О ХАРАКТЕРЕ ПРИСТЕНОЧНЫХ СЛОЕВ И ОБ ИХ ПЕРЕКРЫТИИ ПРИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО КАНАЛУ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Г. А. Гринберг, О. М. Конторович

(Ленинград)

Рассмотрено на основе применения функции Грина течение проводящей жидкости по трубе прямоугольного сечения с непроводящими стенками, находящейся в поперечном магнитном поле (задача Шерклифа). Детально изучены, особенно для больших значений числа Гартмана, распределение скорости и индуцированного магнитного поля в смежности со стенками, параллельными внешнему магнитному полю, а также около угловых точек сечения трубы, где происходит перекрытие пристеночных слоев различного характера. Полученные результаты иллюстрируются графиками.

1. Установившееся течение вязкой проводящей жидкости в прямоугольной трубе, находящейся в поперечном магнитном поле, неоднократно рассматривалось в ряде работ [1–5].

Известно [1], что если внешнее магнитное поле H° однородно, а поле скоростей и индуцированные электрическое и магнитное поля не зависят от координаты z, отсчитываемой в направлении оси трубы, то существует такое решение уравнений установившегося движения проводящей вязкой несжимаемой жидкости по трубе, когда скорость v и индуцированное магнитное поле H направлены параллельно оси z и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta H + \frac{4\pi\mu\sigma H^\circ}{c^2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (0 < x < l) \tag{1.1}$$

$$\Delta v + \frac{\mu H^\circ}{4\pi\eta}\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{P^\circ}{\eta} \qquad (0 < y < d) \tag{1.2}$$

Ось x выбрана в направлении поля H°; σ, μ, η обозначают соответственно проводимость, магнитную проницаемость и коэффициент вязкости жидкости, c — скорость света, а — $\partial p/\partial z = P^\circ$ — градиент давления, который считается постоянным по сечению трубы.

Граничные условия на стенках канала, которые будем считать непроводящими, сводятся к обращению в нуль на контуре s трубы обеих величин v и H.

Решение такой задачи было дано в работе [1] в виде бесконечных тригонометрических рядов, сходимость которых ухудшается с увеличением числа Гартмана M. При больших M Шерклифом было показано, что, за исключением областей, прилегающих к стенкам канала $y = 0$ и $y = d$, его решение практически переходит в обычное решение одномерной задачи Гартмана. В той же работе было получено решение приближенного уравнения, пригодного при больших значениях числа M вблизи стенок, параллельных внешнему магнитному полю, кроме точек, находящихся в смежности с угловыми. При этом предполагалось, что вторые производные по x в уравнениях (1.1) и (1.2) малы по сравнению с другими членами, так что ими можно было пренебречь. Полученные таким образом уравнения были решены автором точно с помощью оригинальной подстановки.

Другой способ решения задачи, предложенный в работах [2–3], связан с использованием функции Грина уравнения вида

$$\Delta u - m^2 u = 0, \qquad m = (\mu H^\circ/2c)\sqrt{\sigma/\eta}$$

Этот способ позволяет непосредственно получить решение в удобной для приложений форме как раз при больших значениях числа Гартмана во всех точках сечения канала.

В данной заметке при помощи этого метода получается распределение скорости и магнитного поля в пристеночном слое, параллельном магнитному полю H°, и в смежности с угловой точкой контура.

2. Для решения задачи введем в соответствии с обычной практикой функции

$$w_{\pm} = v + qmy^2 \pm \alpha H$$

$$\alpha = \frac{c}{4\pi\sqrt{\sigma\eta}}, \quad q = \frac{P^{\circ}}{2\eta m} \qquad (2.1)$$

для которых получаются уравнения

$$\Delta w_{\pm} \pm 2m\partial w_{\pm}/\partial x = 0 \qquad (2.2)$$

с граничными условиями

$$w_{\pm}|_s = qm\eta^2(s) \qquad (2.3)$$

Полагая далее

$$w_{\pm} = e^{\mp mx}\varphi_{\pm} \qquad (2.4)$$

получаем для функций $\varphi_{\pm}$ уравнение

$$\Delta\varphi_{\pm} - m^2\varphi_{\pm} = 0 \qquad (2.5)$$

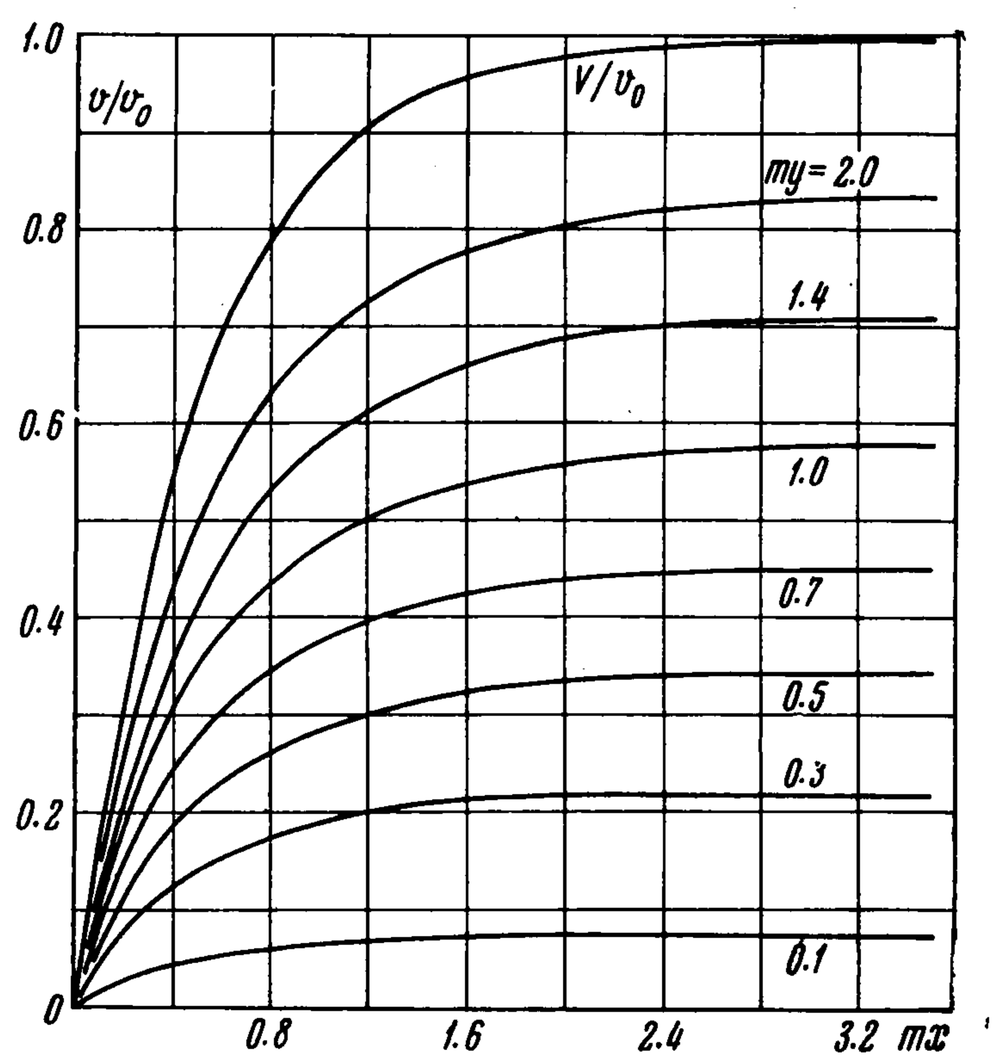
с граничными условиями

$$\varphi_{\pm}|_s = e^{\pm m\xi(s)} qm\eta^2(s) \qquad (2.6)$$

Тогда согласно [3] будем иметь

$$v = -qmy^2 + qm\int\limits_{(s)} \eta^2 chm(x-\xi)\frac{\partial G}{\partial n}ds \qquad (2.7)$$

$$\alpha H = qm\int\limits_{(s)} \eta^2 shm(\xi - x)\frac{\partial G}{\partial n}ds \qquad (2.8)$$



Фиг. 1

где $G(x, y, \xi, \eta)$ — соответствующая функция Грина, (x, y) — фиксированная точка области, ограниченной контуром s; (ξ, η) — точка контура, n — внешняя нормаль.

3. Считая $md \gg 1$ и $ml \gg 1$, достаточно ограничиться при исследовании течения вблизи стенки канала $y = 0$ немногими членами ряда функции Грина, так как при большом числе Гартмана они быстро убывают. В соответствии с этим положим

$$\begin{aligned} G = -{}^1/_2\pi^{-1}\{&K_0[m\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}] - K_0[m\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}] - \\ &- K_0[m\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}] + K_0[m\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}] - \\ &- K_0[m\sqrt{(2l-x-\xi)^2+(y-\eta)^2}] + K_0[m\sqrt{(2l-x-\xi)^2+(y+\eta)^2}] + \\ &+ K_0[m\sqrt{(2l+x-\xi)^2+(y-\eta)^2}] - K_0[m\sqrt{(2l+x-\xi)^2+(y+\eta)^2}] \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Члены порядка e^{-md} и e^{-2ml} здесь опущены. Тогда скорость при $0 < x < l/2$ выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} v = -qmy^2 + \frac{qm^2x}{\pi}chmxF(x, y) + \frac{qm^2(l-x)}{\pi}chm(l-x)F[(l-x); y] - \\ - \frac{qm^2(l+x)}{\pi}chm(l-x)F[(l+x); y] \end{aligned} \qquad (3.2)$$

$$F(a; y) = \int\limits_0^d \eta^2\left\{\frac{K_1[m\sqrt{a^2+(y-\eta)^2}]}{\sqrt{a^2+(y-\eta)^2}} - \frac{K_1[m\sqrt{a^2+(y+\eta)^2}]}{\sqrt{a^2+(y+\eta)^2}}\right\}d\eta \qquad (3.3)$$

Так как $y \ll d$, то $m(d-y) \gg 1$, $m(d+y) \gg 1$, и формула (3.3) простой заменой переменных приводится к более удобному виду

$$F(a; y) = \frac{4y}{m}K_0[m\sqrt{a^2+y^2}] + 2\int\limits_0^y (y^2+t^2)\frac{K_1(m\sqrt{a^2+t^2})}{\sqrt{a^2+t^2}}dt \qquad (3.4)$$

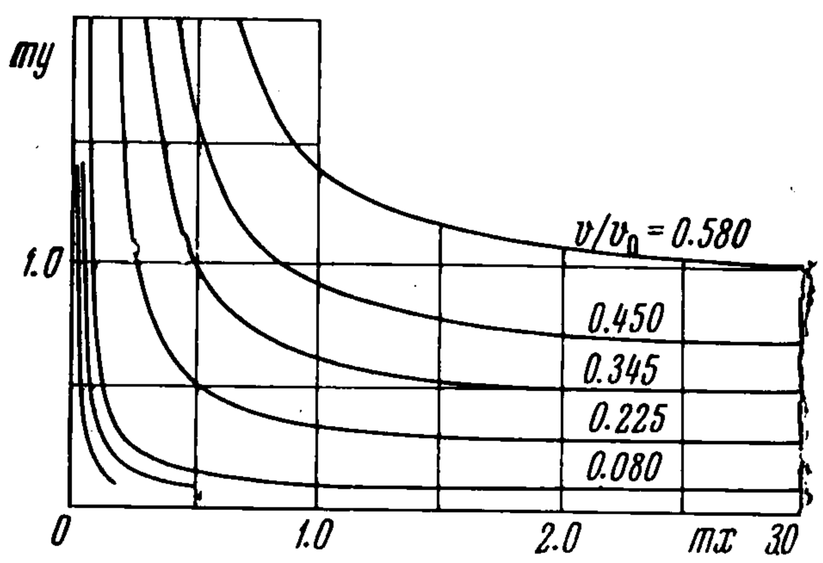
Аналогично можно получить формулу

$$\alpha H = -\frac{qm^2x}{\pi} shmxF(x, y) + \frac{qm^2(l-x)}{\pi} shm(l-x) F[(l-x), y] -$$
$$- \frac{qm^2(l+x)}{\pi} shm(l-x) F[(l+x), y] \qquad (3.5)$$

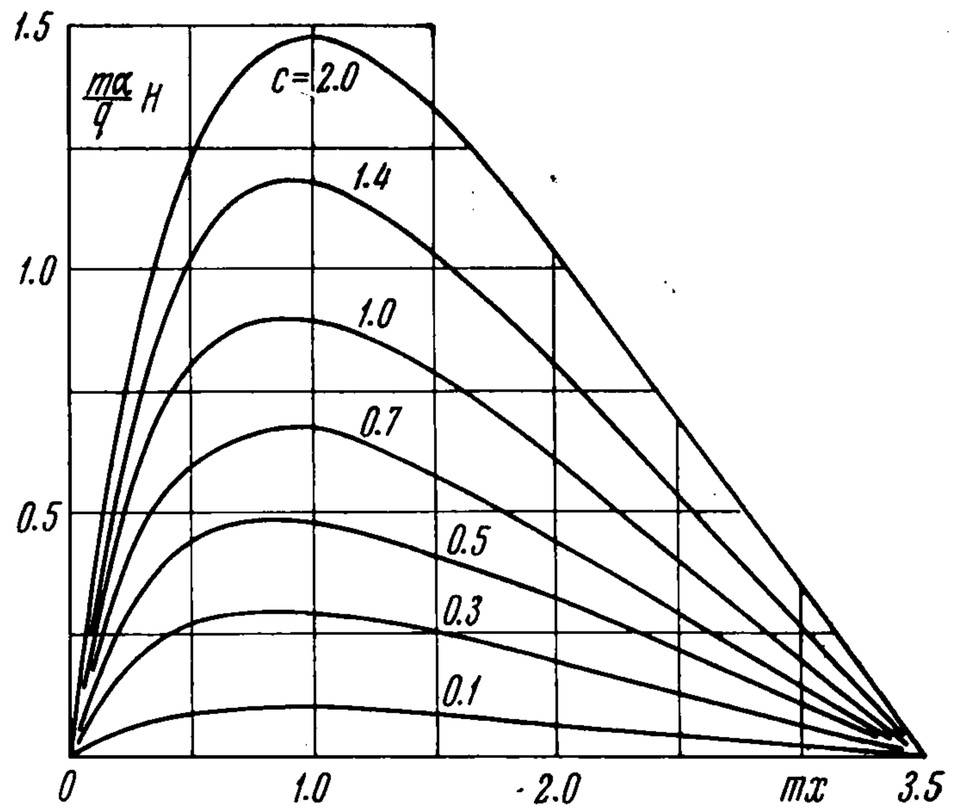
На фиг. 1—3 приведены расчетные кривые, полученные по формулам (3.2) и (3.5) для случая $ml = 7$ в области $0 \leqslant x \leqslant l/2$, причем $c = my$, $v_0 = ml/2$, а V — скорость в соответствующей задаче Гартмана.

4. В заключение сравним данное решение с приближенным, полученным Шерклифом в работе [1], для пристеночной области в точках, расположенных вблизи от стенки $y = 0$ и на достаточном расстоянии от угла, т. е. когда

$$\frac{m^2y^2}{mx} \ll 1, \qquad m(l-x) \gg 1 \qquad (4.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим функцию $v_- = v - \alpha H$, введенную Шерклифом, для которой согласно (3.2) и (3.5) получим выражение

$$v_- = v - \alpha H = -qmy^2 + \frac{qm^2x}{\pi} e^{mx} F(x; y) +$$
$$+ \frac{qm^2(l-x)}{\pi} e^{-m(l-x)} F[(l-x); y] - \frac{qm^2(l+x)}{\pi} e^{-m(l-x)} F[(l+x); y] \qquad (4.2)$$

Так как $m(l-x) \gg 1$, то, пренебрегая членами порядка $e^{-2m(l-x)}$, будем иметь

$$v_- = -qmy^2 + \frac{qm^2x}{\pi} F(x; y) \qquad (4.3)$$

т. е.

$$v_- = -qmy^2 + \frac{qm^2x}{\pi}\left\{\frac{4y}{m} K_0(m\sqrt{x^2+y^2}) + 2\int_0^y (y^2+t^2)\frac{K_1(m\sqrt{x^2+t^2})}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt\right\} \qquad (4.4)$$

Если воспользоваться асимптотическими представлениями для функций Макдональда и учесть условия (4.1), то для F получим выражение

$$F(x, y) = \frac{4y}{m}\sqrt{\frac{\pi}{2mx}}\, e^{-mx}\left(1 + \frac{m^2y^2}{6mx}\right) \qquad (4.5)$$

Подставим (4.5) в (4.3), тогда

$$v_- = -qmy^2 + \frac{qm^2x}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2mx}}\,\frac{4y}{m}\left(1 + \frac{m^2y^2}{6mx}\right) \qquad (4.6)$$

Введя, как у Шерклифа, новую переменную

$$u = y\sqrt{2m/x} \qquad (4.7)$$

получим

$$v_- = qx\frac{2}{\sqrt{\pi}}u\left(1-\frac{u^2}{12}\right)-\frac{qx}{2}u^2 = qx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{4}u+\frac{u^2}{12}\right)u=$$

$$= 1.13\,qx\,(u-0.443u^2+0.083u^3) \tag{4.8}$$

В работе [1] функция v_- выражается следующей формулой:

$$v_- = qx\left\{1-\left(1+\frac{u^2}{2}\right)\left[1-\left(\int_0^u \exp\frac{-u^2}{4}\frac{du}{(2+u^2)^2}\right)\left(\int_0^\infty \exp\frac{-u^2}{4}\frac{du}{(2+u^2)}\right)^{-1}\right]\right\} \tag{4.9}$$

$$\int_0^\infty \exp\frac{-u^2}{4}\frac{du}{(2+u^2)^2} = 0.23 \tag{4.10}$$

Тогда с точностью до членов порядка u^3 формула (4.9) дает

$$v_- = qx\left\{1-\left(1+\frac{u^2}{2}\right)\left[1-\frac{1}{0.92}\left(u-\frac{5}{12}u^3\right)\right]\right\} = 1.08\,qx\,(u-0.46u^2+0.083u^3) \tag{4.11}$$

Сравнение с (4.8) показывает, что в рассматриваемой области приближенная формула (4.11) близка к точной.

Поступила 29 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. of the Camb. Phil. Soc., 1953, vol. 49, № 1, pp. 136.
2. Гринберг Г. А. О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, стр. 80.
3. Гринберг Г. А. Об установившемся течении вязкой проводящей жидкости по прямоугольным трубам, находящимся в поперечном магнитном поле. ЖТФ, 1964, т. 34, № 10, стр. 1721—1731.
4. Hunt J. C. R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. J. Fl. Mech., 1965, vol. 21, No. 4, pp. 577—590.
5. Hunt J. C. R., Stewartson K. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II. J. Fl. Mech., 1965, vol. 23, pp. 563—581.

О СПЕКТРЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В. И. Якушин (Пермь)

До недавнего времени в теории гидродинамической устойчивости исследовались почти исключительно незамкнутые потоки. Из замкнутых потоков наиболее подробно исследовано движение жидкости между вращающимися цилиндрами (задача Тейлора). Однако это течение не является типичным примером замкнутых потоков, в которых потеря устойчивости происходит совершенно иначе [1]. Наиболее характерным примером таких потоков может служить движение жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. В работе [2] исследовалось такое движение, когда внешняя сфера радиуса r_2 покоится, а внутренняя радиуса r_1 вращается с угловой скоростью.

Было исследовано поведение трех отдельных возмущений при малых числах Рейнольдса для $r_2/r_1 \equiv a = 2$. Между тем, для построения нелинейной теории устойчивости, при исследовании возмущений произвольного вида необходимо знание более полного спектра нормальных возмущений во всем диапазоне чисел Рейнольдса R. В данной работе строятся и исследуются разложения нормальных возмущений и их декрементов в ряды по степеням R. Показано, что в данной задаче возможны как монотонные (с вещественными декрементами), так и колебательные возмущения (с комплексными декрементами). Образование комплексных декрементов происходит при некотором критическом значении $R_* \neq 0$. Поправки к декрементам при медленном вращении вычислялись методом возмущений для $a = 2.5$, 2.0, 1.7.