

СКОЛЬЗЯЩИЙ РЕЖИМ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

М. И. Фейгин (Горький)

В работе исследуются особенности фазового пространства многомерной динамической системы с ударными взаимодействиями при обычно принимаемых идеализациях. Устанавливается существование некоторых конфигураций фазового пространства, движения в окрестности которых, названные скользящими, представляют собой сходящуюся бесконечную последовательность ударно-безударных участков. Зависимость между состояниями системы в начале и конце скользящего движения может быть получена, если ввести в рассмотрение новую динамическую модель систем с ударными взаимодействиями, а именно модель, допускающую в выделенных конфигурациях абсолютно неупругий удар с последующим движением ударившихся масс в кинематической связи, тогда как вне этих конфигураций происходят только не вполне упругие удары с отличным от нуля коэффициентом восстановления скорости.

Такая модель скользящего движения является обобщением идеализации ударного взаимодействия, предложенной в работе [1] на основе экспериментального изучения характера взаимодействий в хронометре и учитывающей два удара: не вполне упругий первый удар и второй неупругий с последующим движением в кинематической связи.

Отметим, что «усовершенствованная» динамическая модель систем с ударными взаимодействиями позволила исследовать сложные периодические и непериодические режимы посредством моделирования на аналоговых и цифровых машинах [2, 3].

1. Пусть безударные движения двух масс системы, между которыми могут происходить ударные взаимодействия, описываются в безразмерной форме уравнениями вида

$$\begin{aligned} x_1'' &= F_1(x_1, x_1', \dots, x_n', t) + F_{12}(y, y'), & \mu x_2'' &= F_2(x_1, x_1', \dots, x_n', t) - F_{12}(y, y') \\ y &= x_2 - x_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

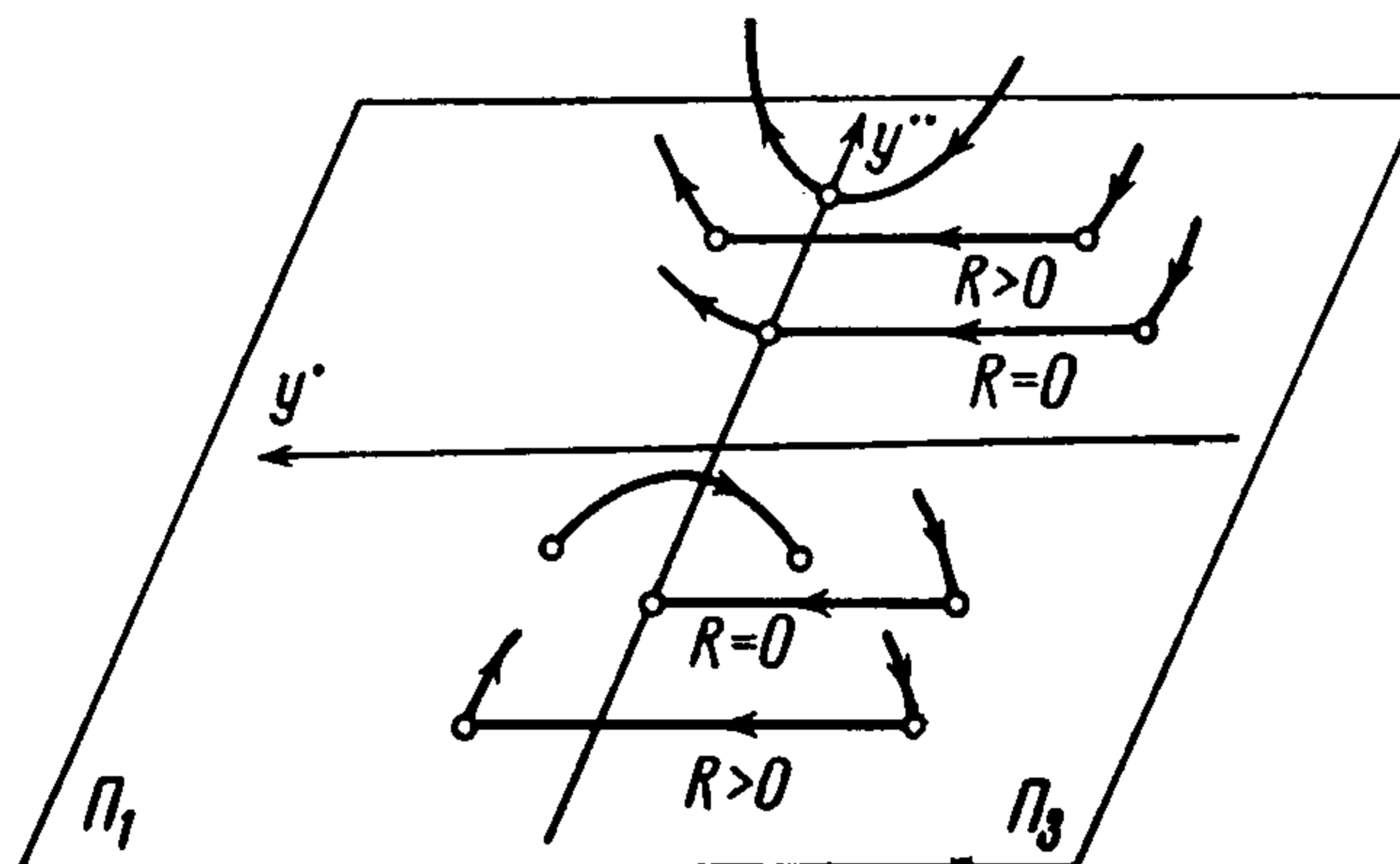
Здесь x_i — фазовые координаты системы, причем x_1 и x_2 обозначают смещения ударяющихся масс; F_{12} — сила взаимодействия между массами в промежутках времени между ударами; F_1 и F_2 включают все остальные силы, действующие на указанные массы; μ — отношение масс.

Относительное смещение масс $y = x_2 - x_1$ определяется согласно (1.1) уравнением

$$\mu y'' = F_2 - \mu F_1 - (1 + \mu)F_{12} \quad (1.2)$$

Удар происходит на поверхности Π $y = 0$ и идеализируется как мгновенное изменение скоростей y' , x_1' в соответствии с известными соотношениями

$$y'^+ = -Ry'^-, \quad x_1'^+ = x_1'^- + \frac{\mu(1+R)}{1+\mu}y'^-$$



Фиг. 1

где через y'^- , $x_1'^-$ и y'^+ , $x_1'^+$ обозначены величины доударных и послеударных скоростей, а R — коэффициент восстановления скорости при ударе ($0 \leq R < 1$).

Перейдем к изучению поведения фазовых траекторий в окрестности поверхности ударных взаимодействий Π . Указанная поверхность делится на две части: Π_1 ($y = 0$, $y' > 0$), на которой начинаются траектории безударных движений, уходящие в полупространство G ($y > 0$), и Π_3 ($y = 0$, $y' < 0$), на которой начинаются траектории ударных взаимодействий. Поведение траекторий в окрестности границы полуповерхностей Π_1 и Π_3 ($y = 0$, $y' = 0$) определяется знаком второй производной относительного смещения масс y'' и величиной R , определяющей, будет ли удар неупругий или не вполне упругий. На фиг. 1 изображено четыре возможных случая хода траекторий:

$$y'' > 0, R = 0, \quad y'' > 0, R > 0, \quad y'' < 0, R = 0, \quad y'' < 0, R > 0$$

В первых двух случаях фазовая точка уходит с границы $y = 0, y' = 0$ в полупространство G .

В третьем случае ($y'' < 0, R = 0$) удар сопровождается слипанием масс, после которого они движутся в кинематической связи в течение конечного интервала времени. Это обстоятельство требует доопределения динамической системы (1.1) путем добавления некоторой силы Q — взаимодействия между находящимися в кинематической связи поверхностями. При указанном движении Q изменяется так, что выполняется условие $x_1 \equiv x_2$. Следовательно, уравнения движения масс можно записать в виде

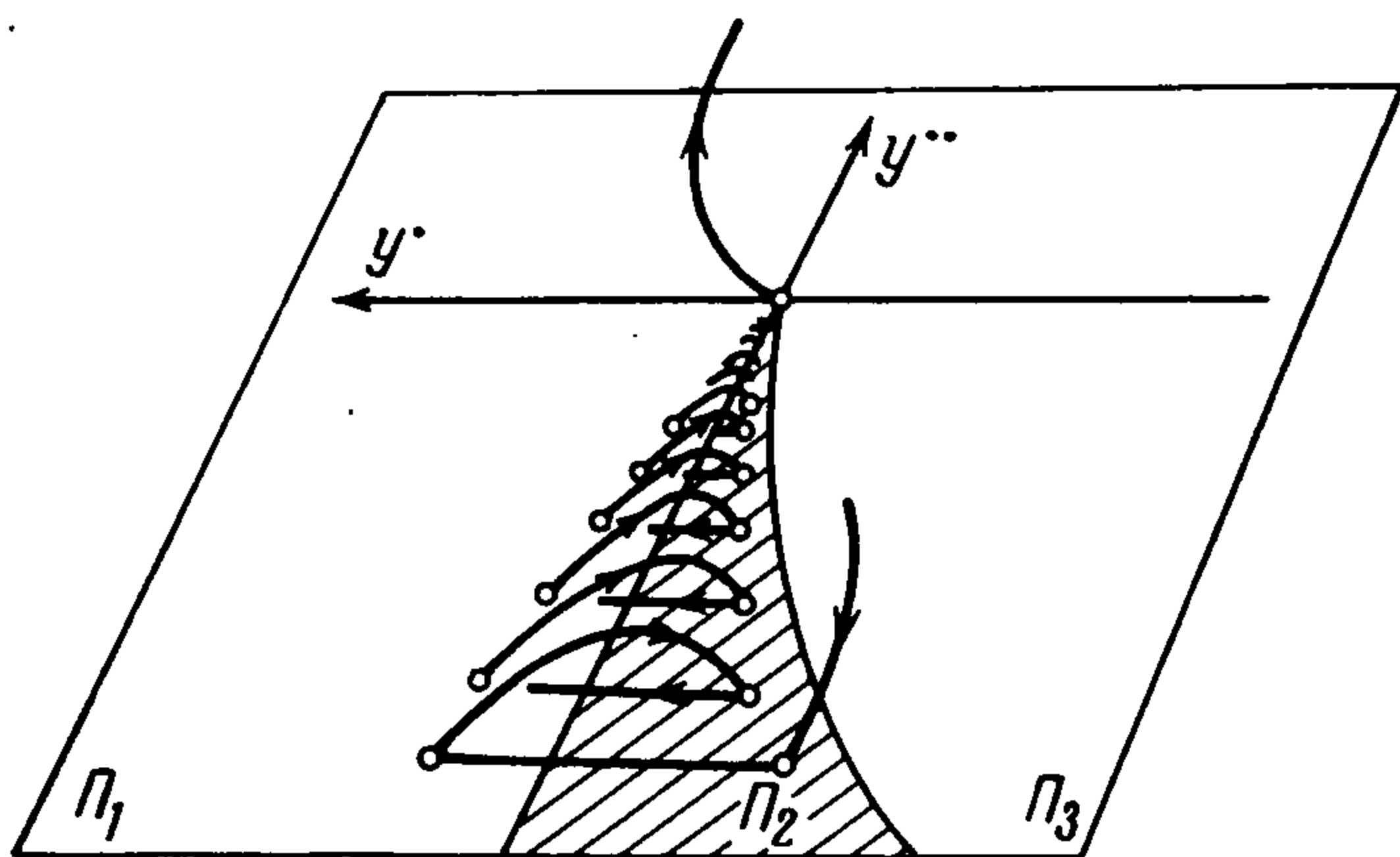
$$x_1'' = F_1 + F_{12} + Q, \quad \mu x_2'' = F_2 - F_{12} - Q, \quad x_1 \equiv x_2, \quad Q < 0$$

или, после исключения Q

$$(1 + \mu) x_1' = F_1 + F_2, \quad y = 0, \quad F_2 - \mu F_1 - (1 + \mu) F_{12} < 0 \quad (1.4)$$

В четвертом случае ($y'' < 0, R > 0$) попадание фазовой точки на границу $y = 0, y' = 0$, вообще говоря, невозможно. Однако именно этот случай оказывается наиболее интересным.

2. Покажем, что существует некоторая окрестность границы $y = 0, y' = 0, y'' < 0$,



Фиг. 2

при попадании в которую фазовой траектории дальнейшее движение сопровождается бесконечной последовательностью ударных взаимодействий и все более приближает фазовую точку к состоянию

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0, \quad y''' > 0$$

из которого она покидает указанную окрестность (фиг. 2) и уходит в полупространство G . Будем называть такое движение скользящим, а соответствующую часть поверхности ударных взаимодействий Π_2 — пластинкой скользящих движений.

Пусть в момент t_0 фазовая точка M_0 приходит в некоторую область Π_2 поверхности $y = 0$, ограниченную условиями

$$0 < Y_* < y'''(t) < Y, \quad \frac{9R - 5}{12R} < \frac{Y_*}{Y} \quad (2.1)$$

$$0 < -y''(t) < \frac{2Yt_*}{3 - \sqrt{4 + 5R}}, \quad 0 < \frac{-y'(t)}{[y''(t)]^2} < \frac{5(1 - R)}{24RY} \quad (2.2)$$

Предполагается, что характеризующее безударное движение решение $y(t_0 + t)$ уравнения (1.2) обладает свойствами, достаточными для его представления в форме ряда Тейлора при $t < t_*$.

Приход траектории в точку M_0 сопровождается ударом (1.3), после чего начинается очередной участок движения в полупространстве G . Длительность его определяется как наименьший положительный корень τ_1 уравнения $y(t_0 + t) = 0$, которое при $t < t_*$ можно записать в виде

$$t [-Ry'(t_0) + 1/2t^2y''(t_0) + 1/6t^3y'''(t_0 + \theta t)] = 0 \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.3)$$

Так как наименьший положительный корень (2.3) увеличивается с ростом производной $y'''(t_0 + \theta t)$ и имеют место ограничения (2.1) и второе ограничение (2.2), то

$$\tau_1 < -\frac{y_0''}{2Y} (3 - \sqrt{4 + 5R}) < t_* \quad \left(\tau_1 \rightarrow 0 \text{ при } \frac{Ry_0'}{(y_0''')^2} \rightarrow 0 \right) \quad (2.4)$$

Значения относительной скорости и ускорения в точке M_1 — непосредственно перед следующим соударением — равны

$$y_1' = y'(t_0 + \tau_1) = -Ry_0' + \tau_1 y_0'' + 1/2 \tau_1^2 y_0''' (t_0 + \theta_1 \tau_1) \quad (2.5)$$

$$y_1'' = y''(t_0 + \tau_1) = y_0'' + \tau_1 y_0''' (t_0 + \theta_2 \tau_1) \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1) \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что $y_1'' > y_0''$ и, таким образом, значение относительного ускорения приблизилось к нулю. Убедимся, однако, что точка M_1 также принадлежит пластинке скользящих движений, т. е. y_1'' и $y_1' / (y_1'')^2$ удовлетворяют неравенствам (2.2).

а) Справедливость $-y_1'' > 0$ следует из (2.6), (2.1) и (2.4)

$$-y_1'' > -y_0'' - \tau_1 Y > -1/2 y_0'' (\sqrt{4 + 5R} - 1) > 0 \quad (2.7)$$

б) Ограничение, накладываемое неравенством (2.2) на наибольшее значение $-y_1''$, выполняется в силу (2.6), так как $-y_1'' < -y_0''$.

в) Справедливость $-y_1' > 0$ следует из (2.5), (2.1), (2.7) и (2.3):

$$-y_1' > (Ry_0' - 1/2 \tau_1 y_0'') + 1/2 \tau_1 (-y_0'' - \tau_1 Y) > Ry_0' - 1/2 \tau_1 y_0'' > 0$$

г) Остается проверить выполнение условия

$$-\frac{y_1'}{(y_1'')^2} < \frac{5(1-R)}{24RY} \quad (2.8)$$

В соответствии с (2.6), (2.1) и (2.3), имеем (2.9)

$$-\frac{y_1'}{(y_1'')^2} < \frac{-Rq + p - 1/2 p^2 Y_*}{(1 - pY)^2} < \frac{3p + p^2(Y - 3Y_*)}{6(1 - pY)^2} \quad \left(q = -\frac{y_0'}{(y_0'')^2}, p = -\frac{\tau_1}{y_0''} \right) \quad (2.9)$$

Проверяемое условие (2.8) заменим в соответствии с (2.9) более строгим. В результате придем к неравенству

$$\frac{5 + R}{12R} \left[\frac{5(1-R)}{5+R} - 2pY \right] + p^2 Y^2 \left(\frac{Y_*}{Y} + \frac{5-9R}{12R} \right) > 0 \quad (2.10)$$

Это неравенство выполняется, так как выражение во второй скобке положительно согласно (2.1), а выражение в первой скобке положительно в соответствии с неравенством (2.4):

$$2pY < 3 - \sqrt{4+5R}$$

Таким образом, фазовая точка, попав на конфигурацию Π_2 , оказывается в скользящем режиме и выходит из него, лишь достигнув «края» пластинки скользящих движений $y = y' = y'' = 0$.

Из проведенного рассмотрения ясно, что условия (2.1), (2.2), принятые для доказательства существования пластинки скользящих движений, не определяют точно ее границ. Нетрудно, однако, убедиться, что такая граница в действительности имеется, так как в малой окрестности края пластинки $y = y' = y'' = 0$, $y''' > 0$ наряду с точками, являющимися началом скользящего движения, есть точки, которые являются началом траекторий, уходящих из этой окрестности. Именно таким свойством обладает, например, множество точек $y' < 0$, $y'' = 0$. Уравнение (2.3) не имеет в этом случае положительных корней, сколь бы мало не было значение $|y'|$.

3. Фазовая траектория скользящего движения по мере уменьшения интервалов времени между ударами τ_i все более приближается к траектории движения масс в кинематической связи $y = y' = 0$. Необходимое условие скользящего движения $y'' < 0$, или согласно (1.2)

$$F_2 - \mu F_1 - (1 + \mu) F_{12} < 0 \quad (3.1)$$

будет при этом все меньше отличаться от также записываемого условия движения масс в кинематической связи (1.4). Заметим, что, если силы F_1 , F_2 , F_{12} являются функциями только времени, то выражения (3.1), вычисленные для скользящего движения и движения в кинематической связи, вообще совпадают.

Указанные особенности позволяют для описания скользящих движений рекомендовать следующую идеализированную динамическую модель систем с ударными взаимодействиями: в конфигурациях скользящих движений фазового пространства указанных систем допускаются неупругие удары с последующим движением ударившихся масс в кинематической связи, тогда как вне этих конфигураций происходят только не вполне упругие удары с отличным от нуля коэффициентом восстановления скорости.

Размеры Π_2 зависят от R и уменьшаются при $R \rightarrow 1$. Согласно (2.1), (2.2) для оценки размеров Π_2 необходимо знать интервал изменения $y''(t)$ и радиус сходимости t_* . При изучении несложных систем с трехмерным фазовым пространством это не вызывает затруднений, так как из края пластинки выходит единственная траектория, а t_* достаточно велико. Исследование же сложных систем не обходится в настоящее время без применения вычислительной техники, позволяющей «улавливать» начало скользящего движения по достаточной близости его траектории к траектории движения в кинематической связи.

Проведенное рассмотрение относилось к системам с одной ударной парой. В фазовом пространстве систем с несколькими ударными парами каждой паре соответствует своя пластинка скользящих движений.

4. В качестве примера оценим размеры пластинки скользящих движений в фазовом пространстве y, y', τ для двухмассовой системы с двумя ударными парами, безударные движения которой описываются уравнениями [4]

$$y'' = -\sin \tau, \quad |y| < d \quad (4.1)$$

Из уравнения (4.1) следует, что в конечных точках участков траектории скользящих движений $y = \mp d$, $y' = 0$, $y'' = 0$ значение $y''' = -\cos \tau$ экстремально и равно $+1$ на поверхности ударных взаимодействий $y = -d$ и $y''' = -1$ на поверхности $y = +d$. В рассматриваемом случае условия (2.1), (2.2) сводятся к

$$\begin{aligned} \mp \cos \tau > 0, \quad \mp \cos \tau > \frac{9R - 5}{12R}, \quad \mp \sin \tau < 0 \\ 0 < \mp y' < \frac{5(1 - R)}{24R} \sin^2 \tau \end{aligned} \quad (4.2)$$

Знак минус относится к поверхности $y = -d$, а знак плюс — к поверхности $y = +d$. При $R = 0.5$, например, неравенства (4.2) дают условия

$$\mp \cos \tau > 0, \quad \mp \sin \tau < 0, \quad 0 < \mp y' < 0,21 \sin^2 \tau$$

Автор благодарит Н. Н. Баутина за обсуждение статьи.

Поступила 11 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н., Чернягин Б. М. Теоретическое и экспериментальное исследование зависимости динамических характеристик морского хронометра от положения колодки спирали баланса. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2, стр. 126—130.
2. Фейгин М. И. Некоторые вопросы теории нелинейных демпферов. Сб. статей. Динамика машин, Машгиз, М., 1963, стр. 235—247.
3. Фейгин М. И. Резонансные свойства динамической системы с ударными взаимодействиями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, стр. 942—946.
4. Фейгин М. И. О вынужденных колебаниях двух масс, сочлененных с зазором. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 5, стр. 122—130.