Кроме того, по определению инвариантной меры $\mu_\varepsilon(dy)$ для любого открытого множества сферы S_n и произвольного $t > 0$

$$\mu_\varepsilon(U) = \int\limits_{S_n} P_\varepsilon\{y, t, U\}\, \mu_\varepsilon(dy) \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) получаем (аналогичный прием использовался в [9])

$$\lim \mu_\varepsilon(K_\gamma) = 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{3.6}$$

Следовательно, согласно (3.2), (3.5) и (3.6)

$$\lim \mu_\varepsilon(\Gamma_\delta) = 1 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Последнее равенство, выполненное при всех достаточно малых δ. означает, что инвариантная мера $\mu_\varepsilon(dy)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к некоторой мере $\mu_0(dy)$, целиком сосредоточенной на множестве Γ.

Автор приносит благодарность Р. З. Хасьминскому за ряд ценных указаний.

Поступила 20 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности линейной стохастической системы. Теория вероятностей и ее применения. 1966, т. 11, вып 1.
2. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траектории марковских процессов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
3. Leibowitz A. M. Statistical behavoiro of linear systems with random varying parameters. J. Math. end Phys., 1963, vol. 6, No. 6.
4. Работников Ю. Л. О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
5. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
7. Хасьминский Р. З. Об уравнениях со случайными возмущениями. Теория вероятностей и ее применения. 1965, т. 10, вып. 2.
8. Невельсон М. Б. О поведении инвариантной меры диффузионного процесса с малой диффузией на окружности. Теория вероятностей и ее применения. 1964, т. 9, вып. 1.
9. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией. Теория вероятностей и ее применения. 1963, т. 8, вып. 1.
10. Благовещенский Ю. Н. Диффузионные процессы, зависящие от малого параметра. Теория вероятностей и ее применения. 1962, т. 7, вып. 1.
11. Фрейдлин М. И. О стохастических уравнениях Ито и вырождающихся эллиптических уравнециях. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1962, т. 26, вып. 5.

О КВАДРАТИЧНОМ ИНТЕГРАЛЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

А. М. Ковалев, Ю. М. Ковалев

(Донецк)

Условия существования четвертого алгебраического интеграла указанной задачи изучены в исследованиях С. В. Ковалевской, А. М. Ляпунова, Г. Г. Аппельрота, А. Пуанкаре, Э. Хуссона, П. Бургатти, П. Я. Кочиной (см., например, [1,2]). Эти исследования проведены в предположении, что четвертый интеграл не зависит явно от времени и так же, как и остальные три интеграла, содержит произвольную постоянную.

Что же касается решений с алгебраическими инвариантными соотношениями [1], то, хотя такие решения время от времени обнаруживаются [2], условия их существования не установлены даже для простейших случаев. С. А. Чаплыгин рассматривал усло-

[1] Употреблен термин, примененный в [3].

[2] Последнее решение указано Е. И. Харламовой в статье [4], где перечислены все известные к настоящему моменту случаи интегрируемости.

вия существования решений с линейным инвариантным соотношением [5]. Результаты последней работы уточнены П. В. Харламовым [6]. Первое решение с квадратичным инвариантным соотношением нашел В. А. Стеклов [7], затем были найдены решения Д. Н. Горячевым [8], С. А. Чаплыгиным [9] и Н. Ковалевским [10]. П. В. Харламов, основываясь на своих уравнениях [11,12], изучил условия существования решений с двумя инвариантными соотношениями, одно из которых — квадратичное [13]. Позже он отметил, что второе инвариантное соотношение в общем случае должно иметь вид рациональной функции, а именно, должно быть отношением многочлена четвертой степени к многочлену второй степени [14], однако в работах [13,14] второе инвариантное соотношение взято в виде многочлена.

В настоящей заметке последнее ограничение снято.

Принимая обозначения работы [13], выпишем указанные там уравнения

$$
\begin{gathered}
[2Q+(A-B)p^2+2\lambda p]\frac{dR}{dp}-[2R+(A-C)p^2+2\lambda p]\frac{dQ}{dp}+\\
+(Ap+\lambda)\left[Q-R+\frac{(C-B)}{A}E\right]=\frac{(B-C)}{A}k\\
[2Q+(A-B)p^2+2\lambda p]\frac{d^2R}{dp^2}+\left[\frac{dQ}{dp}+(A-B)p+\lambda\right]\frac{dR}{dp}+\\
+Cp\frac{dQ}{dp}-\frac{Q-R}{B-C}AC+CE=0
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$
q^2\frac{(C-B)}{A}B=(A-C)p^2+2\lambda p+2R \tag{2}
$$

Из последнего выражения замечаем, что R — квадратичная функция от p и q, и задаем квадратичное инвариантное соотношение в виде

$$
R=c_2p^2+c_1p+c_0 \tag{3}
$$

Подставляя R, dR/dp, d^2R/dp^2 в (1), находим, что Q и dQ/dp есть рациональные функции от p вида

$$
Q=P_4/P_2,\quad dQ/dp=P_3/P_2
$$

Здесь P_k — многочлен от p степени k. Отсюда при $dP_2/dp\not\equiv 0$ получим:

$$
Q=\frac{P_4}{P_2}\equiv\frac{dP_4/dp-P_3}{dP_2/dp}=\frac{a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}{\gamma p+\delta} \tag{4}
$$

где a_i, γ, δ — известные функции c_i и параметров системы.

Случаи $dP_2/dp\equiv 0$ и $\gamma=0$ рассматривать не будем, так как они сводятся к уже известным решениям ($dP_2/dp\equiv 0$ — решение Горячева, $\gamma=0$ — второе решение, указанное в [13]). Тогда инвариантное соотношение (4) можно представить в виде

$$
Q=b_2p^2+b_1p+b_0+\beta/(p+\alpha) \tag{5}
$$

В дальнейшем полагаем $\beta\neq 0$, так как $\beta=0$ приводит к уже найденному решению работы [13] при $n=2$.

Соотношения (3), (5) должны обращать (1) в тождества, что приводит к следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
(A-2B)c_2-(A-2C)b_2=0\\
8c_2b_2+2Cb_2+4(A-B)c_2-(b_2-c_2)AC/(B-C)=0\\
2c_2b_1-2c_1b_2-Bc_1+Cb_1+3\lambda(c_2-b_2)=0\\
6(b_1+\lambda)c_2+(A-B)c_1+2c_1b_2+Cb_1-(b_1-c_1)AC/(B-C)=0\\
4c_2b_0-4c_0b_2+A(b_0-c_0)+\lambda(c_1-b_1)+(C-B)E=0\\
4c_2b_0+c_1(b_1+\lambda)-(b_0-c_0)AC/(B-C)+CE=0
\end{gathered} \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
2c_0\beta+\alpha\beta(2c_1+\lambda)+\alpha^2N=0\\
2c_2-C-AC/(B-C)=0,\qquad c_1-\alpha[4c_2-AC/(B-C)]=0\\
\beta(4c_1+3\lambda)+\alpha[2N+\beta(4c_2+A)]=0
\end{gathered} \tag{7}
$$

Здесь

$$N = 2c_1b_0 - 2c_0b_1 + \lambda(b_0 - c_0) + \frac{\lambda(C-B)}{A}E - \frac{(B-C)}{A}k$$

Величины b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0 определяются из (6) и имеют значения, приведенные в § 3 работы [13].

Из условий (7) находим

$$B = \frac{A^2 - AC + C^2}{A + C}, \quad H = -\frac{\lambda^2}{(A-C)(2C-A)^4}(A^4 - A^3C - 4A^2C^2 + 9AC^3 - 4C^4) \quad (8)$$

Постоянная H введена вместо E:

$$H = \frac{(b_0 - c_0)}{B - C}A - E$$

При условиях (8) указанные выше величины c_2, c_1, c_0 становятся такими:

$$c_2 = \frac{C(2A-C)}{2(A-2C)}, \qquad c_1 = \frac{3C(A-C)}{(A-2C)^2}\lambda, \qquad c_0 = \frac{A^2 - AC + C^2}{2(A-2C)^3}\lambda^2$$

и соотношение (2) примет вид

$$q^2 + \frac{(A+C)^2}{(A-2C)^2}\left(p + \frac{\lambda}{A-2C}\right)^2 = 0$$

В действительном движении это возможно лишь при постоянных значениях p и q.

Таким образом, уравнения (1) допускают лишь три решения [13] с квадратичным инвариантным соотношением (3).

Поступила 2 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— В Сб.: «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки». М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2. М., Изд-во иностр. лит, 1951.
4. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи, ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 784—788.
5. Чаплыгин С. А. Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке. Собр. соч., т. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
6. Харламов П. В. О линейных интегралах уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 4.
7. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. Отд. физ. н. Об-ва любителей естеств., 1899, т. 10, вып. 1.
8. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тр. Отд. физ. н. Об-ва любителей естеств., 1899, т. 10, вып. 1.
9. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Собр. соч. т. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
10. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann., 1908, B. 65.
11. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
12. Харламов П. В. Два частных решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
13. Харламов П. В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
14. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Спецкурс, ч. 1. Новосибирск, 1965.