ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В АСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский

(Ленинград)

Большинство работ по асимметрической теории упругости посвящено обоснованию теории и выводу основных соотношений [1–5]. В этих работах получены уравнения статики, законы Гука и условия Сен-Венана, обобщенные на случай моментных взаимодействий. Уравнения статики в пренебрежении объемно распределенных сил и моментов получились следующими:

$$\frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial \mu_{lk}}{\partial x_k} + \sigma_{nm} \in_{lmn} = 0 \tag{0.1}$$

Здесь σ_{lk} — асимметрический ($\sigma_{lk} \neq \sigma_{kl}$) тензор напряжений, μ_{lk} — тензор микромоментов, $\in_{lmn}$ — тензор Леви-Чивита. Обобщенные законы Гука приняли вид

$$\sigma_{lk} = \lambda \mathrm{E}_{nn}\delta_{lk} + (\mu + \gamma)\,\mathrm{E}_{kl} + (\mu - \gamma)\,\mathrm{E}_{lk}, \qquad \mathrm{E}_{lk} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \Omega_s \in_{skl} \tag{0.2}$$

$$\mu_{lk} = 2\eta r_{nn}\delta_{lk} + 2\tau r_{kl} + 2\theta r_{lk}, \qquad r_{lk} = \frac{\partial \Omega_l}{\partial x_k}$$

Здесь u — вектор смещения, Ω — вектор поворота, который в асимметрической теории упругости является самостоятельной характеристикой деформирования; λ, μ, γ, η, τ, θ — материальные характеристики среды.

Обобщенные условия Сен-Венана стали такими:

$$\frac{\partial r_{lk}}{\partial x_p} \in_{kpn} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}_{lk}}{\partial x_p} \in_{kpn} = r_{ss}\delta_{nl} - r_{nl} \tag{0.3}$$

Гораздо меньше внимания уделяется разработке математических методов решения уравнений асимметрической теории упругости, что существенно для выяснения специфики эффектов и области применимости этой теории.

Учитывая огромные математические трудности, возникающие при решении краевых задач асимметрической теории упругости, можно идти или по пути отыскания поправочных членов к решениям задач обычной теории упругости, или разработать точные методы, но для частных случаев деформирования тел. Таким наиболее важным случаем деформирования (как и в обычной теории упругости) является случай плоской деформации. Основные уравнения плоской деформации получены в работе [6]. Там же дано их решение введением двух функций четвертого порядка. Их внутреннее согласование для удовлетворения обобщенных условий Бельтрами — Митчела создает дополнительную трудность при нахождении решений. В настоящей работе получено решение через функции четвертого и второго порядка, не нуждающиеся в дополнительном согласовании, дано комплексное представление этого решения и поставлен вопрос о разделении граничных условий.

§ 1. **Уравнения плоской деформации в асимметрической теории упругости.** Деформацию будем называть плоской, если

$$u_x = u\,(x,\ y), \quad u_y = v\,(x,\ y), \quad u_z = 0, \quad \Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega\,(x,\ y) \tag{1.1}$$

Как видно из (1.1), при плоской деформации все сечения бесконечно длинного призматического тела деформируются одинаково, т. е. все частицы смещаются в плоскости, перпендикулярной оси z, и поворачиваются вокруг той же оси. Учитывая (1.1) в (0.2), получим обобщенные законы Гука для случая плоской деформации

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_{yy} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\gamma\,(w - \Omega), \qquad \sigma_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\gamma\,(w - \Omega)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \tag{1.2}$$

$$\mu_{xx} = \mu_{xy} = \mu_{yx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} = 0$$

$$\mu_{xz} = 2\tau \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \mu_{yz} = 2\tau \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad \mu_{zx} = 2\theta \frac{\partial \Omega}{zx}, \qquad \mu_{zy} = 2\theta \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

Здесь w — вращение участка среды как целого. Существенно упрощаются уравнения равновесия (0.1), если в них учесть соотношения (1.2)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} + \sigma_{yx} - \sigma_{xy} = 0 \tag{1.3}$$

Остальные уравнения статики удовлетворяются тождественно. Что касается обобщенных условий Бельтрами — Митчела, то их остается лишь три

$$\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

$$-\frac{(\mu - \gamma)}{4\mu\gamma} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} + \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2\theta} \mu_{zx}$$

$$-\frac{(\mu - \gamma)}{4\mu\gamma} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2\theta} \mu_{zy}$$

Если учесть (1.3), то они легко приводятся к виду

$$\Delta (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \tag{1.5}$$

$$\mu_{zy} = K_2^2 \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) + \frac{(\varkappa + 1)\theta}{4\mu} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \qquad K_2^2 = -\frac{(\mu - \gamma)\theta}{2\mu\gamma}$$

$$\mu_{zx} = K_2^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) - \frac{(\varkappa + 1)\theta}{4\mu} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \qquad \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

Таким образом, уравнения (1.3) и (1.4) являются основными уравнениями плоской деформации в асимметрической теории упругости. Отметим, что такие величины, как $\sigma_{zz} = \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (σ — коэффициент Пуассона), μ_{xz} и μ_{yz} находятся после решения задачи, т. е. чтобы деформация тела была плоской, к нему необходимо приложить определенные σ_{zz}, μ_{xz} и μ_{yz}.

2. Решение уравнений. Ищем решение уравнений (1.3) и (1.4), через некоторые вспомогательные функции U и F, представив напряжения следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

Легко видеть, что первые два уравнения равновесия в силу (2.1) удовлетворяются тождественно. Последние два уравнения системы (1.5) будут удовлетворяться тождественно, если их рассматривать как представление μ_{zx} и μ_{zy} через функции U и F согласно (2.1)

$$\mu_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} (K_2^2 \Delta F) - \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta U \tag{2.2}$$

$$\mu_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} (K_2^2 \Delta F) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta U, \qquad \nu = \frac{(\lambda + 2\mu)\theta}{\mu(\lambda + \mu)}$$

Первое уравнение системы (1.5) говорит о том, что величина U есть функция бигармоническая

$$\Delta\Delta U = 0 \tag{2.3}$$

---

[1] При необходимости учета объемных сил и моментов нужно иметь в виду, что при плоской деформации они должны быть вида

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = 0, \quad m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = m(x, y)$$

а последнее соотношение системы (1.3) приводит к уравнению

$$\Delta\,(K_2^2 \Delta F - F) = 0 \tag{2.4}$$

которое можно заменить уравнением типа Гельмгольца [1]

$$K_2^2 \Delta F - F = 0 \tag{2.5}$$

Учитывая (2.5), а также тот факт, что $^1/_2 \nu \Delta U$ — функция гармоническая и, следовательно, связана со своей сопряженной функцией Q соотношениями

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta U, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta U$$

выражение (2.2) можно записать в виде

$$\mu_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}(F + Q), \qquad \mu_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}(F + Q) \tag{2.6}$$

Таким образом, выражения (2.1) и (2.6) при условиях (2.3) и (2.5) дают общее решение уравнений (1.3) и (1.5). Кстати, из выражений для σ_{xy} и σ_{yx} с учетом (2.5) следует смысл функции F, как величины пропорциональной асимметрической части тензора напряжений

$$F = K_2^2(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})$$

Выражения (2.1) и (2.6) можно записать в комплексном виде, если воспользоваться формулой Гурса для бигармонической функции [7]

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \chi(z)$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — произвольные аналитические функции. Выражения (2.1) и (2.6) в компактной записи имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)] && (\Phi(z) = \varphi'(z))\\
&\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + i\frac{\partial F}{\partial x}\right) &&\\
&\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{yx} = 2\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] - 2i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + i\frac{\partial F}{\partial x}\right) &&\\
&\mu_{zy} - i\mu_{zx} = 2\nu\overline{\Phi'(z)} + \frac{\partial F}{\partial y} - i\frac{\partial F}{\partial x} && (\Psi(z) = \chi''(z) = \psi'(z))
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Из первых двух соотношений (2.7) следует, что

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi}'(z) + \overline{\Psi}(z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - i\frac{\partial F}{\partial x}\right) \tag{2.8}$$

Это выражение можно проинтегрировать по x и получить выражение для главного вектора напряжений

$$i(X + iY) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{\partial F}{\partial y} - i\frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.9}$$

Из (1.2) легко получить выражение для перемещений, пренебрегая перемещением тела как целого

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{\partial F}{\partial y} + i\frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.10}$$

а из соотношения для μ_{zx} — выражение для угла поворота Ω, не учитывая поворот тела как целого

$$2\theta\Omega = F - \nu i\,[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}] \tag{2.11}$$

Соотношения (2.8) (или (2.9)), (2.10), (2.11) и последнее соотношение из (2.7) дают выражения для напряжений, угла поворота, перемещений и микромоментов через две произвольные аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ и функцию типа Гельмгольца F. Легко увидеть, что они являются обобщением известных соотношений Колосова — Мусхелишвили в обычной теории упругости.

---

[1] Решение уравнения (2.4) отличается от решения уравнения (2.5) на гармоническую функцию, которую можно включить в U.

§ 3. Основные задачи. Разделение граничных условий для полуплоскости. Задачи обычной теории упругости делят на три типа:

1) на контуре заданы напряжения (динамическое условие),

2) на контуре заданы смещения (кинематическое условие),

3) на части контура заданы напряжения, а на остальной — перемещения (смешанное условие).

Такая классификация задач обычной теории упругости естественна, так как в ней напряженное состояние описывается лишь тензором напряжений, а деформированное— тензором деформаций (полем смещений). В асимметрической теории упругости напряженное состояние описывается двумя динамическими величинами (тензором напряжений σ_{lk} и тензором микромоментов μ_{lk}), а деформированное состояние — двумя кинематическими величинами (полем смещений $\mathbf{u}$ и полем углов поворота $\mathbf{\Omega}$. Как было показано в выражениях (2.7) — (2.11)), эти четыре величины выражаются через три произвольные функции, две из которых гармонические ($\varphi\psi$) и одна типа Гельмгольца F, поэтому для полного описания напряженного или деформированного состояния в асимметрической теории упругости необходимо на контуре задать три любые величины из четырех

$$\sigma_{lk},\ \mu_{lk},\ \mathbf{u},\ \mathbf{\Omega}$$

По аналогии с обычной теорией упругости будем называть первой основной задачей асимметрической теории упругости, когда на контуре заданы напряжения и микромоменты (динамические величины), а второй,— когда на контуре заданы смещения и угол поворота (кинематические величины). Наряду с этими основными задачами, в асимметрической теории упругости могут быть сформулированы еще смешанные задачи (в том смысле, что на контуре задается часть величин динамических, а часть кинематических, например: а) напряжения и угол поворота, б) смещения и микромоменты), которые будем называть смешанными задачами асимметрической теории упругости второго рода, в отличие от смешанных задач первого рода, когда на части контура заданы одни величины, а на другой — другие. Таких задач в асимметрической теории упругости также больше, чем в обычной, но они рассматриваться пока не будут.

Решение краевых задач асимметрической теории упругости приводит к большим математическим трудностям по сравнению с решением краевых задач обычной теории упругости. Существенная трудность краевых задач асимметрической теории упругости обусловлена «перепутанностью» граничных условий для гармонических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и функции типа Гельмгольца F.

Однако для полуплоскости краевые условия можно «распутать», т. е. сформулировать отдельно краевую задачу для определения $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и отдельно для F. Покажем это на примере первой основной задачи асимметрической теории упругости, краевые условия которой имеют вид

$$\begin{gathered} N(x) - iT(x) = \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi}(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - i\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=0} \\ M(x) = \nu\left[\Phi'(x) + \overline{\Phi'(x)}\right] + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{y=0} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ — граничные значения соответственно σ_{yy}, σ_{xy}, μ_{zy}, причем считается, что тело занимает нижнюю полуплоскость. Первое соотношение (3.1) представляет собой краевую задачу обычной теории упругости для определения Φ и Ψ, если предполагать, что граничное значение последнего слагаемого этого уравнения известно. Из него находим

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - i\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]_{y=0}\frac{dx}{x-z} \\ \Phi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{N(x) - iT(x)}{x-z}\,dx \end{gathered} \tag{3.2}$$

Подставив (3.2) во второе соотношение (3.1), получим

$$\left[\frac{\partial^3 F^*}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=0}=\left[\Phi_0'(x)+\overline{\Phi_0'(x)}-\frac{1}{\nu}\;M(x)\right]$$
$$F^*(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta \tag{3.3}$$

Условие (3.3) и есть граничное условие для определения F. Знание последней сводит решение первой основной задачи асимметрической теории упругости к решению основной задачи обычной теории упругости, но с другими граничными условиями, как это видно из первого соотношения (3.1). Аналогичным образом можно распутать граничные условия и для остальных краевых задач асимметрической теории упругости для полуплоскости. Приведем вид граничных условий для нахождения F, когда на контуре заданы:

смещения и угол поворота $u(x)$, $v(x)$, $\Omega(x)$

$$\left[\frac{\partial^2 F^*}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\varkappa}{\nu}F\right]_{y=0}=\varkappa\left[\frac{2\theta}{\nu}\,\Omega(x)-i\,(\overline{\varphi_0'}-\varphi_0')\right] \tag{3.4}$$

напряжения и угол поворота $N(x)$, $T(x)$, $\Omega(x)$

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F^*}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{\nu}F\right]_{y=0}=\left[i\,(\Phi_0(x)-\overline{\Phi_0(x)})+\frac{2\theta}{\nu}\,\Omega(x)\right] \tag{3.5}$$

смещения и микромоменты $u(x)$, $v(x)$, $M(x)$

$$\left[\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3 F^*}{\partial x^3}+\frac{\varkappa}{\nu}\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=0}=\varkappa\left[\frac{1}{\nu}M(x)-(\varphi_0''+\overline{\varphi_0''})\right] \tag{3.6}$$

Здесь Φ_0 и φ_0 всюду означают решение соответствующей задачи обычной теории упругости.

Полученные граничные условия (3.3) — (3.6) для F существенно отличаются от известных граничных задач для уравнения типа Гельмгольца. Нахождение F с граничными условиями (3.3) — (.3.6) составляют специфическую трудность решения задач асимметрической теории упругости и требует особого рассмотрения.

Поступила 25 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения. Физ. тверд. тела, 1963, т. 5, № 9, стр. 2591—2598.
2. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, № 9, стр. 2689—2699.
3. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, стр. 401—408.
4. Grioli G. Elasticitá asimmetrica. Ann. mat. pura ed. appl., 1960, vol. 50, p. 389.
5. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couplestresses in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. and Analisis, 1962, vol. 11, № 5, pp. 415—448.
6. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1117—1120.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1964.