О РАБОТЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МАЛЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

М. Б. Невельсон (Москва)

Исследуется работа линейной детерминированной системы, находящейся под воздействием случайных флуктуаций типа гауссовского «белого шума». При изучении влияния этих флуктуаций на устойчивость рассматриваемой системы естественно ограничиться случаем, когда мощность флуктуаций достаточно мала. При этом предположении оказывается возможным применить критерий устойчивости по вероятности линейной стохастической системы, полученный в [1]. Показано, в частности, что неустойчивая по Ляпунову детерминированная система остается неустойчивой по вероятности и при добавлении достаточно малой диффузии. Аналогичное утверждение было выдвинуто в качестве гипотезы в [2]. Влияние случайных сил на устойчивость детерминированной системы рассматривалось в несколько другом аспекте в [3,4].

1. Рассмотрим линейную детерминированную систему с постоянными коэффициентами

$$X_i^{\boldsymbol{\cdot}} = b_{i1}X_1 + \ldots + b_{in}X_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Предположим для простоты изложения, что эта система имеет действительные и различные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\lambda_1 = \max_i \lambda_i$$

Как известно, система (1.1) при помощи невырожденного линейного преобразования может быть приведена к каноническому виду

$$Z_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_i Z_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Обозначим через $|Z|$ евклидову норму вектора Z. Тогда в результате преобразования

$$Y = Z / |Z| \tag{1.2}$$

Система (1.1) перейдет в некоторую динамическую систему на n-мерной сфере S_n

$$Y_i^{\boldsymbol{\cdot}} = f_i(Y) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, выписывая общее решение системы (1.3), что совокупность Γ устойчивых инвариантных множеств этой системы состоит из двух точек: $(1, 0, \ldots, 0)$ и $(-1, 0, \ldots, 0)$.

2. Предположим теперь, что параметры системы (1.1) подвержены малым случайным возмущениям типа «белого шума». Тогда уравнения (1.1) перейдут в систему стохастических дифференциальных уравнений

$$X_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{j=1}^{n} [b_{ij} + \sqrt{\varepsilon}\, \eta_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)]\, X_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $\eta_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$ — гауссовские белые шумы с нулевым математическим ожиданием, которые, вообще говоря, могут быть зависимыми, так что

$$M\dot{\eta}_{ik}(t)\, \dot{\eta}_{jl}(s) = 2a_{kl}^{ij}\, \delta(t - s)$$

Решением системы (2.1) является строго марковский случайный процесс $X_\varepsilon(t, x)$ при начальном условии $X_\varepsilon(0, x) = x$.

Будем предполагать, что

$$\sum_{i, j, k, l=1}^{n} a_{kl}^{ij} x_k x_l y_i y_j \geqslant c\, |x|^2\, |y|^2, \qquad c > 0$$

т. е. что процесс $X_\varepsilon(t, x)$ не вырожден.

Переходя, как обычно, от шумов $\eta_{ij}^{\cdot}(t)$ к независимым белым шумам, уравнения (2.1) можно записать в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [5], стр. 247) с производящим оператором

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{kl}^{ij} x_k x_l \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что система (1.1) уже приведена к каноническому виду, т. е. что производящий оператор системы (2.1) (в новых координатах z_i) имеет вид

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \tag{2.2}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}(z)$ — квадратичные формы переменных z_i. Марковский процесс, соответствующий оператору (2.2), обозначим $Z_\varepsilon(t, z)$. Очевидно, процессы $X_\varepsilon(t, x)$ и $Z_\varepsilon(t, x)$ устойчивы или неустойчивы по вероятности одновременно.

Как показано в [1], в результате преобразования (1.2) процесс $Z_\varepsilon(t, z)$ перейдет в некоторый марковский случайный процесс $Y_\varepsilon(t, y)$ на сфере S_n. Процесс $Y_\varepsilon(t, y)$ описывается дифференциальным оператором

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$$

Положим

$$I_\varepsilon = \int_{S_n} A_\varepsilon(y) \mu_\varepsilon(dy), \qquad A_\varepsilon(y) = L_1 \ln |z| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \varepsilon A_1(y)$$

Здесь $\mu_\varepsilon(dy)$ — инвариантная мера процесса $Y_\varepsilon(t, y)$.

Из [1] следует, что если $I_\varepsilon < 0$, то система (2.1) будет асимптотически устойчива в целом по вероятности; если же $I_\varepsilon > 0$, то для любого $x \neq 0$

$$P\{\lim |X(t, x)| = \infty \text{ при } t \to \infty\} = 1 \tag{2.3}$$

т. е. система (2.1) неустойчива по вероятности.

В п. 3 будет показано, что инвариантная мера $\mu_\varepsilon(dy)$ процесса $Y_\varepsilon(t, y)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к некоторой инвариантной мере $\mu_0(dy)$ предельной динамической системы (1.3), причем мера $\mu_0(dy)$ целиком сосредоточена на множестве Γ сферы S_n, содержащем все устойчивые инвариантные множества системы (1.3).

Отсюда и из вида множества Γ имеем

$$I_\varepsilon = \lambda_1 \mu_\varepsilon(\Gamma) + \varepsilon \int_{\Gamma} A_1(y) \mu_\varepsilon(dy) + \int_{S_n \setminus \Gamma} A_\varepsilon(y) \mu_\varepsilon(dy) = \lambda_1 + \alpha_1(\varepsilon), \tag{2.4}$$
$$\lim \alpha_1(\varepsilon) = 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Доказательство соотношения (2.4) проведено в предположении, что характеристические числа λ_i ($i = 1, \ldots, n$) действительны и различны. В общем случае, когда система (1.1) имеет произвольные характеристические числа, также нетрудно получить соотношение, аналогичное (2.4). Для этого достаточно привести систему (1.3) к каноническому виду и затем рассмотреть соответствующую динамическую систему на сфере S_n. Исследуя совокупность Γ устойчивых инвариантных множеств этой системы [1], нетрудно показать точно так же, как было сделано выше, что

$$I_\varepsilon = \lambda + \alpha(\varepsilon), \qquad \lambda = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i, \qquad \lim \alpha(\varepsilon) = 0, \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{2.5}$$

[1] Заметим, что линейно независимые решения системы (1.1), соответствующие корню λ_i, разбиваются в общем случае на определенное число групп решений (см. [6], стр. 96). Множество Γ будет зависеть от числа решений в группах, соответствующих характеристическим корням с максимальной действительной частью.

Из равенств (2.5) вытекает следующее.

1) Если система (1.1) неустойчива, т. е. $\lambda > 0$, то найдется такое достаточно малое ε_0, что и система (2.1) будет неустойчивой по вероятности в смысле (2.3) при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$.

2) Если система (1.1) асимптотически устойчива, т. е. $\lambda < 0$, то и система (2.1) будет асимптотически устойчивой в целом по вероятности при всех достаточно малых ε (см. по этому поводу также [2,7]).

3) Если система (1.1) устойчива, но не асимптотически, т. е. $\lambda = 0$, то для выяснения вопроса об устойчивости системы (2.1) необходимо получить дальнейшие члены асимптотического разложения I_ε при $\varepsilon \to 0$. Задача получения такого разложения в общем случае является, по-видимому, довольно сложной, однако при $n = 2$ оно может быть легко найдено из результатов работы [8]. При этом оказывается, что если второе из характеристических чисел системы (1.1) отрицательно, то система (2.1) асимптотически устойчива в целом по вероятности при всех достаточно малых ε; если же оба характеристические числа чисто мнимые, то система (2.1) может быть как устойчивой, так и неустойчивой по вероятности в зависимости от коэффициентов диффузии a_{kl}^{ij}.

3. Для завершения доказательства утверждений п. 2 достаточно установить следующий общий факт [1]: инвариантная мера $\mu_\varepsilon(dy)$ невырожденного марковского случайного процесса $Y_\varepsilon = \{Y_\varepsilon(t, y), P_\varepsilon\}$, заданного на сфере и описываемого оператором [2]

$$L = \sum_{i=1}^{n} b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$$

сходится при $\varepsilon \to 0$ к некоторой инвариантной мере $\mu_0(dy)$ предельной динамической системы

$$\dot{Y_i} = b_i(Y) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

причем мера $\mu_0(dy)$ целиком сосредоточена на устойчивых инвариантных множествах системы (3.1).

Пусть Γ — совокупность устойчивых инвариантных множеств системы (3.1) и Γ_δ — δ-окрестность множества Γ. Пусть, далее, K — совокупность неустойчивых инвариантных множеств системы (3.1), а K_γ — γ-окрестность K, причем δ и γ настолько малы, что $K_\gamma \cap \Gamma_\delta = \varnothing$. Тогда для любого $y \in A_\gamma = S_n \setminus K_\gamma$ найдется такое $t_0 = t_0(\delta, \gamma)$, что траектория $Y_0(t, y)$ динамической системы (3.1), начинающаяся в начальный момент времени в точке y, принадлежит множеству $\Gamma_{1/2\delta}$ при всех $t \geqslant t_0$. Отсюда и из асимптотического разложения для диффузионных процессов, зависящих от малого параметра [10], вытекает, что при любом фиксированном $t \geqslant t_0$ для $y \in A_\gamma$

$$\lim P_\varepsilon\{Y_\varepsilon(t, y) \in \Gamma_\delta\} = 1 \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{3.2}$$

равномерно по $y \in A_\gamma$.

Обозначим через $\tau_\varepsilon(y)$ момент первого выхода траектории процесса $Y_\varepsilon(t, y)$ из множества K_γ. Из доказательства теоремы 4 работы [11] нетрудно вывести следующее соотношение, справедливое для некоторого $T > 0$:

$$\lim P_\varepsilon\left\{\tau_\varepsilon(y) \geqslant \frac{T}{\varepsilon^2}\right\} = 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{3.3}$$

равномерно по $y \in K_\gamma$.

Используя (3.2), (3.3) и строго марковское свойство, легко показать, что при $\varepsilon \to 0$

$$P_\varepsilon\left\{y, \frac{T+1}{\varepsilon^2}, K_\gamma\right\} = P_\varepsilon\left\{Y_\varepsilon\left(\frac{T+1}{\varepsilon^2}, y\right) \in K_\gamma\right\} \to 0 \tag{3.4}$$

равномерно по $y \in S_n$.

---

[1] Вопрос о поведении инвариантной меры марковского случайного процесса с малой диффузией рассматривался в [9].

[2] Предполагаем, что вектор переноса и матрица диффузии процесса Y_ε удовлетворяют условиям Липшица.

Кроме того, по определению инвариантной меры $\mu_\varepsilon(dy)$ для любого открытого множества сферы S_n и произвольного $t > 0$

$$\mu_\varepsilon(U) = \int\limits_{S_n} P_\varepsilon\{y, t, U\}\, \mu_\varepsilon(dy) \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) получаем (аналогичный прием использовался в [9])

$$\lim \mu_\varepsilon(K_\gamma) = 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{3.6}$$

Следовательно, согласно (3.2), (3.5) и (3.6)

$$\lim \mu_\varepsilon(\Gamma_\delta) = 1 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Последнее равенство, выполненное при всех достаточно малых δ. означает, что инвариантная мера $\mu_\varepsilon(dy)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к некоторой мере $\mu_0(dy)$, целиком сосредоточенной на множестве Г.

Автор приносит благодарность Р. З. Хасьминскому за ряд ценных указаний.

Поступила 20 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности линейной стохастической системы. Теория вероятностей и ее применения. 1966, т. 11, вып 1.
2. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траектории марковских процессов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
3. Leibowitz A. M. Statistical behavoiro of linear systems with random varying parameters. J. Math. end Phys., 1963, vol. 6, No. 6.
4. Работников Ю. Л. О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
5. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
7. Хасьминский Р. З. Об уравнениях со случайными возмущениями. Теория вероятностей и ее применения. 1965, т. 10, вып. 2.
8. Невельсон М. Б. О поведении инвариантной меры диффузионного процесса с малой диффузией на окружности. Теория вероятностей и ее применения. 1964, т. 9, вып. 1.
9. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией. Теория вероятностей и ее применения. 1963, т. 8, вып. 1.
10. Благовещенский Ю. Н. Диффузионные процессы, зависящие от малого параметра. Теория вероятностей и ее применения. 1962, т. 7, вып. 1.
11. Фрейдлин М. И. О стохастических уравнениях Ито и вырождающихся эллиптических уравнениях. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1962, т. 26, вып. 5.

О КВАДРАТИЧНОМ ИНТЕГРАЛЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

А. М. Ковалев, Ю. М. Ковалев

(Донецк)

Условия существования четвертого алгебраического интеграла указанной задачи изучены в исследованиях С. В. Ковалевской, А. М. Ляпунова, Г. Г. Аппельрота, А. Пуанкаре, Э. Хуссона, П. Бургатти, П. Я. Кочиной (см., например, [1,2]). Эти исследования проведены в предположении, что четвертый интеграл не зависит явно от времени и так же, как и остальные три интеграла, содержит произвольную постоянную.

Что же касается решений с алгебраическими инвариантными соотношениями [1], то, хотя такие решения время от времени обнаруживаются [2], условия их существования не установлены даже для простейших случаев. С. А. Чаплыгин рассматривал усло-

[1] Употреблен термин, примененный в [3].

[2] Последнее решение указано Е. И. Харламовой в статье [4], где перечислены все известные к настоящему моменту случаи интегрируемости.