УПРОЩЕННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО КОНТУРА [1,2]

Анжело Миели (Хьюстон, США)

Рассмотрена задача о построении поперечного контура конического тела заданной длины и заданной площади основания, которое обладает минимальным общим сопротивлением в гиперзвуковом потоке. Предполагается, что распределение давления дается модифицированной формулой Ньютона, а осредненный по поверхности коэффициент трения есть константа. Исследован как случай тонкого, так и случай нетонкого тела. При этом дан простой путь определения свойств экстремалей, который основывается сначала на решении локальной, а затем интегральной задачи. В частности, оказывается, что поперечный контур, который обеспечивает минимум сопротивления, приходящегося на единицу площади основания, при локальном подходе, совпадает с экстремальным контуром интегральной, т. е. полной вариационной задачи. В зависимости от длины, площади основания и коэффициента поверхностного трения возможны три решения: (1) полная окружность, (2) комбинация отрезков прямых линий, касательных к некоторой «базисной» окружности, и (3) комбинация дуг окружности и отрезков прямых линий, касательных к этим дугам. Для всех этих решений площадь основания, приходящаяся на единицу длины периметра, и аэродинамическое сопротивление, соответствующее единице площади основания, постоянны вдоль экстремали.

В последние годы задача о построении поперечного контура тела, обтекаемого гиперзвуковым потоком, привлекла значительное внимание. После первой работы А. А. Гонора и Г. Г. Черного [2] по минимизации волнового сопротивления минимизация общего сопротивления рассматривалась Миели и Сарисом [3], Беллманом [4], Рэйном [5] и Миели и Халлом [6].

В данной статье задача минимизации общего сопротивления при гиперзвуковой скорости для тела заданной длины и площади основания обсуждается вновь. Дан простой путь определения свойств экстремалей на основе решения сначала локальной задачи, а затем интегральной, т. е. полной вариационной задачи. В частности, и для тонких и для нетонких тел показано, что поперечный контур, который дает локальный минимум сопротивления, приходящегося на единицу площади основания, совпадает с экстремальным контуром интегральной задачи.

Используются следующие предположения: (*a*) тело имеет плоскость симметрии, делящую его на левую и правую половины; (*b*) плоскость основания перпендикулярна плоскости симметрии; (*c*) вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости симметрии и перпендикулярен плоскости основания; (*d*) коэффициент давления пропорционален квадрату косинуса между направлением вектора скорости набегающего потока и вектором нормали к каждому элементу поверхности; (*e*) донным сопротивлением можно пренебречь; (*f*) сопротивление трения пропорционально площади омываемой газом поверхности; (*g*) продольный контур прямолинеен, т. е. рассматриваются конические тела.

1. Формулировка задачи. Пусть D — сопротивление, q — скоростной напор набегающего газа, n — фактор, модифицирующий формулу Ньютона, C_f — осредненный по поверхности коэффициент трения, который считается постоянным, l — длина, S — площадь основания, а θ и R — полярные координаты любой точки основания. Введем константу

$$f = (C_f \,/\, 4n)^{1/3}$$

и определим безразмерные: радиус основания, параметр сопротивления и параметр площади по формулам

$$\rho = R \,/\, lf, \qquad y = D \,/\, 2\, nql^2f^4, \quad K = S \,/\, l^2f^2$$

[1] Заметка представляет собой сжатое изложение исследования, описанного в [1].

[2] Доклад, прочитанный в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР 12 сентября 1966 г.

В соответствии с предположениями (*a*) — (*g*) видим, что задача минимизации сопротивления при заданных длине и площади основания состоит в нахождении экстремума интеграла [3-6]

$$J = \int_0^\pi \left[\frac{\rho^6}{(\rho^2 + \rho^{\cdot 2} + mf^2\rho^4)} + 2(\rho^2 + \rho^{\cdot 2})^{1/2}\right] d\theta \qquad \left(\rho^\cdot = \frac{d\rho}{d\theta}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $m = 0$ — для тонкого и 1 — для нетонкого тела. Допустимые функции $\rho(\theta)$ должны удовлетворять изопериметрическому условию

$$K = \int_0^\pi \rho^2\, d\theta \tag{1.2}$$

Здесь K — заданная константа. Граничные значения радиуса $\rho(0)$ и $\rho(\pi)$ свободны и должны находиться из решения вариационной задачи.

2. Локальное решение. Прежде чем решать сформулированную выше вариационную задачу, рассмотрим связанную с ней локальную задачу. Для лю бого заданного контура $\rho(\theta)$ определим функции

$$J(\theta) = \int_0^\theta \left[\frac{\rho^6}{(\rho^2 + \rho^{\cdot 2} + mf^2\rho^4)} + 2(\rho^2 + \rho^{\cdot 2})^{1/2}\right] d\theta, \qquad K(\theta) = \int_0^\theta \rho^2\, d\theta \tag{2.1}$$

которые таковы, что

$$J(0) = 0, \qquad K(0) = 0; \qquad J(\pi) = J, \qquad K(\pi) = K$$

Заметим, что в силу (2.1)

$$\frac{dJ}{d\theta} = \frac{\rho^6}{\rho^2 + \rho^{\cdot 2} + mf^2\rho^4} + 2(\rho^2 + \rho^{\cdot 2})^{1/2}, \qquad \frac{dK}{d\theta} = \rho^2$$

В соответствии с этим удельное аэродинамическое сопротивление, приходящееся на единицу площади основания, пропорционально

$$\frac{dJ}{dK} = \frac{\rho^4}{\rho^2 + \rho^{\cdot 2} + mf^2\rho^4} + 2(\rho^2 + \rho^{\cdot 2})^{1/2}$$

и может быть переписано в виде

$$\frac{dJ}{dK} = A(u), \qquad A(u) = \frac{u^2}{(1 + mf^2u^2)} + \frac{2}{u}, \qquad u = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + \rho^{\cdot 2})^{1/2}} \tag{2.2}$$

Переменная u пропорциональна площади основания, приходящейся на единицу длины периметра, причем имеет место неравенство

$$u \leqslant \rho \tag{2.3}$$

Так как удельное аэродинамическое сопротивление (2.2) зависит только от u, то можно сформулировать следующую задачу. Для каждого данного радиуса ρ найти такое значение параметра u, которое минимизирует локальное значение удельного аэродинамического сопротивления (2.2). Разумеется, что допустимые значения u должны удовлетворять ограничению (2.3). Эта задача будет обычной задачей теории максимума и минимума, она допускает решения

$$u = \rho \quad (\rho \leqslant u_0) \qquad \text{или} \qquad u = u_0 \quad (\rho \geqslant u_0) \tag{2.4}$$

Здесь u_0 есть корень уравнения

$$dA / du = 0 \qquad \text{или} \qquad mf^2u_0^2 - u_0^{3/2} + 1 = 0 \tag{2.5}$$

Так как константа f имеет порядок 10^{-1}, то уравнения (2.5) можно решить при помощи линеаризации в окрестности $u_0 = 1$. Это дает

$$u_0 \approx 1 + (2/3)\, mf^2 \tag{2.6}$$

Для тонких тел ($m = 0$) уравнение (2.6) дает $u_0 = 1$, т. е. точное решение уравнения (2.5). Величина u_0 для нетонкого тела отличается от соответствующей величины для тонкого тела менее чем на 1%.

3. Интегральные характеристики. Пусть тело построено так, что всюду удовлетворяются условия локальной оптимальности (2.4). Тогда возникают следующие вопросы. Какова геометрия такого тела? Каково его аэродинамическое сопротивление?

Решения класса 1. Эти решения даются первым соотношением (2.4), которое можно представить в виде

$$\rho^{\cdot} = 0 \tag{3.1}$$

После интегрирования с учетом ограничения на площадь основания получим

$$\rho = \mathrm{const} = \sqrt{K / \pi}$$

Образующая поперечного сечения такого тела есть окружность, а его параметр сопротивления

$$J = K^2 / (\pi + mKf^2) + 2\sqrt{\pi K}, \qquad K \leqslant \pi u_0^2$$

Решения класса 2. Эти решения подчиняются второму соотношению (2.4), которое можно записать в виде

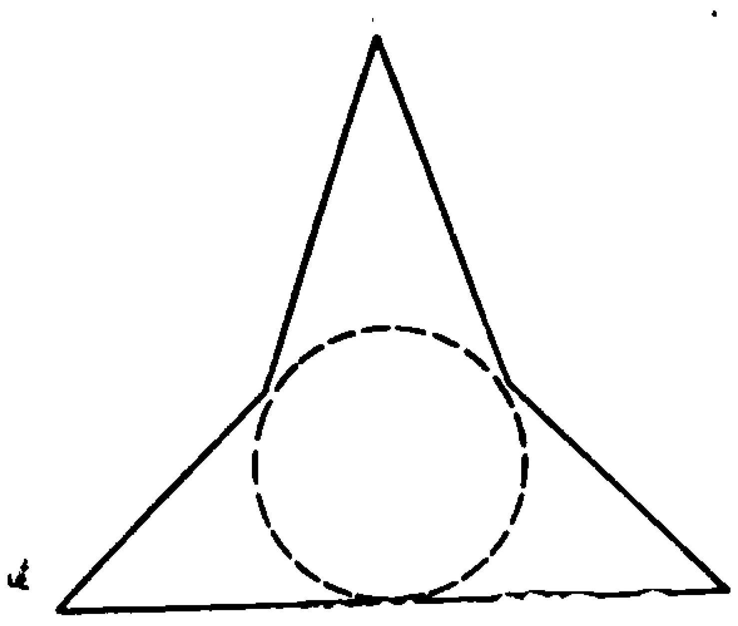
$$\rho^2 + \rho^{\cdot 2} = \rho^4 / u_0^2 \text{ или } (\rho / u_0)^2 + (\rho^{\cdot} / u_0)^2 = (\rho / u_0)^4 \tag{3.2}$$

Интегрируя, получим соотношение $\rho \cos(\theta - \mathrm{const}) = u_0$; т. е. уравнение отрезка прямой линии, которая касается базисной окружности радиуса $\rho = u_0$. Комбинируя различные такие отрезки, можно получить замкнутое тело, имеющее

$$J = (2u_0 + \sqrt{u_0})\, K, \qquad K \geqslant \pi u_0^2 \tag{3.3}$$

Решения класса 3. Эти решения получаются как комбинация поддуг (3.1) и (3.2). В соответствии с требованием непрерывности поддуги (3.1) характеризуются радиусом $\rho = u_0$. Следовательно, эти решения состоят из дуг базисной окружности с $\rho = u_0$ и отрезков прямых линий, касающихся этих дуг. Более того, параметр сопротивления дается уравнением (3.3).

4. Решение вариационной задачи. Теперь рассмотрим задачу минимизации интеграла (1.1) при наличии ограничения (1.2). Эта изопериметрическая задача со свободными концевыми точками эквивалентна задаче минимизации интеграла



Фиг. 1

$$J^* = I - \lambda K = \int_0^{\pi} F(\rho, \rho^{\cdot}, \lambda)\, d\theta$$

с функцией F, определенной равенством

$$F = \rho^2 [A(u) - \lambda] \tag{4.1}$$

Здесь λ — неопределенный постоянный множитель Лагранжа, а $A(u)$ и $u(\rho, \rho^{\cdot})$ определены (2.2). Стандартные приемы вариационного исчисления показывают, что экстремаль должна удовлетворять первому интегралу уравнения Эйлера

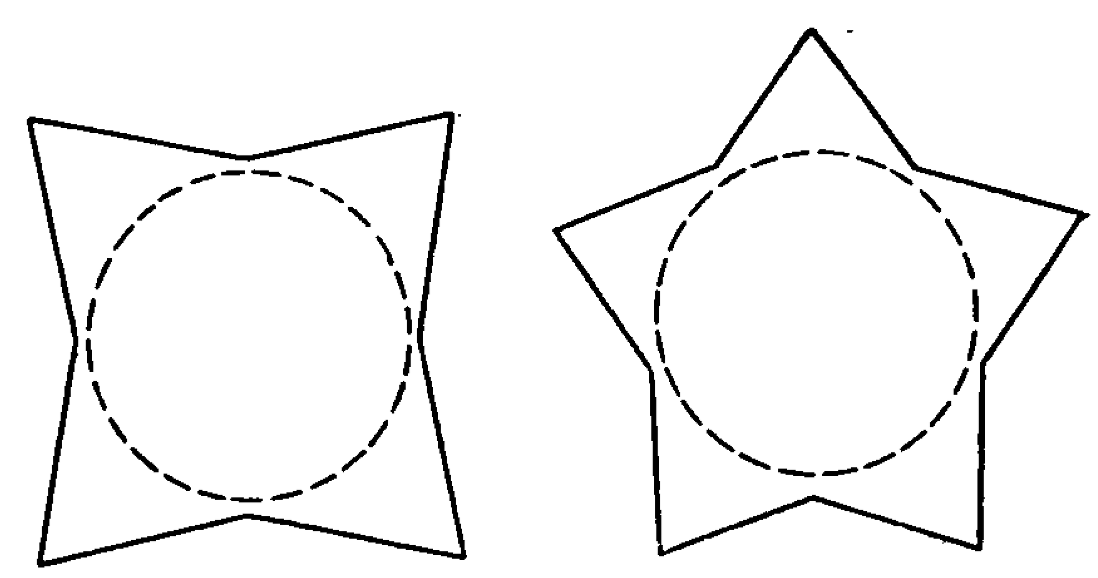
$$F - \rho^{\cdot} F_{\rho^{\cdot}} = C \tag{4.2}$$

и естественным граничным условиям

$$F_{\rho^{\cdot}} = 0 \tag{4.3}$$

в начальной и конечной точках. При наличии разрыва производных $\rho^{\cdot}$ в точках соединения поддуг, составляющих экстремаль, должны выполняться угловые условия

$$\Delta(F - \rho^{\cdot} F_{\rho^{\cdot}}) = 0, \qquad \Delta F_{\rho^{\cdot}} = 0 \tag{4.4}$$



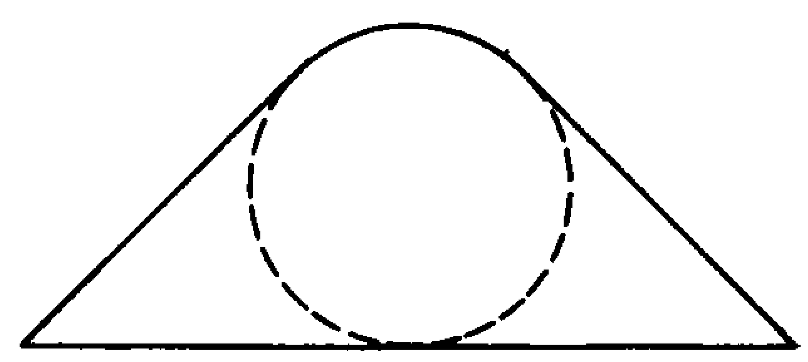
Фиг. 2

В приведенных соотношениях в соответствии с (2.2) и (4.1) производная

$$F_{\rho^{\cdot}} = \rho^2 (dA / du)(\partial u / \partial \rho^{\cdot})$$

В то время как непосредственное математическое решение этой вариационной задачи не может быть получено (см., например, [3]), отсутствие в плоскости поперечного сечения тела какого-либо преимущественного направления наводит на мысль, что локальное решение (2.4) совпадает с решением вариационной задачи. Что это так, можно видеть из следующего рассмотрения. Так как $\partial u / \partial \rho^{\cdot} = 0$ вдоль решения (2.4), а $dA / du = 0$ вдоль решения (2.4), то для локального решения всюду

$$F_{\rho^{\cdot}} = 0$$



Фиг. 3

и, следовательно, удовлетворяются естественные граничные условия (4.3) и второе угловое условие (4.4). Затем, записав первый интеграл (4.2) и первое угловое условие (4.4) соответственно в виде

$$F = C, \qquad \Delta F = 0 \qquad (4.5)$$

поставим следующий вопрос, можно ли для произвольной заданной константы K подобрать константы λ и C так, чтобы первое уравнение (4.5) превратилось в тождество? Это можно сделать, положив:

для решения класса 1

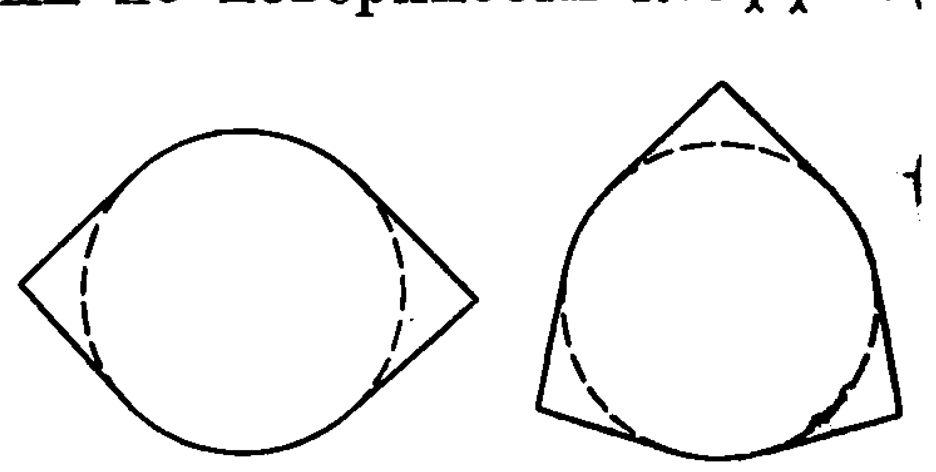
$$\lambda = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/2} + \frac{K(2\pi + mKf^2)}{(\pi + mKf^2)^2}, \qquad C = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/2} - \frac{K^2}{(\pi + mKf^2)^2}$$

для решений классов 2 и 3

$$\lambda = 2 / u_0 + \sqrt{u_0}, \quad C = 0$$

Для последних решений угловое условие (4.6) удовлетворяется в силу того, что любая поддуга экстремали характеризуется константой интегрирования $C = 0$.

Выше рассмотрена задача минимизации общего сопротивления конического тела, имеющего заданную длину и заданную площадь основания. Предполагалось, что распределение давления описывается модифицированной формулой Ньютона, а осредненный по поверхности коэффициент трения постоянен. Исследованы случаи тонкого и нетонкого тела и дан простой путь получения свойств экстремалей на основе решения локальной задачи, которое предшествовало решению вариационной задачи. В частности, показано, что поперечный контур, который доставляет локальный минимум сопротивления, приходящегося на единицу площади основания, совпадает с экстремальным контуром, получающимся из решения вариационной задачи.



Фиг. 4

В зависимости от длины, площади основания и коэффициента поверхностного трения (которые определяют коэффициент площади K) возможны три решения: (1) полная окружность; (2) комбинация отрезков прямых линий, касательных к базисной окружности (фиг. 1 и 2); (3) комбинация дуг окружностей одного радиуса и отрезков прямых линий, касательных к ним (фиг. 3 и 4). Каждое решение характеризуется постоянством площади основания, соответствующей единице длины периметра. Аналогичным свойством обладает аэродинамическое сопротивление, приходящееся на единицу площади основания или на единицу длины периметра. Такая инвариантность обусловлена физической природой задачи и связана с отсутствием преимущественного направления в плоскости поперечного сечения тела.

Поступила 26 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. M i e l e A. Simplified Approach to the Problem of the Optimum Transversal Contour. Rice University, Aero-Astronautics Report No. 19, 1966.
2. C h e r n y i G. G., G o n o r A. L. Trasversal Contour of Minimum Pressure Drag. В сб.: Theory of Optimum Aerodynamic Shapes, N.— Y., Acad. Press, 1965.
3. M i e l e A., S a a r i s G. R. Transversal Contour of Minimum Total Drag. В сб.: Theory of Optimum Aerodynamic Shapes, N.—Y., Acad. Press, 1965.
4. B e l l m a n R. Young's Inequality and the Problem of the Optimum Transversal Contour. В сб.: Theory of Optimum Aerodynamic Shapes, N.— Y., Acad. Press, 1965.
5. R e y n J. W. Cones of Minimum Drag in Newtonian Flow. J. Astron. Sci., 1965, vol. 12, No. 2.
6. M i e l e A., H u l l D. G. Sufficiency Proofs for the Problem of the Optimum Transversal Contour. SIAM Journal, 1967, vol. 15, No. 1.