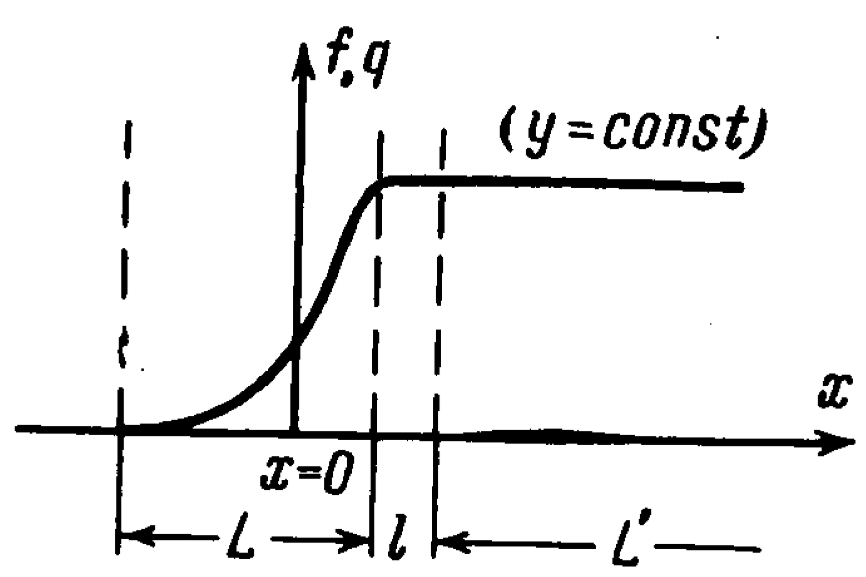
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ ЗА ЗОНОЙ ОСЕВОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СЛАБЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ И ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

А. Б. Ватажин

(Москва)

В газовой динамике часто приходится рассматривать течения среды по каналам в поле возмущающих сил $\mathbf{F}$ и тепловых источников Q. В тех случаях, когда возмущающие факторы относительно невелики, уравнения можно линеаризовать около решения при $\mathbf{F} = 0$, $Q = 0$. Во многих приложениях $\mathbf{F}$ и Q бывают неоднородными в продольном и поперечном направлениях на некотором участке конечной длины [1] (который будем обозначать посредством L), тогда как вверх по потоку от этого участка $\mathbf{F} = 0$, $Q = 0$, а вниз по потоку $\mathbf{F}$ и Q практически зависят только от координат в поперечном сечении (в частном случае также равны нулю).

Ниже будет показано, что в линейной постановке при дозвуковом течении в плоском канале и круглой трубе можно найти параметры течения за зоной L (на участке L', отстоящем от L на некотором расстоянии l, фигура), не решая соответствующей линейной системы уравнений в частных производных. Течение на участке L' определяется через $\mathbf{F}$ и Q на L' (зависящие только от поперечных координат) и интегралы от этих величин по участку L.



В безразмерных переменных уравнения газовой динамики для совершенного газа с постоянными теплоемкостями имеют вид

$$\begin{aligned} &\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + N\mathbf{f}, \qquad &&\operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0 \\ &\rho\mathbf{v}\nabla\varepsilon = -p\operatorname{div}\mathbf{v} + Nq, \qquad &&p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь плотность ρ, скорость $\mathbf{v}$, давление p, внутренняя энергия ε и декартовы координаты x, y, z отнесены к ρ_*, V, $\rho_* V^2$, V^2 и h соответственно (ρ_* — характерная плотность, V — средняя по сечению канала скорость, h — характерный поперечный размер); γ — отношение теплоемкостей; $N\mathbf{f}$ и Nq — безразмерные плотности сил и тепловых источников; N — параметр, характеризующий относительную величину возмущающих факторов.

В дальнейшем предполагается, что $\mathbf{f}$ и q зависят явным образом от параметров течения (но не их производных) и координат.

Если $N \ll 1$, то решение (1) можно искать в виде рядов

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_0 + N\rho_1 + \ldots, \qquad &&\varepsilon = \varepsilon_0 + N\varepsilon_1 + \ldots. \\ &p = p_0 + Np_1 + \ldots, \qquad &&\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + N\mathbf{v}_1 + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

где величины с индексом 0 удовлетворяют системе (1) при $N = 0$. При течении в канале с неизменным (по осевой координате x) поперечным сечением в случае непроницаемых (для газа) стенок имеем

$$\mathbf{v}_0 = (u_0(y, z),\ 0,\ 0), \qquad \rho_0 = \rho_0(y, z), \qquad p_0 = p_{00} = \mathrm{const} \tag{3}$$

Здесь u_0 и ρ_0 — произвольные гладкие, не обращающиеся в нуль функции [2].

---

[1] В магнитной гидродинамике $\mathbf{F}$ и Q — электромагнитная сила и джоулева диссипация соответственно. Во многих, интересных для практики случаях, длина зоны L сравнима с высотой канала.

[2] Наличие точек разрыва производных от u_0, ρ_0 привело бы к разрывному профилю возмущенной скорости u_1, а точек, где $\rho_0 u_0 = 0$ — к неограниченному возрастанию u_1 (формула (14)). Ограничения на функции u_0 и ρ_0 связаны с используемой моделью невязкой среды.

Уравнения первого приближения для плоского канала $|x| < \infty$, $0 < y < 1$ и круглой трубы $y < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $|x| < \infty$ имеют вид [1]

$$\rho_0 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho_0 v_1 \frac{du_0}{dy} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = f_x, \qquad \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = f_y$$

$$u_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{d\rho_0}{dy} + \frac{\rho_0}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y}(y^\nu v_1) = 0$$

$$u_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} - a_0^2 u_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - a_0^2 v_1 \frac{d\rho_0}{dy} = q^\circ \qquad (q^\circ = (\gamma - 1) q), \qquad \rho_0 u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = f_z \tag{4}$$

В системе (4) величины u_1, v_1 и w_1— проекции вектора возмущенной скорости на оси x, y и z (или θ) соответственно; $\nu = 0$ — для плоского канала и $\nu = 1$ — для круглой трубы; функции ρ_0 и u_0 зависят только от y; a_0 — скорость звука, рассчитанная по параметрам (3). Возмущающие факторы $\mathbf{f}$ и q зависят от координат x, y и газодинамических параметров (3) и считаются известными [2]. Последнее уравнение в (4) не зависит от остальных и определяет закрутку потока.

Будем считать, что $\mathbf{f}$ и q неоднородны по x и y на участке L; левее L (при $x \to -\infty$) $\mathbf{F} = 0$, $q = 0$, а правее $\mathbf{f}$ и q зависят только от y. Математически это предположение выразим в требовании сходимости интегралов

$$\int_{-\infty}^{0} \eta\, dx, \quad b(y) = \int_{0}^{\infty} (\eta - \eta_\infty)\, dx$$

и выполнении приближенного равенства

$$\int_{0}^{x} (\eta - \eta_\infty)\, dx = b$$

для x, лежащих правее L. (Здесь $\eta(x, y)$ — любая из функций $\mathbf{f}$, q; $\eta_\infty = \eta(\infty, y)$, сечение $x = 0$ принадлежит зоне L.)

Остановимся на граничных условиях для системы (4). Будем рассматривать дозвуковые течения (3). Они будут невозмущенными (факторами $\mathbf{f}$ и q), если условия на выходе из канала при «включении» возмущающих факторов подправляются таким образом, чтобы не изменялись условия на входе. В общем случае под u_0, ρ_0 и p_{00} понимаются некоторые распределения газодинамических параметров во входном сечении, реализующиеся при включенных возмущениях $\mathbf{f}$ и q.

В указанных случаях возмущения v_1, ρ_1 и p_1 равны нулю при $x \to -\infty$. На непроницаемых стенках канала (при $y = 1$) выполняется условие $v_1 = 0$.

Приступим к анализу системы (4). Проинтегрировав первое, третье и четвертое ее уравнения по x в пределах $(-\infty, x)$, получим три соотношения, позволяющие выразить u_1, p_1 и ρ_1 через интегралы от v_1 и $\partial v_1 / \partial y$. Дифференцируя далее первое и второе уравнения системы (4) по y и x соответственно, с учетом полученного выражения для u_1, находим одно уравнение в частных производных относительно скорости v_1:

$$\rho_0 u_0 \left(\alpha \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{u_0}{y^\nu} \frac{d}{dy}(\alpha \rho_0 y^\nu) - v_1 \frac{d}{dy}\left[\alpha \rho_0 y^\nu \frac{d}{dy}\left(\frac{u_0}{y^\nu}\right)\right] = \Phi$$

$$\alpha = (M_0^2 - 1)^{-1}, \quad \Phi = \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(s u_0 \rho_0), \quad s = \frac{\alpha}{\rho_0 a_0^2}(u_0 f_x - q^\circ) \tag{5}$$

$$v_1 = 0 \quad \text{при } x \to -\infty, \qquad v_1 = 0 \quad \text{при } y = 0,\ y = 1$$

Здесь M_0 — число Маха невозмущенного потока (3). При $M_0 < 1$ уравнение (5) имеет эллиптический характер. По предположению, правее L осевая неоднородность возмущающих факторов отсутствует и

$$\Phi = \Phi_\infty(y) = \frac{df_{x\infty}}{dy} - \frac{d}{dy}(s u_0 \rho_0) = \frac{dS}{dy}, \qquad S = -\alpha u_0 \left(\frac{f_{x\infty}}{u_0} - \frac{q^\circ_\infty}{a_0^2} \right) \tag{6}$$

---

[1] В случае круглой трубы y, θ, x — цилиндрические координаты.

[2] То обстоятельство, что f и q зависят только от x и y, позволило при получении (4) считать $\partial / \partial z = 0$ (или $\partial / \partial \theta = 0$).

Для несжимаемой жидкости в (5) и (6) нужно положить $\rho_0 \equiv 1, \alpha = -1,\ a_0 = \infty$.

Вследствие эллиптического характера уравнения (5), возмущения, обусловленные осевой неоднородностью Φ на L, правее L затухают на длине Δx, по порядку величины равной $l = (1 - M_*^2)^{1/2}$, где M_* — некоторое среднее по сечению канала число Маха невозмущенного потока [1] (размерная длина затухания получается умножением указанной на h). Поэтому на достаточно большом расстоянии Δx от правого конца L ($\Delta x \gtrsim l$) скорость v_1 по существу перестает зависеть от x ($v_1 = v_1^+\ (y)$) и определяется из уравнения [2]

$$\alpha\rho_0 u_0 \frac{d^2 v_1^+}{dy^2} + \frac{dv_1^+}{dy}\frac{u_0}{y^\nu}\frac{d}{dy}(\alpha\rho_0 y^\nu) - v_1^+\frac{d}{dy}\left(\alpha\rho_0 y^\nu \frac{d}{dy}\frac{u_0}{y^\nu}\right) = \frac{dS}{dy}$$

$$v_1^+(0) = 0, \qquad v_1^+(1) = 0 \tag{7}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v_1^+ = \frac{u_0}{y^\nu}\int_0^y (S + C)\,\mu\, dy, \qquad C = -\int_0^1 S\mu\, dy \Big/ \int_0^1 \mu\, dy \qquad \left(\mu = \frac{y^\nu}{\alpha\rho_0 u_0^2}\right) \tag{8}$$

Согласно этому выражению, $v_1^+ \equiv 0$ при $S = \text{const}$. Это, например, возможно при $f_{x\infty} = 0$, $q_\infty{}^\circ = 0$, или $f_{x\infty} = \text{const}$, $q^\circ{}_\infty = \text{const}$ и однородном невозмущенном потоке. В случае несжимаемой жидкости $S = f_{x\infty}$ и скорость v_1^+ может отличаться от нуля только при неоднородном распределении $f_{x\infty}$.

Определим остальные параметры течения правее зоны L, в области L', где $v_1 \approx v^+{}_1$. Течение в этой области в дальнейшем будем называть псевдоразвитым [3], а параметры снабжать верхним индексом $+$.

Проинтегрируем первое, третье и четвертое уравнения системы (4) по x в пределах $(-\infty, x)$, где x принадлежит области псевдоразвитого течения. Получим

$$\begin{gathered}
\rho_0 u_0 u_1^+ + p_1^+ + \frac{du_0}{dy}(\psi + x\rho_0 v_1^+) = x f_{x\infty} + \xi_1 \\
u_0\rho_1^+ + \rho_0 u_1^+ + \frac{d\psi}{dy} + \frac{\nu}{y}\psi + x\left[\frac{d}{dy}\rho_0 v_1^+ + \frac{\nu}{y}\rho_0 v_1^+\right] = 0 \\
u_0 p_1^+ - a_0^2 u_0 \rho_1^+ - \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dy}(\psi + x\rho_0 v_1^+) = q_\infty{}^\circ x + \xi_2
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\psi = \psi(y) = \int_{-\infty}^{0} \rho_0 v_1\, dx + \int_0^\infty \rho_0 (v_1 - v_1^+)\, dx \tag{10}$$

$$\xi_1 = \xi_1(y) = \int_{-\infty}^{0} f_x\, dx + \int_0^\infty (f_x - f_{x\infty})\, dx, \quad \xi_2 = \xi_2(y) = \int_{-\infty}^{0} q^\circ\, dx + \int_0^\infty (q^\circ - q_\infty{}^\circ)\, dx$$

Вместо верхнего индекса ∞ в интегралах (10), строго говоря, должна стоять величина x. Но так как x принадлежит области псевдоразвитого течения, где v_1, f_x и q° практически совпадают с $v_1^+, f_{x\infty}$ и $q_\infty{}^\circ$ (теоретически очень быстро выходят на эти асимптотические значения), то замена верхних пределов вполне допустима, и ξ_1, ξ_2 и ψ можно рассматривать как функции одной переменной y. Величины ξ_1 и ξ_2 считаются известными.

---

[1] Используется весьма грубая и в большинстве случаев завышенная оценка. Точную оценку, конечно, можно получить после решения уравнения (5). Заметим также, что из рассмотрения исключаются числа M_*, близкие к единице. При $M_* \to 1$ возмущение скорости u_1 безгранично возрастает, и линейная теория будет непригодной.

[2] Теоретически $v_1 \to v_1^+\ (y)$ при $x \to \infty$. Однако асимптотика определяется экспоненциальным множителем и переход к профилю $v_1^+\ (y)$ осуществляется на конечном расстоянии от L, по порядку величины равном l.

[3] Этим термином в книге [1] обозначалось течение невязкой несжимаемой жидкости в плоском канале за зоной неоднородного магнитного поля.

Из второго уравнения в системе (4) имеем

$$p_1^+ = \xi_3(y) + \varepsilon(x) \qquad \left(\xi_3 = \int_0^y f_{y\infty}\, dy\right) \tag{11}$$

Здесь ξ_3 известна, а $\varepsilon(x)$ подлежит определению. Подставляя (8) и (11) в соотношения (9) и исключая u_1^+ и ρ_1^+, получим уравнение

$$\frac{d\psi}{dy} - \psi\frac{d}{dy}\ln\frac{u_0\rho_0}{y^\nu} = \Gamma, \qquad \Gamma = t(y) - \frac{k}{\alpha u_0}, \qquad t = \frac{\xi_2}{a_0^2} - \frac{\xi_1}{u_0} - \frac{\xi_3}{u_0\alpha}$$

$$k = Cx + \varepsilon(x), \qquad \psi(0) = 0, \qquad \psi(1) = 0 \tag{12}$$

Здесь постоянная C определяется формулой (8). Все величины в (12), кроме k, зависят только от y. Величина k зависит только от x. Поэтому $k = \mathrm{const}$. Наличие двух граничных условий для ψ позволяет определить $\psi(y)$ и k. Решение (12) имеет вид

$$\psi = \frac{u_0\rho_0}{y^\nu}\int_0^y \frac{\Gamma y^\nu}{\rho_0 u_0}\, dy, \qquad k = \int_0^1 \frac{t y^\nu\, dy}{\rho_0 u_0} \Bigg/ \int_0^1 \frac{y^\nu\, dy}{\alpha\rho_0 u_0^2} \tag{13}$$

С помощью (9), (13) находятся все параметры псевдоразвитого течения

$$u_1^+ = \frac{1}{\rho_0 u_0}\left\{x\left(f_{x\infty} + C - \rho_0 v_1^+ \frac{du_0}{dy}\right) - \xi_3 - k + \xi_1 - \psi\frac{du_0}{dy}\right\} \tag{14}$$

$$\rho_1^+ = -\frac{1}{u_0}\left\{\rho_0 u_1^+ + \frac{1}{y^\nu}\frac{d}{dy}(y^\nu\psi + \rho_0 v_1^+ y^\nu x)\right\}, \qquad p_1^+ = \xi_3 + k - Cx$$

Поперечная скорость w_1^+, согласно (4), определяется формулой

$$w_1^+ = \frac{1}{\rho_0 u_0}\xi_4 + x\frac{f_{z\infty}}{\rho_0 u_0} \qquad \left(\xi_4 = \int_{-\infty}^0 f_z\, dx + \int_0^\infty (f_z - f_{z\infty})\, dx\right) \tag{15}$$

Для несжимаемой жидкости при $\mathbf{f} = \mathrm{const}$ из (13), (14) находим ($\rho_0 \equiv 1$, $\alpha = -1$, $a_0^2 = \infty$, $C = -f_{x\infty}$, $v_1^+ \equiv 0$)

$$u_1^+ = \frac{1}{u_0}\left(\xi_1 - k - \psi\frac{du_0}{dy} - yf_{y\infty}\right), \qquad p_1^+ = f_{x\infty}x + f_{y\infty}y + k \tag{16}$$

$$\psi = \frac{u_0}{y^\nu}\int_0^y \Gamma\frac{y^\nu\, dy}{u_0}, \qquad k = -\int_0^1 \frac{t y^\nu\, dy}{u_0} \Bigg/ \int_0^1 \frac{y^\nu\, dy}{u_0^2}, \qquad \Gamma = t + \frac{k}{u_0}, \qquad t = \frac{yf_{y\infty}}{u_0} - \frac{\xi_1}{u_0}$$

Определение характеристик псевдоразвитого течения проводилось (в самых простейших случаях) в магнитной гидродинамике. Так, в работе [2], в предположении $u_0 \equiv 1$, находился асимптотический профиль скорости при течении изотропно проводящей несжимаемой жидкости в магнитогидродинамическом расходомере. Соответствующий результат получается из (16), если положить $\nu = 0$, $\mathbf{f}_\infty = 0$, $u_0 \equiv 1$, а величину ξ_1 определить на основе решения задачи о распределении электрического поля в канале с непроводящими стенками [2,3]. Распространение полученных результатов на случай анизотропно проводящей жидкости и неоднородного невозмущенного потока проведено в [4].

Автор искренне благодарит за полезное обсуждение данной работы Г. М. Бам-Зеликовича и А. Н. Крайко.

Поступила 2 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. Мир, 1965 г.
2. Shercliff F. A. Edge effects in electromagnetic flowmeters. J. Nucl. Energy, 1956, vol. 3, № 305.
3. Ватажин А. Б. Регирер С. А. Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств. Дополнение к книге Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода». Мир, 1965 г.
4. Ватажин А. Б. О деформации профиля скорости в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.