О ЗАДАЧЕ МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

В. А. Самсонов (Москва)

В работе В. В. Румянцева [1] доказана теорема, по которой для устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, заполненной двумя несмешивающимися однородными несжимаемыми жидкостями, достаточно, чтобы функционал

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S} + \Pi + \alpha\sigma + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2, \qquad \Pi = \Pi_0 + \int\limits_{\tau_1} \rho_1\Pi_1\,d\tau + \int\limits_{\tau_2} \rho_2\Pi_2\,d\tau$$

имел изолированный минимум W_0 для невозмущенного движения.

Здесь k_0 — момент количества движения всей системы относительно оси вращения в невозмущенном движении; S — момент инерции системы относительно той же оси в возмущенном состоянии; τ_1, τ_2 — объемы, занимаемые жидкостями; ρ_1, ρ_2 — соответствующие плотности жидкостей; Π_0, Π_1, Π_2 — потенциалы сил, действующих соответственно на тело и жидкости; σ — площадь поверхности раздела жидкостей; σ_1, σ_2 — площади контакта жидкостей со стенками полости; α, α_1, α_2 — соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения. Предполагается, что обе жидкости находятся в равновесии относительно тела для невозмущенного движения.

Необходимым условием минимума функционала является существование слабого минимума. Ниже излагается способ получения достаточных условий слабого минимума функционала W из рассмотрения его второй вариации $\delta^2 W$.

1. Функционал W зависит, очевидно, от формы поверхности раздела жидкостей (σ) и от координат q_j $(j = 1,\ldots, n-1)$, описывающих положение тела (кроме циклической q_n). Первая вариация функционала W обращается в нуль [1] для стационарного движения тела, которое описывается уравнениями

$$q_j = 0, \qquad q_n = \omega t, \qquad \omega = \mathrm{const}$$

Пусть функция l, заданная на невозмущенной поверхности $(\sigma)_0$, определяет отклонение поверхности раздела (σ) от невозмущенной $(\sigma)_0$. Тогда вторая вариация $\delta^2 W$ в общем случае должна состоять из трех частей: квадратичного функционала по l, квадратичной формы координат q_j и функционала, линейного по q_j и по l, т. е. $\delta^2 W$ представима в виде

$$\delta^2 W = P_1(l) + P_2(l, q_j) + U(q_j),$$

$$P_1(l) = (Ll, l), \qquad P_2(l, q_j) = 2(l, \Phi), \quad (l, \Phi) = \int\limits_{(\sigma)_0} \Phi l\, d\sigma$$

Здесь Ll — линейный оператор, Φ — функция вида $a_1 q_1 + \ldots + a_{n-1} q_{n-1}$, где a_j — некоторые функции, заданные на поверхности $(\sigma)_0$, $U(q_j)$ — квадратичная форма q_j. Явный вид оператора Ll, функций Φ и U зависит от внешних сил и способа измерения отклонения l. Один из возможных видов приводится ниже в примере. Другой вид этих выражений можно найти в работе [2].

Пусть функционал P_1 (или оператор L) является положительно определенным. Соответствующие условия будут первой группой условий слабого минимума W.

Вторую группу условий можно получить, следуя способу, предложенному в [3, 4]. Функционал $P_1 + P_2$ имеет минимум при фиксированных q_j и этот минимум [5] сообщается ему решением $l_1(q_j)$ уравнения

$$Ll + \Phi = c_0 \tag{1}$$

$((l, c_0) = 0$ в силу несжимаемости жидкостей). Причем

$$P_1 + P_2 = P_1(l - l_1) + {}^1/_2\, P_2(l_1)$$

Очевидно, что

$$\min(P_1 + P_2) = {}^1/_2\, P_2(l_1) = (l_1, \Phi)$$

В силу линейности уравнения (1) его решение l_1 будет линейной функцией q_j, а (l_1, Φ) — квадратичной формой q_j. Вторую вариацию можно представить в виде

$$\delta^2 W = P_1 (l - l_1) + V(q_j), \qquad V(q_j) = (l_1, \Phi) + U$$

Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема. Если P_1 — положительно определенный функционал, а $V(q_j)$ — положительно определенная квадратичная форма, то функционал W имеет минимум W_0 при $q_j = 0$, $l \equiv 0$.

Доказательство. Разность между значениями функционала W в возмущенном и невозмущенном состояниях системы можно представить в виде

$$W - W_0 = \delta^2 W + a (\| l \|^2 + \| q \|^2), \qquad \| l \|^2 = (Ll, l), \qquad \| q \|^2 = q_1^2 + \ldots + q_{n-1}^2$$

где $a \to 0$, если $(\| l \|^2 + \| q \|^2) \to 0$, или после преобразований

$$W - W_0 = P_1 (l - l_1) + V(q_j) + b (\| l - l_1 \|^2 + \| q \|^2)$$

где $b \to 0$, если $(\| l - l_1 \|^2 + \| q \|^2) \to 0$.

По условию существует число $d > 0$ такое, что

$$V(q_j) > d \| q \|^2$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$| b | < \min \{{}^1/_2, {}^1/_2 d\} \quad \text{при} \quad \| l \|^2 + \| l_1 \|^2 + \| q \|^2 < \varepsilon$$

Тогда

$$W - W_0 > {}^1/_2 \| l - l_2 \|^2 + {}^1/_2 d \| q \|^2 > 0, \quad \text{если} \quad \| l \|^2 + \| q \|^2 \neq 0$$

т. е. W имеет минимум W_0 при $q_j = 0$, $l \equiv 0$.

Для построения функции V необязательно решать уравнение (1). Коэффициенты этой квадратичной формы можно определить, проводя минимизацию функционала $P_1 + P_2$ при фиксированных q_j каким-нибудь из прямых методов, например Ритца.

2. Рассмотрим задачу о движении твердого тела с одной неподвижной точкой O под действием однородной силы тяжести с ускорением g. Введем оси координат: неподвижные y_1, y_2, y_3; ось y_3 по вертикали вверх; связанные с телом x_1, x_2, x_3 направлены по главным осям эллипсоида инерции, построенного в точке O. В плоскости $x_1 x_2$ введены также полярные координаты r, φ.

Допустим, что стационарным движением будет вращение тела и жидкостей в его полости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси x_3, совпадающей с осью y_3.

Для простоты выкладок будем считать, что полость образована поверхностью вращения вокруг оси x_3. Уравнение этой поверхности $x_3 = \psi(r)$. Поверхность раздела жидкостей, заполняющих полость, будет также поверхностью вращения, и ее уравнение $x_3 = f(r)$. Тогда оси x_i будут главными осями инерции для всей системы в невозмущенном движении. Жидкость с плотностью ρ_1 находится ниже поверхности раздела.

Пусть f — однозначная функция с ограниченными первой и второй производными. В этом случае за отклонение $l(r, \varphi)$ можно принять смещение поверхности раздела вдоль оси x_3, т. е. если $x_3 = h(r, \varphi)$ — уравнение поверхности раздела в возмущенном состоянии, то $l = h - f$. Тогда

$$2\delta^2 W = P_1 + P_2 + U = \frac{1}{C} \Big(\rho\omega \iint\limits_{(\Omega)} r^2 l \, d\Omega\Big)^2 + \iint\limits_{(\Omega)} \Big[\rho g l^2 + \alpha \Big(l_r^2 \{f\}^3 + \frac{l_\varphi^2 \{f\}}{r^2} \Big)\Big] d\Omega -$$

$$- \alpha \int\limits_{\Gamma} \mu l^2 \{f\}^3 d\Gamma + \iint\limits_{(\Omega)} 2\rho (g + \omega^2 f)(\gamma_1 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi) \, lr \, d\Omega + \gamma_1^2 Q(A) + \gamma_2^2 Q(B)$$

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \qquad \{f\} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_r^2}}, \qquad \mu = \frac{1}{\psi_r - f_r} \Big(\frac{1 + f_r^2}{1 + \psi_r^2} \psi_{rr} - f_{rr} \Big)$$

$$Q(A) = \omega^2 (C - A) - Mgx_{3,0}, \qquad \gamma_i = \cos(y_3, x_i)$$

Здесь M — масса; $x_{3,0}$ — координата центра тяжести; A, B, C — главные моменты инерции относительно осей x_1, x_2, x_3 всей системы, как одного тела, в невозмущенном движении; (Ω) — область, ограниченная окружностью Γ — проекцией линии пересечения поверхности раздела со стенкой полости на плоскость x_1x_2. Частные производные по r, φ обозначены индексом. Для невозмущенного движения $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Очевидно, что P_1 — положительно определенный функционал, если

$$\rho_1 > \rho_2, \qquad \mu \leqslant 0 \tag{2}$$

Уравнение (1) будет иметь вид

$$Ll = \rho g l - \alpha\left[\frac{1}{r}(r l_r \{f\}^3)_r + \frac{1}{r^2} l_{\varphi\varphi}\{f\}\right] + \frac{r^2\rho^2\omega^2}{C}\iint\limits_{(\Omega)} r^2 l\, d\Omega = -\rho(g + \omega^2 f)\, r\,(\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi) + c_0$$

Величина c_0 и член с интегралом при вычислении минимума исчезнут, поэтому их можно сразу отбросить. Граничное условие для решения этого уравнения

$$l_r - \mu l = 0\,|_\Gamma$$

В силу линейности оператора L решение l_1 может быть разбито на две части

$$l_1 = \gamma_1\, u(r)\cos\varphi + \gamma_2\, v(r)\sin\varphi$$

Для $u(r)$ и $v(r)$ будет одно и то же уравнение

$$L_1 u = -\rho(g + \omega^2 f)\, r, \qquad \cos\varphi\, L_1 u = L\ (u\cos\varphi) \tag{3}$$

с граничным условием

$$u_r = \mu u\,|_{r=R}$$

Квадратичная форма V в этом случае имеет вид

$$2V = \gamma_1^2[Q(A) + \pi\rho\nu] + \gamma_2^2[Q(B) + \pi\rho\nu], \qquad \nu = \int\limits_0^R (g + \omega^2 f)\, u r^2\, dr$$

После подстановки решения уравнения (3) в V получим условия ее определенной положительности

$$\omega^2(C - A) - Mg\, x_{3,0} + \pi\rho\nu > 0, \qquad A \geqslant B \tag{4}$$

Условия (2), (4) обеспечивают слабый минимум W в этой задаче.

В случае отсутствия поверхностного натяжения ($\alpha = 0$) это условие совпадает с аналогичным из работы [3].

Для численного подсчета ν в конкретных задачах можно воспользоваться методом Ритца, приняв бесселевы функции $J_1(\lambda_j r)$ за координатные. Число λ_j — решение уравнения

$$\frac{d}{dr} J_1(\lambda R) = \mu J_1(\lambda R)$$

Здесь R — радиус окружности Γ. Тогда система Ритца имеет вид

$$\sum_i a_i b_{ij} = c_j, \qquad b_{ij} = \int\limits_0^R [L_1 J_1(\lambda_i r)] J_1(\lambda_j r)\, r\, dr, \qquad c_j = -\int\limits_0^R (g + \omega^2 f) J_1(\lambda_j r)\, r^2\, dr$$

и для ν получим выражение

$$\nu = \sum_i a_i c_i$$

Пусть полость цилиндрическая радиуса $R = 1$, поверхность раздела находится на конечном расстоянии от торцов полости. Параметры ρ, g, α, α_1, α_2 таковы, что поверхность раздела при равновесии тела задается кривой (фиг. 5) работы [6] при $W_0 = 1$.

Подсчет величины ν по методу Ритца дает в первом и во втором приближениях:

$$\nu_1 = -0.236, \qquad \nu_2 = -0.245$$

Как видно, эти значения мало отличаются одно от другого, что позволяет надеяться на быструю сходимость. К сожалению, этот метод дает значения для ν с недостатком, хотя и достаточно малым для прикладных задач.

можно привести пример, в котором удается вычислить величину ν аналитически.

В работе [7] указана форма поверхности $(\sigma)_0$ при равновесии ($\omega = 0$) в предположении, что коэффициент α мал. Поверхность $(\sigma)_0$ в этом случае будет горизонтальной плоскостью, за исключением круговой полосы ширины $\sim \sqrt{\alpha}$ около стенок полости, где максимальное удаление поверхности $(\sigma)_0$ от упомянутой плоскости — также величина порядка $\sqrt{\alpha}$, а $f_r \sim 1$.

Можно вычислить величину ν в этом случае с точностью до членов первого порядка по α. Так как в цилиндрической полости $(l_1,\Phi) = \nu(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$, величина ν может рассматриваться как минимум функционала

$$W_1 = \int_0^R \left[gu^2 + \frac{\alpha}{\rho}\left(\{f\}^3 u_r^2 + \frac{1}{r^2}\{f\} u^2\right) + 2rgu\right] rdr$$

Предположим, что минимизирующая функция u_1 и $u_{1,r}$ ограничены. Так как $f_r \neq 0$ только в полосе шириной $\sim \sqrt{\alpha}$, функционал W_1 с точностью до членов первого порядка по α можно заменить функционалом

$$W_2 = \int_0^R \left[gu^2 + \frac{\alpha}{\rho}\left(u_r^2 + \frac{1}{r^2} u^2\right) + 2rgu\right] rdr$$

Минимизирующая функция для W_2, очевидно, имеет вид

$$u_2 = -r + \frac{I_1(\lambda r)}{(d/dr)\, I_1(\lambda R)}, \quad \lambda^2 = \rho g / \alpha$$

и с точностью до членов первого порядка

$$\nu = -{}^1/_4 gR^4 + \alpha R^2 / \rho$$

Функционалы W_1 и W_2 тождественны, если поверхность $(\sigma)_0$ плоская. При вычислении координаты центра тяжести $x_{3,0}$ поверхность раздела также можно считать плоской, ибо закругления вносят поправку $\sim \alpha^{3/2}$. Это показывает, что при малом поверхностном натяжении закруглениями у твердой стенки можно пренебречь, ибо их влияние сказывается лишь в членах более высокого порядка.

Поступила 25 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Румянцев В. В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
4. Крейн С. Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
5. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, гл. III. «Наука», 1965.
6. Беляева Н. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.