойствами по отношению к отражению в экваториальной плоскости. Эти свойства симметрии не зависят от числа членов в указанных разложениях и сохраняются при любом  $R$ . Легко видеть, что  $\mu_l$  — возмущение с нечетным  $l$  будет симметричным, а с четным значением  $l$  будет антисимметричным. В то же время,  $\nu_l$  — возмущение будет симметричным при четном  $l$  и антисимметричным при нечетном. Матричные элементы  $V_{mn}$  для возмущений разной симметрии равны нулю. Из формулы (4.7) видно, что тождественное обращение в нуль произведения  $V_{12}V_{21}$  при произвольном  $R_0$  приводит к простому пересечению  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Такое пересечение без образования особой точки возможно между декрементами  $\mu$ -возмущений с  $\Delta l = \pm 1, \pm 3, \dots$ , между декрементами  $\nu$ -возмущений тоже с  $\Delta l = \pm 1, \pm 3, \dots$ , а также при взаимном пересечении декрементов  $\mu$ -и  $\nu$ -возмущений с  $\Delta l = \pm 2, \pm 4, \dots$ . Матричные элементы для возмущений одинаковой симметрии отличны от нуля.

Определить общим образом величину и знак произведения  $V_{12}V_{21}$  для таких возмущений не представляется возможным, так как основное течение определено лишь с точностью до  $R^2$ . При  $V_{12}V_{21} > 0$  пересечение декрементов невозможно, а при  $V_{12}V_{21} < 0$  для возмущений одинаковой симметрии, но разных типов, возможно слияние двух вещественных декрементов с образованием пары комплексно-сопряженных.

На фигуре представлен спектр нижних декрементов для  $a = 2$ . Видно, что декременты  $\mu$ -возмущений убывают (за исключением  $\mu_1^1$ ), а декременты  $\nu$ -возмущений возрастают. Такая же закономерность наблюдается и для  $a = 2.5$  (см. таблицу). Для  $a = 1.7$  самый нижний декремент ( $\mu_1^1$ ) убывает. Между наименьшими декрементами  $\mu$ - и  $\nu$ -возмущений лежит большое число декрементов  $\mu$ -возмущений, причем их тем больше, чем меньше  $a$ .

Все эти возмущения будут оставаться монотонными, поскольку знак интеграла  $I$  у них один и тот же. Таким образом, можно предположить, что для течения (1.1) более вероятной является монотонная неустойчивость, чем колебательная (если вообще неустойчивость здесь имеет место). К оценкам критического числа Рейнольдса, как это сделано в [2], следует относиться с большой осторожностью, так как при экстраполяции до  $\lambda = 0$  не учитывается «взаимодействие декрементов», и все пересечения между ними предполагаются простыми.

Автор приносит благодарность М. И. Шлиомису и Ю. К. Братухину за постоянное внимание к работе и помощь и Г. З. Гершуни за обсуждение.

Поступила 20 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критического числа Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
2. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
3. Всеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. Сорокин В. С. Замечания о шаровых электромагнитных волнах. ЖЭТФ, 1948, т. 18, стр. 228—235.
6. Шлиомис М. И. О колебательной конвективной неустойчивости проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
7. Шлиомис М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой снизу жидкости относительно периодических по времени возмущений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
8. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоско-параллельных течений при малых числах Рейнольдса, ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.