ОБ УСЛОВИЯХ КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев

(Москва)

1. Вопросы теории разрушения принадлежат к числу основных в механике твердого деформируемого тела. Многие предельные условия, сформулированные различными исследователями для ряда моделей твердого деформированного тела, могут быть рассмотрены как условия разрушения.

Для пластических тел подобные условия не зависят от времени [1]; для материалов, свойства которых зависят от времени, условия разрушения могут быть сформулированы, например, следуя [2,3].

Разрушение ряда материалов может быть описано в рамках модели упругого тела. Предельные условия в этом случае могут быть сформулированы различным образом.

В работе [4], выполненной по идее А. Ю. Ишлинского, разрушение упругого тела связывалось с достижением напряжений некоторого предельного значения. Предельное условие $f(\sigma_{ij}) = 0$ рассматривалось в качестве условия разрушения хрупкого тела в [5]. В работе [6] самоподдерживающееся разрушение связано с предельной величиной потенциальной энергии.

Теория распространения трещин в упругих телах, ведущая свое начало от Гриффита, также может быть рассмотрена как теория разрушения упругих тел. В качестве модели Гриффит [7] рассмотрел упругое тело с разрезами S (поверхности разрыва перемещений). При виртуальном приращении поверхности разреза δS внешние силы p_i, приложенные к телу, совершают работу δA, равную изменению потенциальной энергии тела δW ($\delta W = \delta A$). Гриффит предположил, что изменение поверхности разреза δS ведет к приращению некоторой функции потенциальной энергии $\delta \Pi$ и написал условие равновесия разреза (трещины)

$$\delta \Pi = \delta W \tag{1.1}$$

Очевидно, что при $\delta \Pi > \delta W$ будет иметь место устойчивое состояние разреза, при $\delta \Pi < \delta W$ — неустойчивое. Нейтральное (равновесное) состояние определяется выражением (1.1). Условие (1.1) можно переписать в виде

$$F - \frac{\delta W}{\delta S} = 0, \qquad F = \frac{\delta \Pi}{\delta S} \tag{1.2}$$

Гриффит истолковал величину $\delta \Pi$ как изменение поверхностной энергии тела и определил величину $F = T_0$ — const как поверхностное натяжение.

Позднее Ирвин [8] и Орован [9] предложили другую интерпретацию величины F и предложили связывать ее с эффективной плотностью поверхностной энергии, с работой, затрачиваемой на пластические деформации вблизи конца трещины.

Отметим также, что обсуждение различных возможностей обобщения теории Гриффита содержится в работе [10].

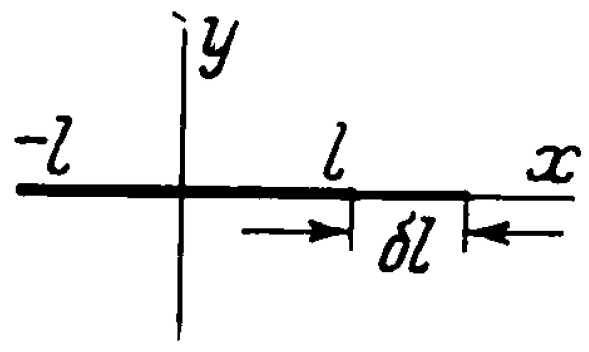
Функции F для разных материалов могут быть даны различные интерпретации (можно представить, например, что изменение $\delta \Pi$ обусловливается одновременно и изменением поверхностной энергии и работой, затрачиваемой на пластическое деформирование при трещинообразовании и т. п.). Но следует иметь в виду, что теория Гриффита принадлежит к числу феноменологических теорий, является одним из разделов механики сплошной среды и непосредственно не связана с объяснением физического механизма образования трещин. В основе теории Гриффита лежит формулировка соотношений (1.1), (1.2). Величина $\delta W / \delta S$ в общем случае определяется из решения задачи теории упругости. Что же касается определения функции F, то она должна быть определена из некоторой системы макроэкспериментов.

В качестве аналогичного примера сошлемся на теорию разрушения Мора, которая используется для определения прочности упругих тел из материалов с различными физическими механизмами прочностных свойств. Однако при использовании теории Мора механика интересует условие предельного состояния, определяемое из системы макроопытов.

В теории трещин важное значение играет формула Ирвина [11]. Ирвин рассмотрел в плоскости xy разрез длиной $2l$ (фиг. 1) и воспользовался асимптотическими представлениями решения [12] вблизи концов разреза

$$\sigma_y = \frac{N}{\sqrt{x-l}} + O(\sqrt{x-l}), \qquad v = \frac{4(1-\sigma^2)N}{E}\sqrt{l-x} + O[(l-x)^{3/2}] \qquad (1.3)$$

где σ_y — нормальное напряжение, v — перемещение вдоль оси y, E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона. Далее Ирвин получил, что если δl направлено вдоль l, то



Фиг. 1

$$\delta W / \delta l = CN^2, \qquad C = 2\pi(1-\sigma^2) / E \qquad (1.4)$$

Тогда из (1.2) и (1.4) следует

$$N = (F_0 / C)^{1/2} \qquad (1.5)$$

где F_0 — величина F, отнесенная к единице площади.

Согласно (1.3) и (1.5) можно написать, что в предельном состоянии

$$\sigma_y{}^\circ = \frac{(F_0/C)^{1/2}}{\sqrt{x-l}} + O(\sqrt{x-l}), \qquad v^\circ = \frac{4(1-\sigma^2)(F_0/C)^{1/2}}{E}\sqrt{l-x} + O[(l-x)^{3/2}] \qquad (1.6)$$

Радиус кривизны конца раскрытой трещины ρ при $x = l$, очевидно, равен

$$\rho^\circ = {}^1\!/_2 N^2 = {}^1\!/_2 F_0 / C \qquad (1.7)$$

Значит, следствием формулы Ирвина является то обстоятельство, что энергетическое условие (1.2) для случая плоских трещин может быть записано как статическое или кинематическое [13]

$$\sigma_y = \sigma^\circ{}_y \qquad (N=No) \qquad (1.8)$$

$$\rho = \rho^\circ \qquad (N=No) \qquad (1.9)$$

В частности, из формулы Ирвина (1.4 — 1.6) следует, что если $F_0 = 0$, то у края трещины напряжение σ_y конечно и имеет место плавное смыкание краев трещин.

Ранее эти свойства в форме гипотезы были выдвинуты С. А. Христиановичем [14]. Из формулы (1.4) также следует, что упругая энергия имеет в этом случае стационарное значение (это обстоятельство обсуждалось в [15]). Вопросам математической теории трещин посвящена обширная библиография. Отметим работу [16], посвященную вычислению «освобождающейся» энергии при распространении трещин, а также исследования [17–20]. В [21] и др. развивались вариационные принципы разрушения.

Следует отметить, что при рассмотрении различных задач механики твердого деформированного тела часто приходится сталкиваться с различными особенностями решений. Например, неограниченность напряжений вблизи концов жесткого прямоугольного штампа, вдавливаемого в упругое полупространство, в окрестности различных выточек и отверстий (особенно, имеющих входные углы), вблизи сосредоточенных сил и т. п. В теории идеальной пластичности можно указать на центр веера характеристик, в котором величина среднего давления зависит от направления выходящей характеристики. Аналогичные примеры могут быть указаны из других разделов механики сплошной среды.

Хорошо известно, что подобные особенности решений не соответствуют поведению реальных свойств материалов и являются следствием предположений, определяющих данную модель. В то же время анализ этих особенностей является необходимым элементом математического исследования задачи. В теории трещин Гриффита (при $F \neq 0$) подобные особенности имеются вблизи края трещины, в окрестности которого, вообще говоря, имеет место бесконечность некоторых компонент напряжений.

Однако, это обстоятельство не может иметь какое-либо существенное значение при оценке теории Гриффита. Основным критерием ценности теории в рамках механики сплошной среды служит совпадение ее результатов с данными макроэксперимента.

2. Используя идеи Гриффита, ниже рассмотрим условия распространения конечных полостей в упругих телах. Предположим, что в ненапряженном упругом теле есть некоторая конечная полость. Далее, пусть к телу приложена система внешних сил p_i, под действием которой тело деформируется. Для простоты будем считать контур полости свободным от нагрузок.

Дадим полости некоторое виртуальное изменение объема δV (в частных случаях, поверхности δS, длины δl). Отметим, что в линейной теории упругости при малых деформациях граничные условия формулируются на недеформированной поверхности, и под виртуальным изменением объема здесь понимается изменение объема полости в недеформированном состоянии.

Подобное виртуальное изменение объема связано с освобождением (присоединением) определенных связей, поэтому внешние силы p_i при этом совершат работу δA, равную освобожденной (присоединенной) упругой энергии δW.

Выделению из тела упругой энергии δW препятствует, очевидно, некоторая работа связей $\delta \Pi$. Поэтому условие распространения полости может быть записано в виде

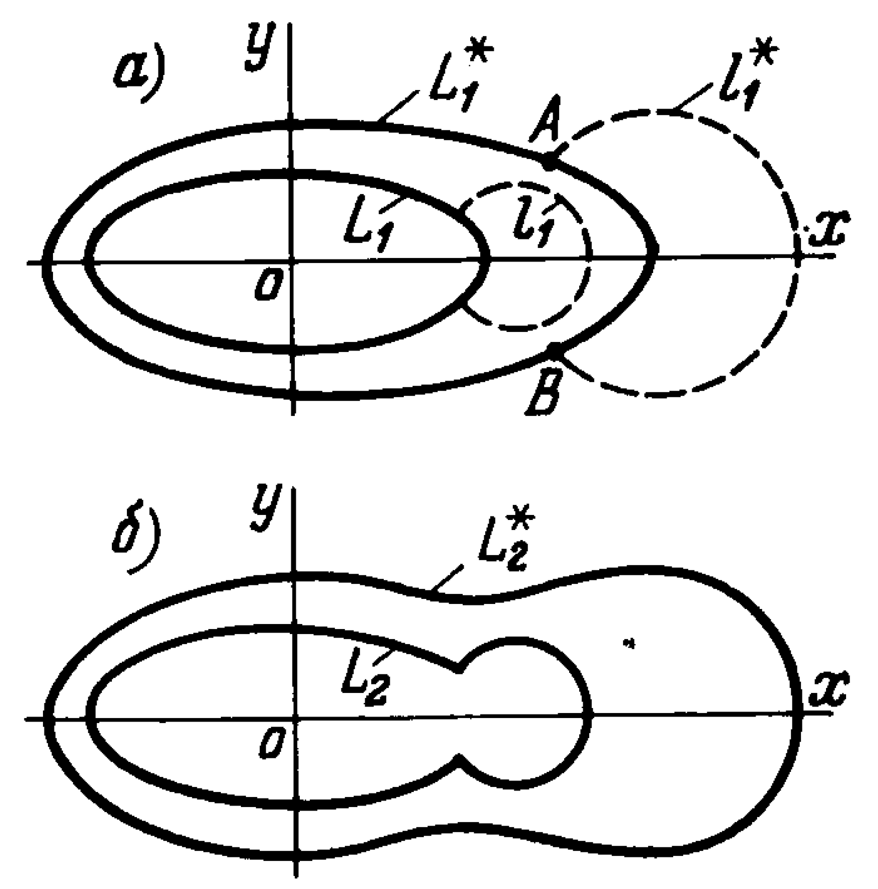
$$\delta(\Pi - W) = 0 \qquad (2.1)$$

Очевидно, что при $\delta \Pi > \delta W$ имеет место устойчивое состояние полости, при $\delta \Pi < \delta W$ — неустойчивое. Нейтральное (равновесное) состояние определяется выражением (2.1).

Условие (2.1) можно переписать в виде

$$F - \frac{\delta W}{\delta V} = 0, \qquad F = \frac{\delta \Pi}{\delta V} \qquad (2.2)$$

Определение $\delta W / \delta V$ производится на основании решения упругой задачи. Функция F является некоторой экспериментально определяемой функцией, характеризующей свойства сопротивления (разрушения) данного тела. Функция F может зависеть от координат точек тела x_i, от направления, характеризуемого направляющими косинусами α_i, температуры и других параметров, в том числе и зависящих от времени. Изложенная точка зрения обобщает представления, развитые в теории распространения разрезов нулевой толщины (трещин).



Фиг. 2

Предположим, что тело с полостью находится в равновесии под действием сил p_i. Упругую энергию исходного тела обозначим W_1. Изменим объем полости на δV. При тех же силах тело с измененной полостью будет иметь упругую энергию W_2. На долю удаленного объема приходилась часть энергии ΔW. Искомое изменение упругой энергии тела будет равно

$$\delta W = \delta W^* + \Delta W, \qquad (2.3)$$

В случае разреза $\Delta W = 0$.

На фиг. 2 показан контур L_1 исходного состояния и L_1^* — деформированного; L_2 — исходный контур с удаленной частью объема δV; L_2^* — деформированный. На фиг. 2,*а* через l_1 обозначен контур объема δV, через l_2 — деформированный контур объема δV, если бы он не был удален.

Для определения δW^* согласно Ирвину надо найти работу сил, которые необходимы для совмещения контура L_2^* с контуром $L_1^* + l_1^*$ без части AB. Очевидно, что согласно принятым предположениям будет изменяться та часть полости (или выточки), для которой будет иметь место условие (2.2); причем, для неоднородных по свойствам материалов разрушение может происходить не в местах наибольшего напряженного состояния. Условие устойчивого состояния полости записывается в виде

$$\frac{\delta W}{\delta V} < F$$

Если F — const, то согласно (2.4) может быть сформулировано следующее свойство локального максимума функции W: развитие полости происходит в случае, когда изменение упругой энергии тела при вариациях ее объема достигает некоторого максимального значения.

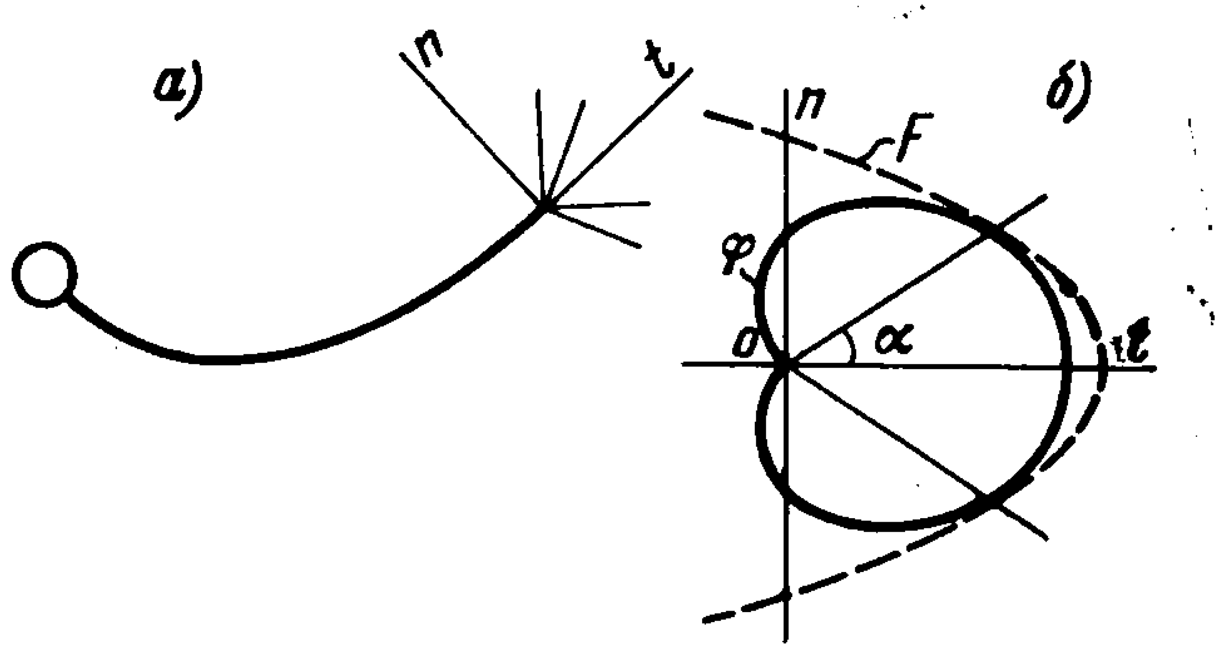
В общем случае развитие полости согласно (2.1) связано с достижением экстремума функцией $U = W - П$.

Рассмотрим малое изменение полостей в случае плоской задачи. Обозначим через $r = r(\varphi)$ уравнение исходного контура L_1. Предположим, что уравнение контура L_2 имеет вид $r_2 = r + \delta r$. Тогда $\delta S = \delta r\, dl \sin\chi$, где χ — угол между δr, dl. Очевидно,

$$\Delta W = \int\limits_{\delta S} \sigma_{ij} e_{ij}\, dS = \int\limits_{L_1} (\sigma_{ij} e_{ij} \sin\chi\delta r)\, dl \qquad (2.4)$$

Обозначим через $\delta u^{(n)}$ — разницу перемещений контуров $L_1 + l_1$, L_2.

Обозначим также через $\sigma^{(n)}$ — компоненты напряжений на площадках вдоль l_1.



Фиг. 3

Согласно Ирвину

$$\delta W^* = \frac{1}{2}\int\limits_{l_1} \sigma^{(n)} \delta u^{(n)}\, dl \qquad (2.5)$$

Если $\delta W^* \ll \Delta W$, то условие (2.1) запишется в виде

$$\Delta W = \delta П \qquad (2.6)$$

Предположим, что

$$\delta П = K_1 \delta S = K_1 \int\limits_{L_1} \sin\chi\delta r\, dl$$

$$K_1 = \mathrm{const} \qquad (2.7)$$

Тогда из соотношений (2.4), (2.7), (2.6) получим

$$\int\limits_{L_1} (\sigma_{ij} e_{ij} - K_1) \sin\chi\delta r\, dl = 0 \qquad (2.8)$$

Очевидно, что равенство (2.8) имеет место, если $W^\circ = \sigma_{ij} e_{ij} = K_1$, или при $\delta r = 0$, если $W^\circ < K_1$.

Выражение удельной потенциальной энергии может быть выражено через напряжения $W^\circ = \sigma_{ij} e_{ij} = f(\sigma_{ij})$. Следовательно, в этом случае энергетическая теория разрушения сводится к силовой, рассмотренной в [4, 5] и др. В самом деле, на контуре отсутствуют нормальные и касательные усилия, поэтому $f(\sigma_{ij}) \sim \sigma_\varphi^2$, где σ_φ — нормальное напряжение на площадках, перпендикулярных контуру.

Предположим далее, что

$$\delta П = K_2 \delta L, \qquad K_2 = \mathrm{const} \qquad (2.9)$$

где δL — изменение длины контура полости. Легко получить

$$\delta L = \int\limits_{L_1} \frac{r\delta r + r'\delta r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\, d\varphi \qquad (2.10)$$

где штрих означает дифференцирование по φ. Из (2.4), (2.10), (2.9) получим

$$\int\limits_{L_1} \sigma_{ij} e_{ij} \sin\chi \sqrt{r^2 + r'^2}\, \delta r\, d\varphi - K_2 \int\limits_{L_1} \frac{r\delta r + r'\delta r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\, d\varphi = 0 \qquad (2.11)$$

Из (2.11) следует вариационное уравнение

$$\int\limits_{L_1} \left[\sigma_{ij} e_{ij} \sin\chi \sqrt{r^2 + r'^2} - K_2 \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} + \frac{d}{d\varphi}\left(K_2 \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\right)\right] \delta r\, d\varphi = 0 \qquad (2.12)$$

Разрушение произойдет в тех точках контура, для которых подынтегральное выражение в квадратных скобках (2.12) равно нулю. Аналогично можно рассмотреть случаи $\delta П = K_3 L \delta V$ и т. д.

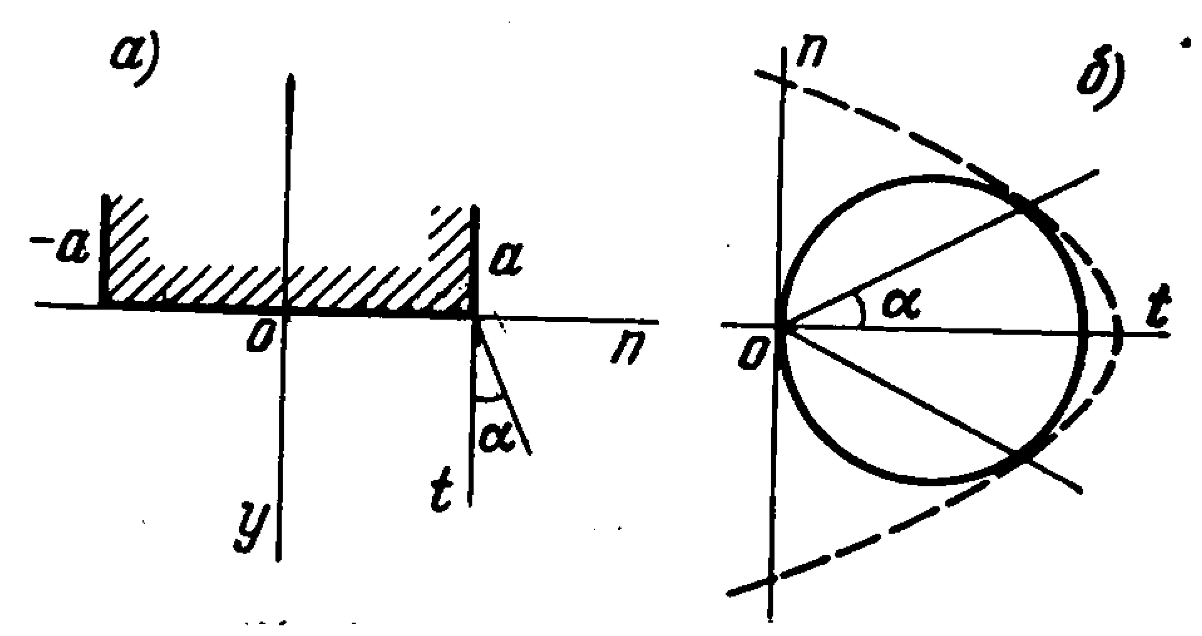
3. Рассмотрим некоторые примеры. Предположим, что в плоскости xy дан криволинейный разрез l (фиг. 3,*а*), оканчивающийся на левом конце некоторой полостью. Спрашивается, в каком направлении произойдет развитие правого конца разреза (распространение трещины)?

Согласно изложенным представлениям, надо определить величину $\delta W / \delta l$ по всем возможным направлениям из правого конца разреза. Предположим, что либо из непосредственного решения задачи теории упругости, либо при помощи приема Ирвина и т. п. при данных внешних силах $p_i(\lambda)$ удалось определить величину производной $\delta W / \delta l = \Phi(x_0, y_0, \alpha, \lambda)$, где x_0, y_0 — координаты правого конца разреза; α — угол, образуемый направлением δl с осью t, направленной по касательной к разрезу в его правом конце; λ — параметр изменения нагрузки.

График величины $\delta W / \delta l$ изображен на фиг. 3, *б* в осях tn сплошной линией. Пунктиром показана кривая $F(x_0, y_0, \alpha)$. Кривая F фиксирована для любой точки x_0, y_0. Отметим, что если $F \equiv \mathrm{const}$, то соответствующая кривая в плоскости tn будет окружностью с центром в начале координат.

При некотором λ кривая Φ касается кривой F. Направления развития трещины соответствуют тогда лучам, проведенным из начала координат в точки касания кривых Φ, F. Если касание происходит одновременно в нескольких точках, как показано на фиг. 3,*б*, то развитие трещины происходит сразу по нескольким направлениям, т. е. имеет место точка бифуркации трещины. Если касание происходит в точке оси t ($n = 0$), то трещина распространяется в направлении касательной к ее концу.

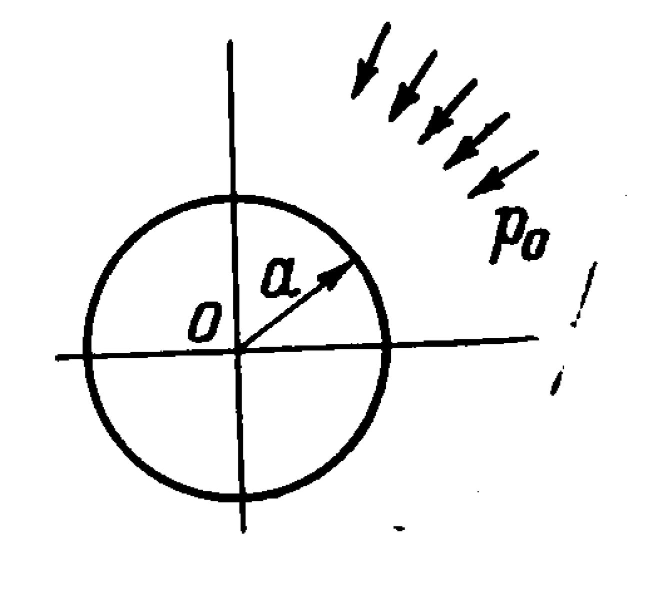
Очевидно, что если могут развиваться оба конца трещины, то задачу определения Φ следует решать независимо для обоих концов и надо определить то значение λ, при котором на одном из концов впервые будет достигнуто касание кривых Φ и F. Далее, рассматривая развитие трещины, следует решать аналогичную задачу при разрезе $l + \delta l$ и т. д. Аналогично ставится задача о развитии более сложных разрезов.



Фиг. 4

В качестве другого примера укажем на возникновение трещин под жестким прямоугольным штампом, вдавливаемом в упругое полупространство (фиг. 4). Предположим, что трещины образуются вблизи краев штампа. Давая виртуальные разрезы δl, следует определить величину $\Phi(\pm a, 0, \alpha, p_0)$, где a— половина длины штампа, p_0 — среднее давление штампа. Пусть кривая Φ определена и график ее изображен на фиг. 4, *б*. Если кривая Φ коснется кривой $F(\pm a, 0, \alpha)$ в точке оси t ($n = 0$), то трещина возникнет в направлении, параллельном оси y, и т. д.

Наконец, рассмотрим развитие круговой полости радиуса a в упругом пространстве (плоская деформация), сжатом на бесконечности равномерным давлением p_0 (фиг. 5). Для простоты предположим материал несжимаемым. В полярных координатах [22]



Фиг. 5

$$\sigma_r, \sigma_\theta = -p_0\left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right), \qquad u = -\frac{3p_0 a^2}{Er} \tag{3.1}$$

где σ_r, σ_θ соответственно радиальная и тангенциальная компоненты напряжения, u — радиальное перемещение, r — текущий радиус. Легко определить

$$W = 2\pi \int_a^\infty (\sigma_r - \sigma_\theta)\, e_r r\, dr = \frac{6\pi p_0^2 a^2}{E} \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует

$$\delta W = \frac{12\pi p_0^2 a \delta a}{E}, \qquad \frac{\delta W}{\delta V} = \frac{6p_0^2}{E}, \qquad \delta V = 2\pi a \delta a \tag{3.3}$$

Если, например, $F = Ka$, K — const, то равновесное развитие полости будет происходить согласно (2.1) при

$$p_0 = \sqrt{{}^1/_6 EKa} \tag{3.4}$$

Аналогично можно рассмотреть другие случаи. Покажем, что в данном случае величина $\delta W^* \ll \Delta W$. Из (2.4), (3.1) следует

$$\Delta W = \int_0^{2\pi} (\sigma_\rho - \sigma_\theta)\, e_\rho a \delta a \, d\varphi = \frac{12\pi p_0^2 a \delta a}{E} \tag{3.5}$$

Из (3.5), (3.3) следует, что $\delta W = \Delta W$. Легко получить

$$\delta W^* = \frac{6 p_0^2 (\delta a)^2}{E} \tag{3.6}$$

Таким образом, в рамках изложенных соображений, оказывается возможным объединить подходы к вопросам теории развития и возникновения трещин, развития конечных полостей в упругом теле.

Авторы признательны А. А. Ильюшину, А. Ю. Ишлинскому, Г. П. Черепанову за ценное обсуждение и Л. М. Качанову за ряд важных замечаний.

Поступила 17 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Н а д а и А. Пластичность и разрушение твердых тел, М., Изд-во иностр. лит., 1954.
2. Р а б о т н о в Ю. Н. О разушении вследствие ползучести. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 113—123.
3. К а ч а н о в Л. М. Время разрушения в условиях ползучести. В Сб.: «Проблемы механики сплошной среды» (к семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили), М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 186—201.
4. П а в л ю к Н. Ф. Динамическое расширение пластического цилиндра с учетом разрушения материала. Прикладная механика, АН УССР, 1957, т. 3, № 4.
5. Ч е р е п а н о в Г. П. О выпучивании мембран с отверстиями при растяжении. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
6. Г а л и н Л. А., Ч е р е п а н о в Г. П. О самоподдерживающемся разрушении напряженного хрупкого тела. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 3.
7. G r i f f i t h A. A. The theory of rupture. Proc. 1-st Intern. Congr. Appl. bech., Delft, 1924.
8. I r v i n G. R. Fracture dynamis.,— In Fracturing of Metals. ASM, Clevelend, 1948.
9. O r o v a n E. O. Fundamentals of brittle behavior of metals,— In Fatique and Fracture of Metals. Wiley, N. — Y., 1950.
10. Д р о з д о в с к и й Б. А., Ф р и д м а н Я. Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. М., Металлургиздат, 1960.
11. I r v i n G. R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a Plate. J. Appl. Mech, 1957, vol. 24, No. 3.
12. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5, М., «Наука», 1966.
13. W i l l i a m s M. L. Some observations regarding the stress field near the point of a crac, Crac Propagation Symposium, Cranfield, 1961.
14. Ж е л т о в Ю. П., Х р и с т и а н о в и ч С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5, стр. 3—41.
15. Б а р е н б л а т т Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, стр. 316—322.
16. B u e c k n e r H. F., The propagation of cracks and the energy of elastic deformation, Trans. ASME, 80, 1958.
17. Б а р е н б л а т т Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1964, № 4.
18. Л е о н о в М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
19. П а н а с ю к В. В. Определение напряжений и деформаций вблизи мельчайшей трещины. Научн. зап. Ин-та маш. и автомат. АН УССР, т. 7, 1960 г.
20. М о с с а к о в с к и й В. И. Обобщение критерия Гриффита — Снеддона на случай неоднородного тела, ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
21. Ф р и д м а н Я. Б., М о р о з о в Е. М. Применение принципа Гамильтона-Остроградского для изучения закономерностей разрушения твердых тел. Докл.АН СССР, т. 144, 1962.
22. Ф е о д о с ь е в В. И. Сопротивление материалов. Изд. 3, М., «Наука», 1964.