Функция V вида (2.3) удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [3]. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Невозмущенное движение также неустойчиво, если:

а) нелинейные функции Y_i, Z_s удовлетворяют условиям (2.1);

б) диагональные элементы r_{kk} матрицы (2.2) нечетные и меньше, чем элементы соответствующего столбца, и, кроме того, величины $g_{kk} > 0$.

В этом случае функцию Ляпунова V можно взять в виде

$$V = \sum_{k=1}^{m} \left(g_{kk}x_k + \sum_{i=1}^{m} U_{ik}\right) y_k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} z_s \psi_{ks} + W \tag{2.4}$$

где ψ_{ks} — функции от $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s\sigma} + \omega_{s\sigma}) \psi_{ks} + g_{kk}x_k\varphi_{k\sigma} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Функции U_{ik}, W — линейные и квадратичная формы, определяемые из уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial z_s} (p_{s1}z_1 + \cdots + p_{sn}z_n) = -\sum_{s=1}^{n} z_s \left(\frac{\partial \psi_{is}}{\partial x_k}\right)_0 \\ &\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_s} (p_{s1}z_1 + \cdots + p_{sn}z_n) = \sum_{s=1}^{n} z_s^2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Функция V вида (2.4) удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [3]. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 3 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагитов М. С., Филатов А. Н. Об устойчивости по Ляпунову в критическом случае, когда определяющее уравнение имеет четное число нулевых корней. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1955.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. И. Бондаренко, Ю. М. Филимонов

(Нижний Тагил)

Рассматривается задача о построении управляющего воздействия, приводящего нелинейную систему к заданному движению.

1. Пусть поведение системы автоматического управления описывается дифференциальными уравнениями возмущенного движения

$$dx / dt = Ax + f(x) + bu \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат $\{x_i\}$ объекта; $u(t)$ — скалярная функция, описывающая управляющее воздействие; A — $n \times n$-мерная матрица $\{a_{ij}\}$; b — n-мерный вектор; $f(x)$ — n-мерная вектор-функция координат; $f(0) = 0$.

В отношении этой функции предполагается, что во всем фазовом пространстве x она удовлетворяет условию Липшица

$$| f_j(x)^{(2)} - f_j(x)^{(1)} | \leqslant L \| x^{(2)} - x^{(1)} \| \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем принято обозначение

$$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Рассмотрим следующую задачу. Для заданного начального положения x_0 найти управляющее воздействие $u(t)$, приводящее систему (1.1) к заданному невозмущенному движению $x = 0$ за время T.

Сформулированная задача имеет не единственное решение. Будем искать управление, которое при малых начальных возмущениях близко к оптимальному при условии

$$J(u) = \max\left\{\max_\tau |u(\tau)|, \qquad \nu\int_0^T |u(\tau)|\,d\tau\right\} = \min \qquad (\nu T > 1) \tag{1.3}$$

Задача успокоения системы первого приближения

$$dx \,/\, dt = Ax + bu \tag{1.4}$$

при условии ее полной управляемости [1], с учетом качества управления (1.3), рассматривалась в работах [2–4]. В работе [5] получена оценка допустимых начальных отклонений системы (1.4), для которых возможно оптимальное управление по модулю, ограниченное заданным числом H. Эта оценка имеет вид

$$\|x\| \leqslant H\alpha \,/\, \sqrt{n} \qquad (\alpha = \text{const}) \tag{1.5}$$

2. Опишем итерационный процесс решения поставленной задачи. Рассмотрим следующее уравнение:

$$x = x_0 + \int_0^T F(-\tau) f(x(\tau))\,d\tau \tag{2.1}$$

Здесь подынтегральная функция вычисляется вдоль траектории нелинейной системы (1.1) для начальной точки x_0 и порожденной управлением $u(\tau)$, удовлетворяющим условию

$$0 = x + \int_0^T F(-\tau) bu(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

Здесь $F(\tau)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы (1.4).

Будем решать (2.1) методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем $x = x_0$, $u_{x0}(\tau) = u^\circ(\tau)$, где $u^\circ(\tau)$ — оптимальное управление системы (1.4) (в смысле (1.3)), рассчитанное для точки x_0. Управление $u^\circ(\tau)$ удовлетворяет условию (2.2). Из (2.1) находим

$$x_1 = x_0 + \int_0^T F(-\tau) f(x^\circ(\tau))\,d\tau \tag{2.3}$$

Управление $u_{x_1}(t)$ определим так:

$$u_{x_1}(\tau) = u_{x_0}(\tau) + \lambda_1(\tau) \tag{2.4}$$

где $\lambda_1(\tau)$ — оптимальное управление линейной системой (1.4) (в смысле (1.3)) для начального положения $x(0) = x_1 - x_0$. При этом управление (2.4) удовлетворяет соотношению

$$0 = x_1 + \int_0^T F(-\tau) bu_{x_1}(\tau)\,d\tau$$

Продолжая этот процесс, найдем x_{n-1} и $u_{xn-1}(\tau)$. Следующее приближение определим так:

$$x_n = x_0 + \int_0^T F(-\tau) f(x^{(n-1)}(\tau))\,d\tau, \qquad u_{x_n} = x_{x_{n-1}}(\tau) + \lambda_n(\tau) \tag{2.5}$$

Здесь $\lambda_n(\tau)$ — оптимальное управление линейной системой (1.4) для начального положения $x(0) = x_n - x_{n-1}$. При этом

$$0 = x_n + \int_0^T F(-\tau)\, b u_{x_n}(\tau)\, d\tau \tag{2.6}$$

В случае сходимости данного итерационного процесса уравнение (2.1) при условии (2.2) имеет решение x^*, $u^*(\tau)$. Складывая соотношения (2.1) и (2.2), записанные для этих значений, находим, что управление $u^*(\tau)$ приводит нелинейную систему (1.1) из положения x_0 в начало координат за время T.

3. В этом пункте выясняются условия сходимости построенного в п. 2 итерационного процесса. Способ построения последовательных приближений и неравенство (1.5) приводят к следующим неравенствам:

$$\int_0^T |u_{x_n} - u_{x_{n-1}}|\, d\tau \leqslant \gamma \| x_n - x_{n-1} \| \qquad (\gamma = \mathrm{const}) \tag{3.1}$$

Из (2.5), (3.1), используя основное неравенство качественной теории дифференциальных уравнений ([6], стр. 19), получим

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant NL \| x_{n-1} - x_{n-2} \| \qquad (N = \mathrm{const})$$

или

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant (NL)^{n-1} \| x_1 - x_0 \| \tag{3.2}$$

Кроме того,

$$\max_\tau |\lambda_n(\tau)| \leqslant \gamma_1 (NL)^{n-1} \| x_1 - x_0 \| \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T) \tag{3.3}$$
$$(\gamma_1 = \mathrm{const}).$$

Пусть теперь выполнено условие

$$NL < 1 \tag{3.4}$$

Тогда итерационный процесс, построенный в п. 2, сходится.

Действительно, в этом случае неравенства (3.2) и (3.3) гарантируют сходимость последовательности точек $\{x_n\}$ и последовательности функций $\{u_{x_n}\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$. При этом функциональная последовательность $\{u_{x_n}\}$ сходится равномерно, так как по построению предельная функция является суммой следующего ряда:

$$u^*(\tau) = u^\circ(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\tau) \tag{3.5}$$

Этот ряд, в силу (3.3), сходится равномерно для $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Обозначим через x^* предел последовательности $\{x_n\}$. Вектор x^* и функция $u^*(\tau)$ удовлетворяют соотношениям (2.1) и (2.2). Это следует из возможности предельного перехода в соотношении (2.6), а также из равномерной сходимости траекторий нелинейной системы (1.1), начинающихся в точке x_0 и порожденных последовательностью управлений $\{u_{x_n}(\tau)\}$ на отрезке $[0, T]$.

Замечание. Так как при любом n справедливо неравенство

$$\max_\tau |u_{x_n}(\tau)| \leqslant N_1 \| x_0 \| \qquad (N_1 = \mathrm{const})$$

то все траектории нелинейной системы (1.1), участвующие в итерационном процессе, не покидают сферы

$$\| x \| \leqslant N_2 \| x_0 \| \quad (N_2 = \mathrm{const}) \tag{3.6}$$

Следовательно, достаточно потребовать выполнения условия (1.2) только для точек сферы (3.6), чтобы при соблюдении (3.4) итерационный процесс сходился.

4. В этом пункте будем считать, что в достаточно малой окрестности начала координат нелинейность системы (1.1) вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$|f_j(x)| \leqslant D \|x\|^{1+\varepsilon} \quad (j = 1, \ldots, n,\ D = \text{const}) \tag{4.1}$$

Следуя схеме, намеченной в работе [7], покажем, что построенное управление $u^*(\tau)$ является близким к оптимальному управлению системой (1.1) в смысле (1.3). С учетом (1.2), (4.1), имеем

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant N_3 \|x_0\|^{1+\varepsilon} \qquad (N_3 = \text{const}) \tag{4.2}$$

Обозначим через $u_0(\tau)$ оптимальное управление нелинейной системы (1.1). Применим это управление к линейной системе (1.4) с начальным положением x_0. Если $x(T)$ — положение линейной системы в момент T, то

$$\|x(T)\| \leqslant N_4 \|x_0\|^{1+\varepsilon} \qquad (N_4 = \text{const}) \tag{4.3}$$

Рассмотрим управление

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \lambda(\tau) \tag{4.4}$$

где $\lambda(\tau)$ — оптимальное управление линейной системы (1.4) для начального положения $x(T)$. При этом, в силу оценки (1.5)

$$\max_\tau |\lambda(\tau)| \leqslant \gamma_1 \|x(T)\| \qquad (\gamma_1 = \text{const}) \tag{4.5}$$

Так как управление (4.4) является допустимым управлением для линейной системы, получим

$$\max_\tau |u^\circ(\tau)| - \max_\tau |\lambda(\tau)| \leqslant \max_\tau |u_0(\tau)| \leqslant \max_\tau |u^*(\tau)| \tag{4.6}$$

где $u^*(\tau)$ — управление нелинейной системой (1.1), определяемое (3.5).

Неравенство (4.6) написано в предположении, что минимум функционала (1.3) для систем (1.1), (1.4) определяется первой компонентой. Дальнейшие рассуждения мало чем изменятся, если значение функционала для нелинейной системы определяется второй компонентой, ввиду равенства компонент функционала (1.3) для оптимального управления линейной системой.

Из (4.6), учитывая (3.5), (3.3), (4.2), (4.3) и (4.5) и то, что $\max_\tau |u^\circ(\tau)|$ является величиной порядка $\|x_0\|$, заключаем, что значения $\max_\tau |u_0(\tau)|$ и $\max_\tau |u^*(\tau)|$ отличаются на величину порядка не ниже, чем $\|x_0\|^{1+\varepsilon}$. А это означает, что значение функционала (1.3) на управлении $u_0(\tau)$ отличается от значения этого же функционала на управлении $u^*(\tau)$ на величину порядка не ниже, чем $\|x_0\|^{1+\varepsilon}$.

Авторы благодарят Н. Н. Красовского за постановку задачи и обсуждения.

Поступила 3 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. Первого конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, т. 2, 1961.
2. Goldstein A. A., Seidman T. J. Full optimiration in orbital rendezvous. Math. Res. Lab. Boing Scient. Res. Labs. Math., Note No. 317, Seattle, Wach, 1963.
3. Красовский Н. Н. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления. ПММ, т. 29, 1965, вып. 2.
4. Габасов Р., Гиндес В. Б. К оптимальным процессам в линейных системах с двумя ограничениями на управляющее воздействие. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 6.
5. Бондаренко В. И., Красовский Н. Н., Филимонов Ю. М. К задаче об успокоении линейной системы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1949.
7. Альбрехт Э. Г. Об управлении движением нелинейных систем. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 3.