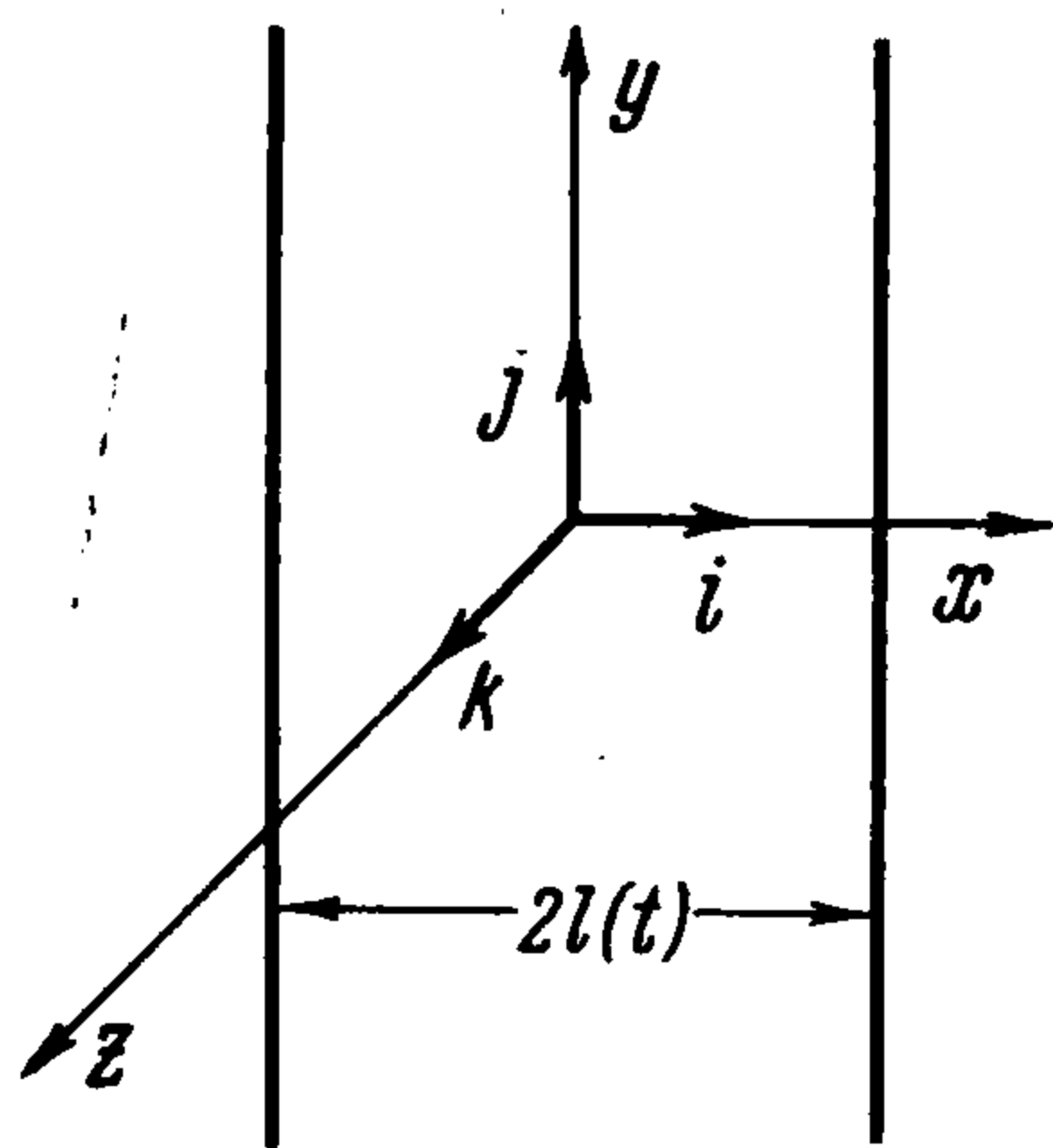


ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СЖИМАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ

И. М. Руткевич (Москва)

Идея создания сверхсильных магнитных полей путем обжатия проводящих оболочек изложена в работе Я. П. Терлецкого [1]. В экспериментах [2,3], основанных на этом методе, получены значения напряженности порядка 10^7 гс. Плоская задача об обжатии магнитного поля без учета токов смещения в вакууме решена Е. И. Биченковым [4]. Ниже рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о сжатии однородного магнитного поля для случая идеально проводящей границы, движущейся по заданному закону. При решении обеих задач используется метод интегральных преобразований.

1. Постановка плоской задачи и ее решение методом характеристик. Рассмотрим распространение плоских электромагнитных волн в бесконечной вакуумной щели, ограниченной плоскими проводящими стенками $x = \pm l(t)$ (фиг. 1).



Фиг. 1

В предположении, что электрическое и магнитное поля имеют отличные от нуля компоненты $E = E_z(x, t)$, $H = H_y(x, t)$ уравнения распространения волн имеют вид

$$c \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial t}, \quad c \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.1)$$

Электрическое поле $E' = E + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ в системе координат, связанной с движущейся стенкой, должно обращаться на стенке в нуль.

При $x = \pm l(t)$ скорость стенки $\mathbf{V} = \pm l'(t) \mathbf{i}$. Поэтому

$$E(\pm l(t), t) \pm \frac{l'(t)}{c} H(\pm l(t), t) = 0 \quad (1.2)$$

Таким образом, требуется найти решение системы (1.1) в области $D \{0 < t < T, |x| < l(t)\}$ (где T — время сближения стенок), удовлетворяющее условиям на подвижной границе (1.2) и начальным условиям $H(x, 0) = H_0, E(x, 0) = 0$

Вне вакуумной полости электромагнитное поле в начальный момент времени предполагается равным нулю. Функцию $l(t)$ будем считать убывающей, причем $l'(0) = 0$, (иначе есть разрыв в точках $(\pm l(0), 0)$, и $|l'(t)| < c$).

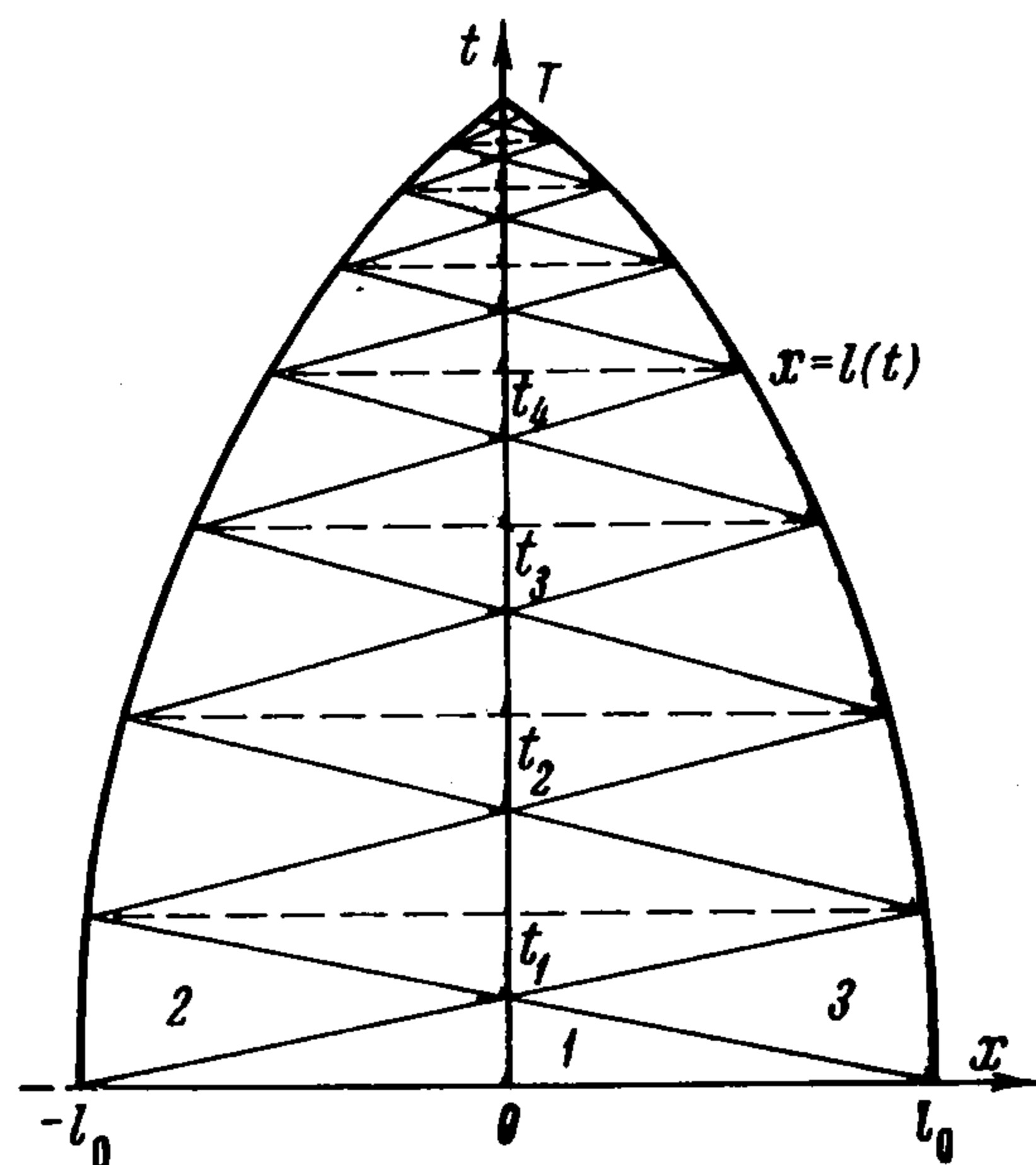
Магнитное поле симметрично, а электрическое антисимметрично по координате x , поэтому решение системы (1.1) представимо в виде

$$E(x, t) = F(x + ct) - F(-x + ct)$$

$$H(x, t) = F(x + ct) + F(-x + ct) \quad (3)$$

Пусть $\xi = x + ct, \eta = x - ct$. Из начальных условий следует

$$F(\xi) = \frac{1}{2} H_0, \quad |\xi| < l_0$$



Фиг. 2

Таким образом, решение задачи определено (фиг. 2) в области 1 $\{|\xi| < l_0, |\eta| < l_0\}$. Так как решение известно в области 1, то, используя граничные условия (1.2), можно определить решение в области 2 $\{|\xi| < l_0, -x_1 < \eta < -l_0\}$ и в области 3 $\{|\xi| < l_0, l_0 < \eta < x_1\}$, где $x_1 = l(t_1) + ct_1$, а t_1 — корень уравнения $ct_1 = l(t_1) + l_0$.

Продолжая этот процесс, можно последовательно найти распределение электромагнитного поля во всей области D .

Пусть функция $p(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$l(p) + cp = \zeta \quad (1.4)$$

Определим x_k и t_k при помощи следующих рекуррентных соотношений

$$x_k = l(t_k) + ct_k, \quad l(t_k) = -x_{k-1} + ct_k, \quad t_0 = 0 \quad (1.5)$$

Из граничных условий (1.2) следует

$$F(-l(t) + ct)(c - l'(t)) - F(l(t) + ct)(c + l'(t)) = 0 \quad (1.6)$$

Соотношение (1.6) позволяет определить значение $F(\zeta)$ в интервале (x_k, x_{k+1}) , если значения этой функции известны в интервале (x_{k-1}, x_k) . Положим $F_k(\zeta) = F(\zeta)$ при $\zeta \in (x_{k-1}, x_k)$. Можно показать, что

$$F_k(\zeta) = F_{k-1}(-\zeta + 2p(\zeta)) \frac{c - l'(p(\zeta))}{c + l'(p(\zeta))}, \quad F_0(\zeta) = 1/2 H_0 \quad (1.7)$$

Функция $F(\zeta)$, определенная посредством формул (1.7), непрерывна на интервале $-l_0 < \zeta < cT$.

Обозначим магнитное поле на стенке $H(l(t), t) = H^*(t)$. Функцию $F(\zeta)$ можно связать с полем на границе области H^* . Действительно, из (1.3) и (1.7) следует

$$F(\zeta) = 1/2 H_0, \quad -l_0 < \zeta < l_0$$

$$F(\zeta) = 1/2 H^*(p(\zeta)) \{1 - v(p(\zeta))\}, \quad \zeta > l_0, \quad v(t) = c^{-1} l'(t) \quad (1.8)$$

2. Решение плоской задачи методом интегральных преобразований. К функциям E и H применим конечное преобразование Фурье f по координате x следующего вида

$$f\{E\} = g(k, t) = \int_{-l(t)}^{l(t)} E(x, t) e^{ikx} dx, \quad f\{H\} = h(k, t) = \int_{-l(t)}^{l(t)} H(x, t) e^{ikx} dx \quad (2.1)$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, t) e^{-ikx} dk, \quad H(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(k, t) e^{-ikx} dk \quad (2.2)$$

Применение преобразования f к исходной системе (1.1) приводит к следующей системе для изображений по Фурье g и h

$$-ikg = c^{-1} \partial h / \partial t, \quad -ikh = c^{-1} \partial g / \partial t + 2i \sin kl(t) (1 - v^2(t)) H^*(t)$$

Исключив электрическое поле из уравнений и граничных условий, можно получить уравнение для h

$$\partial^2 h / \partial t^2 + c^2 k^2 h = \varphi(t, k), \quad \varphi(t, k) = 2H^*(t) \sin kl(t) (1 - v^2(t)) c^2 k \quad (2.3)$$

При этом граничные условия автоматически входят в уравнение. Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$h(k, t) = h_1(k) e^{i\omega t} + h_2(k) e^{-i\omega t} + \int_0^t \frac{\varphi(\tau, k) \sin \omega(t - \tau)}{\omega} d\tau, \quad \omega = ck \quad (2.4)$$

Функции $h_1(k)$ и $h_2(k)$ определяются из начальных условий

$$h_1(k) = h_2(k) = H_0 k^{-1} \sin kl_0 \quad (2.5)$$

В выражение для $h(k, t)$ входит неизвестное поле на границе $H^*(t)$. Для его определения необходимо воспользоваться формулой обращения (2.2) и положить в ней $x = l(t)$. При этом интеграл в правой части формулы обращения следует удвоить, поскольку вне вакуумной полости поле предполагается равным нулю, а интеграл Фурье сходится в точке разрыва к среднему значению, равному

$$1/2 \{H(l(t) - 0, t) + H(l(t) + 0, t)\} = 1/2 H^*(t)$$

Пусть функция $\tau(t)$ является корнем уравнения

$$c(t - \tau) = l(t) + l(\tau) \quad (2.6)$$

Тогда $H^*(t)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$\begin{aligned} H^*(t) &= H_0 [1 + v(t)]^{-1}, & 0 < t < t_1 \\ H^*(t) &= H^*(\tau(t)) \{1 - v(\tau(t))\} [1 + v(t)]^{-1}, & t_1 < t < T \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функция $H^*(t)$ известна в интервале $(0, t_1)$. Поэтому в интервале $t_1 < t < t_2$ известна $H^*(\tau(t))$, так как при этом значения τ пробегают интервал $(0, t_1)$, и соотношение (2.7) позволяет определить $H^*(t)$ в интервале (t_1, t_2) . Продолжая таким способом определение значений $H^*(t)$, приходим к рекуррентным формулам, позволяющим определить значения $H^*(t)$ в интервале (t_k, t_{k+1}) по известным значениям в интервале (t_{k-1}, t_k) . Значения t_k определяются по формулам (1.5), и сам процесс решения функционального уравнения (2.7) напоминает процесс нахождения функции $F(\zeta)$ при решении задачи методом характеристик, изложенном в п. 1.

Определим последовательность функций $\tau_n(t)$ следующим образом:

$$\tau_n(t) = \tau_{n-1}(\tau(t)), \quad \tau_1(t) = \tau(t)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H^*(t) &= H^0(t) \quad (0 < t < t_1), & H^*(t) &= H^0(t) \Pi_k(t) \quad (t_{k-1} < t < t_k) \\ H^0(t) &= \frac{H_0}{1 + v(t)}, & \Pi_k &= \prod_{n=1}^{k-1} W(\tau_n(t)), & W(\tau) &= \frac{1 - v(\tau)}{1 + v(\tau)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Можно доказать следующие утверждения, связанные с качественными особенностями граничной функции

1°. Последовательность времени t_k , определяемая формулами (1.5), стремится к T при $k \rightarrow \infty$, а последовательность $t_k - t_{k-1}$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

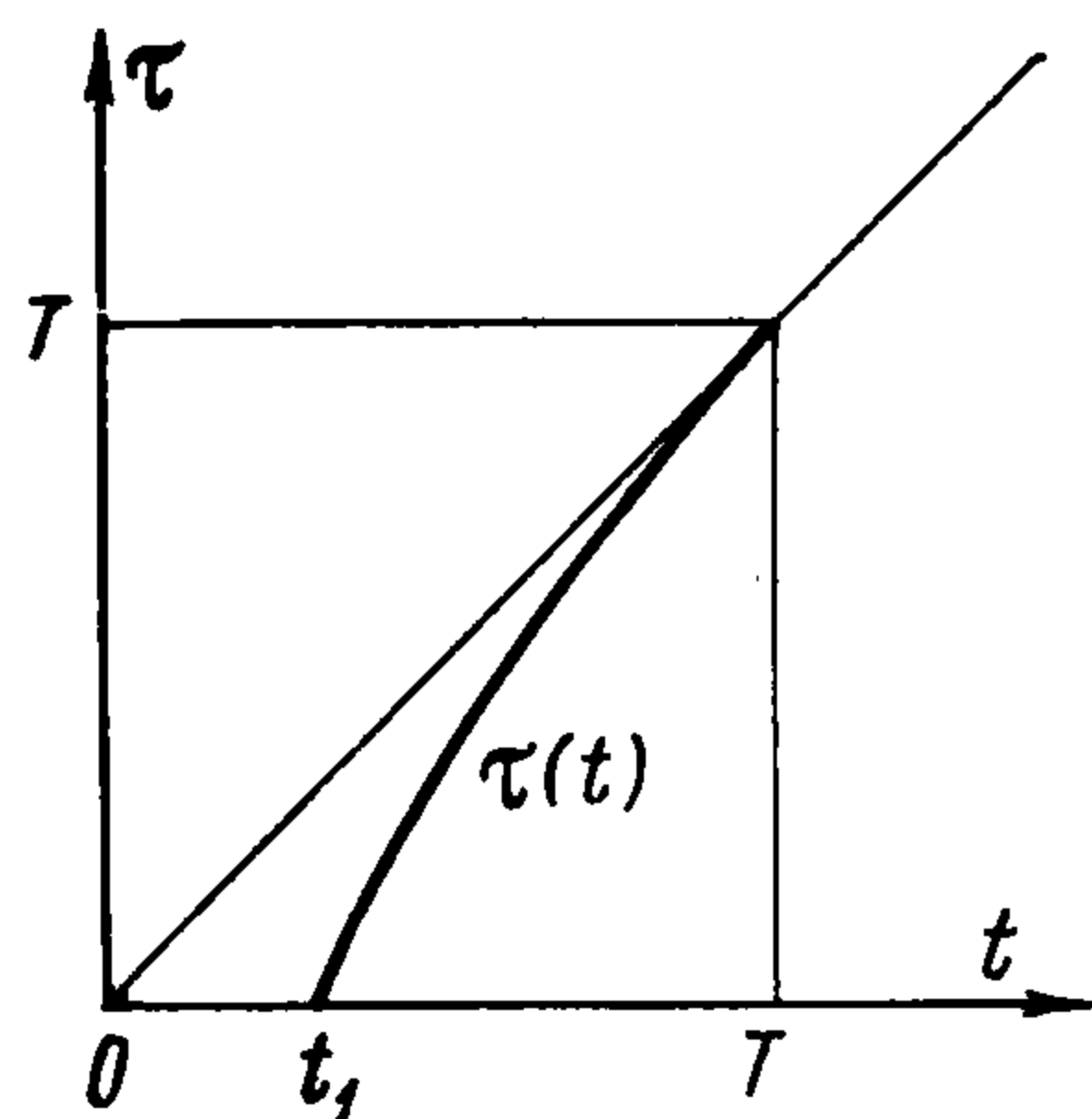
2°. Функция $\tau(t)$, определенная в (2.6), сколь угодно мало отличается от t при $t \rightarrow T$ (фиг. 3).

3°. Пусть $l'(t) \leq 0$ и $l''(t) < 0$ (в этом случае время сближения стенок T всегда конечно). Тогда $H^*(t)$ монотонно возрастает с t , причем $\lim_{t \rightarrow T} H^*(t) = \infty$.

По известной граничной функции $H^*(t)$ можно найти распределение магнитного поля $H(x, t)$ внутри полости, если воспользоваться формулой обращения (2.2). В результате получим

$$\begin{aligned} H(x, t) &= F(x + ct) + F(-x + ct), & F(\zeta) &= 1/2 H_0 \quad (-l_0 < \zeta < l_0) \\ F(\zeta) &= 1/2 H^*(p(\zeta)) \{1 - v(p(\zeta))\} & (l_0 < \zeta < cT) \end{aligned}$$

Последняя формула в точности совпадает с (1.8), а функция $p(\zeta)$ определяется как решение уравнения (1.4).



Фиг. 3

В качестве примера можно рассмотреть случай, когда начиная с момента времени t_1 скорость сближения стенок становится постоянной и равной $v(t_1) = v$. В этом случае уравнение (2.7) имеет простое аналитическое решение

$$H^*(t) = H^*(t_2) (T - t_2) / (T - t) \quad (t_2 < t < T)$$

Для распределения $H(x, t)$ получается выражение

$$\begin{aligned} H(x, t) &= H^*(t_2) (1 - v^2) \frac{(T - t_2)(T - t)}{(T - t)^2 - x^2 / c^2} \\ &\{ |x| \leq l(t), t_2 < t < T \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отношение максимального по x значения поля $H(x, t) = H^*(t)$ к минимальному по x значению поля на оси $H(0, t)$ равно $1 / (1 - v^2)$. При малых по сравнению с единицей значениях v^2 поле внутри вакуумной щели можно рассматривать как пространственно однородное.

3. Осесимметричная задача. Пусть вакуумная полость ограничена бесконечным круговым идеально проводящим цилиндром, граница которого движется по заданному закону $R(t)$. При этом функция $R(t)$ предполагается убывающей, причем $R'(0) = 0$ и $|R'(t)| < c$. В предположении, что магнитное поле имеет отличную от нуля аксиальную компоненту $H = H_z(r, t)$, а электрическое — азимутальную компоненту $E = -E_\theta(r, t)$ придем к системе

$$c \partial H / \partial r = \partial E / \partial t, \quad c \partial (rE) / \partial r = r \partial H / \partial t$$

с условием на подвижной границе

$$E(R(t), t) + R'(t) c^{-1} H(R(t), t) = 0$$

и начальными условиями $H(r, 0) = H_0, E(r, 0) = 0$.

Можно, исключив электрическое поле из уравнений и граничных условий, сформулировать задачу только для магнитного поля. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) \quad \{0 < r < R(t), 0 < t < T\} \quad (3.1)$$

с условием на подвижной границе

$$c^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_{r=R(t)} = - \frac{d}{dt} [R'(t) H(R(t), t)] - \frac{R'^2(t) H(R(t), t)}{R(t)} - R'(t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=R(t)}$$

и начальными условиями

$$H(r, 0) = H_0, \quad (\partial H / \partial t)_{t=0} = 0$$

Для решения задачи применяется конечное преобразование Ганкеля следующего вида

$$h(\rho, t) = \int_0^{R(t)} H(r, t) J_0(\rho r) r dr, \quad H(r, t) = \int_0^\infty h(\rho, t) J_0(\rho r) \rho d\rho \quad (3.2)$$

При этом поле во внешности полости предполагается равным нулю. Изображение поля h удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \partial^2 h / \partial t^2 + c^2 \rho^2 h = \Phi(\rho, t), \quad \Phi(\rho, t) = c^2 H^*(t) \rho R(t) J_1(\rho R(t)) \times \\ \times (1 - v^2(t)), \quad v(t) = c^{-1} R'(t), \quad H^*(t) = H(R(t), t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

С учетом начальных условий, решение уравнения (3.3) имеет вид

$$h(\rho, t) = \frac{H_0 R_0 \cos c t \rho J_1(\rho R_0)}{\rho} + \int_0^t \frac{\Phi(\rho, \tau) \sin c(t - \tau) \rho}{c \rho} d\tau \quad (3.4)$$

В функцию $\Phi(\rho, t)$ входит неизвестное поле на границе области $H^*(t)$. Для его определения воспользуемся, как и в плоском случае, формулой обращения из (3.2), положив в ней $r = R(t)$ и удвоив интеграл в правой части. Тогда имеем

$$\begin{aligned} H^*(t) = 2H_0 R_0 \int_0^\infty J_0(\rho R(t)) J_1(\rho R_0) \cos c t \rho d\rho + \\ + 2c \int_0^\infty \left\{ \int_0^t H^*(\tau) R(\tau) J_1(\rho R(\tau)) [1 - v^2(\tau)] \sin c(t - \tau) \rho d\tau \right\} J_0(\rho R(t)) \rho d\rho \end{aligned} \quad (3.5)$$

В последнем интеграле можно изменить порядок интегрирования, если под повторным интегралом понимать следующий предел

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^t H^*(\tau) R(\tau) J_1(\rho R(\tau)) [1 - v^2(\tau)] \sin c(t - \tau) \rho d\tau \right) J_0(\rho R(t)) \rho d\rho = \\ = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-b\rho} \left\{ \int_0^t H^*(\tau) R(\tau) J_1(\rho R(\tau)) [1 - v^2(\tau)] \sin c(t - \tau) \rho d\tau \right\} J_0(\rho R(t)) \rho d\rho$$

Обозначим

$$M(\rho, \tau) = H^*(\tau) R(\tau) [1 - v^2(\tau)] \sin c(t - \tau) \rho e^{-b\rho} J_0(\rho R(t)) J_1(\rho R(\tau)) \rho.$$

Тогда, если $H^*(\tau)$ интегрируема на интервале $(0, t)$, то интегралы

$$\int_0^t M(\rho, \tau) d\tau, \quad \int_0^{\infty} M(\rho, \tau) d\rho$$

сходятся равномерно, — первый относительно ρ , $\rho \in (0, \infty)$, а второй относительно τ на любом компактном интервале, содержащемся внутри интервала $(0, t)$ и не содержащем особенностей $H^*(t)$. Пусть $H^*(t)$ имеет, например, единственную особенность при $t = t^*$.

Обозначим: $\Delta(\delta)$ компактное множество $\{\Delta(\delta) = [0, t^* - \delta] + [t^* + \delta, t]\}$,

$$I(\delta, \rho) = \int_{\Delta(\delta)} M(\rho, \tau) d\tau$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} I(\delta, \rho) d\rho$$

сходится равномерно относительно δ , $0 < \delta < \delta_0$, где δ_0 — произвольно малое положительное число. Вследствие равномерной сходимости указанных выше интегралов можно утверждать [5]:

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^t M(\rho, \tau) d\tau \right) d\rho = \int_0^t \left(\int_0^{\infty} M(\rho, \tau) d\rho \right) d\tau \quad (3.6)$$

Используя (3.5) и переходя к пределу при $b \rightarrow +0$ в (3.6), для $H^*(t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$H^*(t) = B(t) + 2c \int_0^t R(\tau) [1 - v^2(\tau)] S(t, \tau) H^*(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

$$B(t) = 2H_0 R_0 \int_0^{\infty} J_0(\rho R(t)) J_1(\rho R_0) \cos c t \rho d\rho$$

$$S(t, \tau) = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-b\rho} \sin c(t - \tau) \rho J_0(\rho R(t)) J_1(\rho R(\tau)) \rho d\rho \quad (3.8)$$

В классическом смысле интеграл

$$\int_0^{\infty} x J_0(\alpha x) J_1(\beta x) \sin \gamma x dx$$

расходится для всех значений α , β и γ , отличных от нуля. Однако можно регуляризовать указанный выше интеграл, приписав ему некоторое обобщенное значение [6]

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \lim_{b \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-bx} J_0(\alpha x) J_1(\beta x) x \sin \gamma x dx$$

Если рассмотреть сходящийся интеграл

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^{\infty} J_0(\alpha x) J_0(\beta x) \sin \gamma x dx$$

то можно доказать, что $\Phi = -\partial\Psi / \partial\beta$. Интеграл $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ представляется через функции Лежандра первого и второго рода [7]

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad (0 < \gamma < \beta - \alpha, \beta > \alpha)$$

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} P_{-1/2}(A) \quad (\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha)$$

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} Q_{-1/2}(-A) \quad (\beta + \alpha < \gamma < \infty), \quad A = (\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2) / 2\alpha\beta$$

В данном случае функции Лежандра сводятся к полным эллиптическим интегралам первого рода и можно показать, что

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad (0 < \gamma < \beta - \alpha), \quad \Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} K(k) \quad (\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha)$$

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \mu K(\mu) \quad (\beta + \alpha < \gamma < \infty), \quad k = \left(1 - \frac{(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2}{4\alpha\beta}\right)^{1/2}, \quad \mu = \frac{1}{k}$$

Следовательно, для $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -\partial\Psi / \partial\beta$ имеет место формула

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad (0 < \gamma < \beta - \alpha)$$

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2\pi\beta\sqrt{\alpha\beta}} \left[K(k) \left(1 - \frac{\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}{4\alpha\beta k^2}\right) + E(k) \frac{\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}{4\alpha\beta k^2 (1 - k^2)} \right] \quad (\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha)$$

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\mu}{2\pi\beta\sqrt{\alpha\beta}} \left[K(\mu) - E(\mu) \frac{\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}{4\alpha\beta (1 - \mu^2)} \right] \quad (\beta + \alpha < \gamma < \infty)$$

Рассмотрим теперь другой интеграл

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^{\infty} J_0(\alpha x) J_1(\beta x) \cos \gamma x dx$$

Можно показать, что

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = \Omega(\alpha, \beta, 0) - \int_0^{\gamma} \Phi(\alpha, \beta, \nu) d\nu \quad (3.9)$$

Представлением (3.9) воспользуемся лишь для значений $\gamma < \alpha + \beta$. Для значений $\gamma > \alpha + \beta$ интеграл $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ вычислен в работе [8]. В результате имеем

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = 1/\beta \quad (0 < \gamma < \beta - \alpha)$$

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^k \left[K(\kappa) \left(\frac{\nu^2 + \beta^2 - \alpha^2}{4\alpha\beta\kappa^2} - 1 \right) - E(\kappa) \frac{\nu^2 + \beta^2 - \alpha^2}{4\alpha\beta\kappa^2 (1 - \kappa^2)} \right] \frac{\kappa}{\nu} d\kappa$$

$$\nu = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta\kappa^2} \quad (\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha)$$

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{\beta}{2\gamma^2} F_4\left(\frac{3}{2}, 1; 1, 2; \frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) \quad (\beta + \alpha < \gamma < \infty)$$

Здесь $F_4(\alpha_1, \alpha_2; \delta, \delta'; x, y)$ — обобщенная гипергеометрическая функция двух переменных [9].

Функции $B(t)$ и $S(t, \tau)$, определенные в (3.8), выражаются через $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ следующим образом:

$$B(t) = 2H_0R_0\Omega(R(t), R_0, ct), \quad S(t, \tau) = \Phi(R(t), R(\tau), c(t - \tau))$$

Для $B(t)$ и $S(t, \tau)$ получаются следующие формулы:

$$B(t) = H_0 \left(1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{R_0 R(t)} \int_0^{k^*} \left[K(\kappa) \left(\frac{\vartheta^*}{\kappa^2} - 1 \right) - E(\kappa) \frac{\vartheta^*}{\kappa^2 (1 - \kappa^2)} \right] \frac{\kappa}{v^*} d\kappa \right)$$

$$k^* = \left(1 - \frac{[R_0 + R(t)]^2 - c^2 t^2}{4R_0 R(t)} \right)^{1/2} \quad (0 < t < t_1)$$

$$\vartheta^* = \frac{v^{*2} + R_0^2 - R(t)^2}{4R_0 R(t)}, \quad v^* = \sqrt{[R_0 - R(t)]^2 + 4R_0 R(t)}$$

$$B(t) = -H_0 \frac{R_0^2}{c^2 t^2} F_4 \left(\frac{3}{2}, 1; 1, 2; \frac{R(t)^2}{c^2 t^2}, \frac{R_0^2}{c^2 t^2} \right) \quad (t_1 < t < T)$$

Здесь t_1 — корень уравнения $R_0 + R(t) = ct$.

$$S(t, \tau) = \frac{1}{2\pi R(\tau) \sqrt{R(t) R(\tau)}} \left[K(k_+) \left(1 - \frac{\vartheta_+}{k_+^2} \right) + E(k_+) \frac{\vartheta_+}{k_+^2 (1 - k_+^2)} \right]$$

$$\{0 < t < t_1, 0 < \tau < t\}, \quad \{t_1 < t < T, \lambda(t) < \tau < t\}$$

$$k_+ = \left(1 - \frac{[R(t) + R(\tau)]^2 - c^2 (t - \tau)^2}{4R(t) R(\tau)} \right)^{1/2}, \quad \vartheta_+ = \frac{R(\tau)^2 + c^2 (t - \tau)^2 - R(t)^2}{4R(t) R(\tau)}$$

$$S(t, \tau) = \frac{1}{2\pi R(\tau) \sqrt{R(t) R(\tau)} k_+} \left[K(1/k_+) + E(1/k_+) \frac{\vartheta_+ k_+^2}{1 - k_+^2} \right]$$

$$\{t_1 < t < T, 0 < \tau < \lambda(t)\}$$

Функция $\lambda(t)$ определяется уравнением $c(t - \lambda) = R(t) + R(\lambda)$.

Свободный член интегрального уравнения $B(t)$ при $t = 0$ принимает значение H_0 , при $t = t_1$ имеет логарифмическую особенность, при $t \gg t_1$ справедлива формула:

$$B(t) = -H_0 (R_0^2 / c^2 t^2) \{1 + O(R_0^2 / c^2 t^2)\}$$

Функция $S(t, \tau)$ имеет особенность при $\tau = \lambda(t)$, которая представляет собой суперпозицию логарифмической особенности и простого полюса. Физический смысл функции $\lambda(t)$ прост¹. Если возмущение начинает распространяться от границы полости в момент времени $\lambda(t)$, то отраженная от оси цилиндра волна возвращается на стенку в момент времени t .

Итак, исходная задача в осесимметричном случае сводится к интегральному уравнению² Вольтерра второго рода (3.7) относительно граничной функции.

Пусть $L(t, \tau) = 2cR(\tau)(1 - v^2(\tau))S(t, \tau)$. Тогда уравнение (3.7) примет вид

$$H^*(t) = B(t) + \int_0^t L(t, \tau) H^*(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

При $t < t_1$ ядро уравнения (3.10) непрерывно, и решение $H^*(t)$ представимо в виде ряда Неймана

$$H^*(t) = B(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t L^n(t, \tau) B(\tau) d\tau$$

где $L^n(t, \tau)$ — итерированные ядра от $L(t, \tau)$.

При $t > t_1$ уравнение (3.10) становится сингулярным, так как $L(t, \tau)$ имеет особенность по τ в точке $\tau = \lambda(t)$. При этом интеграл в правой части уравнения следует понимать в смысле главного значения.

Если известна граничная функция $H^*(t)$, то можно найти распределение магнитного поля $H(r, t)$. Для этого необходимо воспользоваться формулой обращения (3.2).

¹ Аналогичная функция возникает и в плоской задаче (формула (2.6)).

² В плоском случае интегральное уравнение вырождается в функциональное, так как его ядро имеет вид дельта-функции Дирака.

Распределение $H(r, t)$ имеет вид

$$H(r, t) = B_*(r, t) + c \int_0^t H^*(\tau) R(\tau) [1 - v(\tau)^2] S_*(r, t, \tau) d\tau$$

$$B_*(r, t) = H_0 \quad \{0 < t < c^{-1}(R_0 - r), 0 < r < R(t)\}$$

$$B_*(r, t) = H_0 \left(1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{R_0 r} \int_0^{k_*} \left[K(\kappa) \left(\frac{\vartheta_*}{\kappa^2} - 1 \right) - E(\kappa) \frac{\vartheta_*}{\kappa^2 (1 - \kappa^2)} \right] \frac{\kappa}{v_*} d\kappa \right)$$

$$\{0 < r < R(t), (R_0 - r)c^{-1} < t < (R_0 + r)c^{-1}\}$$

$$k_* = \left(1 - \frac{(R_0 + r)^2 - c^2 t^2}{4R_0 r} \right)^{1/2}, \quad v_* = \sqrt{(R_0 - r^2) + 4\kappa^2 R_0 r}, \quad \vartheta_* = \frac{v_*^2 + R_0^2 - r^2}{4R_0 r}$$

$$B_*(r, t) = -H_0 \frac{R_0^2}{c^2 t^2} F_4 \left(\frac{3}{2}, 1; 1, 2; \frac{r^2}{c^2 t^2}, \frac{R_0^2}{c^2 t^2} \right) \quad \{0 < r < R(t), (R_0 + r)c^{-1} < t < T\}$$

$$S_*(r, t, \tau) = 0 \quad \{0 < r < R(\tau) - c(t - \tau), 0 < t < R_0 c^{-1}, 0 < \tau < t\}$$

$$S_*(r, t, \tau) = \frac{1}{2\pi R(\tau) \sqrt{R(\tau) r}} \left[K(k_-) \left(1 - \frac{\vartheta_-}{k_-^2} \right) + E(k_-) \frac{\vartheta_-}{k_-^2 (1 - k_-^2)} \right]$$

$$\{R(\tau) - c(t - \tau) < r < R(t), 0 < t < R_0 c^{-1}, 0 < \tau < t\}$$

$$\{0 < r < R(t), R_0 c^{-1} < t < T, \omega < \tau < t\}$$

$$k_- = \left(1 - \frac{[r + R(\tau)]^2 - c^2(t - \tau)^2}{4rR(\tau)} \right)^{1/2}, \quad \vartheta_- = \frac{c^2(t - \tau)^2 - r^2 + R(\tau)^2}{4R(\tau)r}$$

$$S_*(r, t, \tau) = \frac{1}{2\pi k_- R(\tau) \sqrt{R(\tau) r}} \left[K(1/k_-) + E(1/k_-) \frac{\vartheta_- k_-^2}{1 - k_-^2} \right]$$

$$\{0 < r < R(t), R_0 c^{-1} < t < T, 0 < \tau < \omega\}$$

Функция $\omega = \omega(t - r/c)$ определяется из уравнения $c(t - \omega) = r + R(\omega)$.

Из написанных выше формул следует, что фронт первой волны, отраженной от оси цилиндра, несет на себе сингулярность.

Метод интегральных преобразований при решении задач об обжатии магнитного поля является более универсальным, чем метод характеристик. Так, например, решения задач с осевой симметрией или задач с учетом диссипации энергии электромагнитного поля не представимы в виде простых волн, и из двух указанных методов останется эффективным только метод интегральных преобразований. Последний может быть применен к определенному классу задач с подвижной границей, когда граница области представляет собой экран, исключаяющий взаимодействие между внешней и внутренней частями системы.

Поступила 3 XI 1966

НИИ механики Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Терлецкий Я. П. Получение сверхсильных магнитных полей путем быстрого сжатия проводящих оболочек. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 2, стр. 387.
2. Fowler S. M., Garn W. B., Caird R. S. Production of very high magnetic fields by implosion. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, № 3, 588.
3. Сахаров А. Д. Взрывомангнитные генераторы. Успехи физ. наук, 1966, т. 88, вып. 4.
4. Биченков Е. И. Влияние конечной проводимости на получение сильных магнитных полей путем быстрого обжатия проводящих оболочек. ПМТФ, 1964, № 6.
5. Бурбак Н. Функции действительного переменного. М., Наука, 1965, стр. 123—124.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., Физматгиз, 1962, стр. 601, 715.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
8. Bailey W. N. Some infinite integrals involving Bessel functions. Proc. London Math. Soc., 1936, ser. 2, vol. 40, № 1, pp. 37—48.
9. Бейтмен Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., Наука, 1965, стр. 220.