ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Нго Ван Вьонг

(Ханой, ДРВ)

Исследуется устойчивость движения, описываемого системой дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$x_i^{\cdot} = y_i + X_i^*, \quad y_i^{\cdot} = Y_i^*, \quad \zeta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, \xi_k + Z_s^* \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ s = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

где X_i^*, Y_i^*, Z_s^* — голоморфные функции, не содержащие членов ниже второго порядка относительно $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_m$; $s_1, \ldots, s_n$. Все корни уравнения $|p_{sk} - \delta_{sk}\lambda| = 0$ имеют отличные от нуля отрицательные вещественные части.

Система вида (0.1) при условии, что

$$Y_i^* = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k^2 + \sum_{k=1}^{m} P_{ik}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) y_k + Q_i(\zeta_1, \ldots \zeta_n) +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{n} \zeta_\sigma \varphi_{i\sigma}(x_1, \ldots, x_m) + R_i(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m;\ \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \tag{0.2}$$

$$Z_s^* = \sum_{\sigma=1}^{n} \zeta_\sigma \omega_{s\sigma}(x_1, \ldots, x_m) + R_s'(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m;\ \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

Здесь a_{ik} — постоянные; $\varphi_{i\sigma}$, $\omega_{s\sigma}$ — голоморфные функции, уничтожающиеся при $x_1 = \ldots = x_m = 0$; P_{ik} — линейные, а Q_i — квадратичные формы $s_1, \ldots, s$; R_i, R_s' — голоморфные функции $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_m$; $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, не содержащие членов ниже третьего порядка относительно этих переменных. Устойчивость этой системы рассматривалась в статье [1]. В этой статье делается попытка доказать неустойчивость невозмущенного движения при значениях Y_i^*, Z_s^*, удовлетворяющих условию (0.2).

Несмотря на весь частный вид функций $Y_i^* Z_s^*$, рассматриваемых в статье [1], функция V, предлагаемая авторами статьи, не будет функцией Четаева, если не наложить дополнительных условий на Y_i^* и Z_s^*. Действительно выражение ([1], (2.8)) содержит, например, совокупности

$$\sum_{k=1}^{m} \left[1 + \left(1 - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\right) x_k\right] R_i, \qquad \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \psi_{ks}(x_1, \ldots, x_m) R_s'$$

в которые входят члены вида

$$x_i^{\delta_i}, \quad y_i x_i^{\nu_i}, \quad \zeta_s x_i^{\mu_i} \quad (\delta_i,\ \mu_i \nu_i \geqslant 2)$$

Очевидно, что при наличии таких членов dV/dt может принимать при $V > 0$ значения любого знака. Следовательно, на функции Y_i^* и Z_s^* при выборе функции V, согласно [1] (2.5), необходимо наложить следующие дополнительные условия.

1. При $y_1 = \ldots = y_m = \zeta_1 = \ldots = \zeta_n = 0$ все $Y_i^* \equiv 0$, $Z_s^* \equiv 0$.

2. Все R_i и R_s' не содержат членов ниже второго порядка относительно $y_1 \ldots y_m s_1 \ldots s_n$.

§ 1. Исследуем систему уравнений (0.1), предполагая, что X_i^*, Z_s^* уничтожаются при $y_1 = \ldots = y_m = s_1 = \ldots = s_n = 0$. Это предположение не уменьшает общности задачи [1].

Преобразуем систему (0.1), положив

$$\zeta_s = z_s + u_s(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $u_s(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m)$ — корни уравнений

$$p_{s1} u_1 + \cdots + p_{sn} u_n + Z_s^*(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m;\ u_1, \ldots, u_n) = 0$$

В результате будем иметь

$$x_s^{\cdot} = y_i + X_i, \quad y_i^{\cdot} = Y_i \quad z_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} z_k + Z_s \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ s = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

где X_i, Y_i — значения функций X_i^* Y_i^* при

$$\zeta_s = z_s + u_s, \text{ а} \tag{1.3}$$

$$z_s = z_s^*(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m; z_1 + u_1, \ldots, z_n + u_n) -$$

$$- z_s^*(x_1, \ldots, x_m; \; y_1, \ldots, y_m; \; u_1, \ldots, u_n) - \sum_{k=1}^{m} (y_k + X_k) \frac{\partial u_s}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{m} Y_k \frac{\partial u_s}{\partial y_k}$$

Отметим, что:

а) функции $X_i \equiv 0$ при $y_1 = \ldots = y_m = z_1 = \ldots = z_m = 0$;

б) функции Y_i и Z_s будут также обращаться в нули тождественно при значениях $y_1 = \ldots = y_m = z_1 = \ldots = z_n = 0$, если только все функции Y_i^* обращаются тождественно в нуль при $y_1 = \ldots = y_m = s_1 = \ldots = s_n = 0$.

в) функции Z_s не будут содержать членов с первой степенью $y_1, \ldots, y_m$ при $z_1 = \ldots = z_n = 0$, если только все Y_i уничтожаются при $y_1 = \ldots = y_m = s_1 = \ldots = s_n = 0$ и Y_i не содержат членов с первой степенью $y_1, \ldots, y_m$ при $z_1 = \ldots = z_n = 0$.

Допустим, что $Y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ при $y_1 = \ldots = y_m = z_1 = \ldots = z_n = 0$ и кроме того, при $z_1 = \ldots = z_n = 0$ функции Y_i не содержат линейных членов относительно $y_1, \ldots, y_m$. Докажем, что невозмущенное движение неустойчиво.

Возьмем функцию Четаева в виде

$$V = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{s=1}^{n} z_s v_s(x_1, \ldots, x_m) + W(z_1, \ldots, z_n) \tag{1.4}$$

где $W(z_1, \ldots, z_n)$ — определенно отрицательная квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_s} (p_{s1} z_1 + \cdots + p_{sn} z_n) = \sum_{s=1}^{n} z_s^2$$

а v_s — голоморфные функции $x_1, \ldots, x_m$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_m = 0$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{i=1}^{m} x_i F_{ik} + \sum_{s=1}^{n} v_s (p_{sk} + Q_{sk}) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

в которых F_{ik} и Q_{sk} равны

$$F_{ik} = \left.\frac{\partial Y_i}{\partial z_k}\right|_{z=y=0}, \qquad Q_{sk} = \left.\frac{\partial z_s}{\partial z_k}\right|_{z=y=0}$$

Производная V' при таком выборе функций v_s в силу структуры правых частей системы (1.2) может быть представлена в виде

$$V' = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{s=1}^{n} z_s^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} y_i y_k \varphi_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} z_j z_\sigma \psi_{j\sigma} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i z_j f_{ij}$$

Здесь φ_{ik}, $\Psi_{j\sigma}$ f_{ij} обращаются в нуль при

$$x_1 = \cdots = x_m = y_1 = \cdots = y_m = z_1 = \cdots = z_n = 0.$$

Рассмотрим область $V > 0$. Очевидно, что в этой области V' является величиной положительной и обращается в нуль лишь на границе области $V > 0$, где $y_1 = \ldots = y_m = z_1 = \ldots = z_n = 0$. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво [2].

Примечание. Можно легко показать, что в рассмотренном случае движения $x_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, $y_1 = \ldots = y_n = z_1 = \ldots = z_n = 0$ при достаточно малых значениях постоянных c_i будут также неустойчивы.

§ 2. Рассмотрим теперь случай, когда $Y_i \not\equiv 0$ при $y_1 = \ldots = y_m = z_1 = \ldots = z_n = 0$. Предположим, что при $z_1 = \ldots = z_n = 0$ Y_i не содержат линейных членов от $y_1, \ldots y_m$.

Пусть в системе (1.2)

$$Y_i = \sum_{k=1}^{m} g_{ik} x_k^{r_{ik}} + \sum_{k=1}^{m} x_k^{r_{ik}} f_{ik}(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k^2 +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{n} z_\sigma \varphi_{i\sigma}(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{k=1}^{m} P_{ik}(z_1, \ldots, z_n) y_k + Q_i(z_1, \ldots, z_n) +$$
$$+ R_i(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_n) \tag{2.1}$$

$$Z_s = \sum_{\sigma=1}^{n} z_\sigma \omega_{s\sigma}(x_1, \ldots, x_n) + R_s'(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_n)$$
$$(i = 1, \ldots, m;\ s = 1, \ldots, n)$$

Здесь a_{ik}, q_{ik} — постоянные; f_{ik}, $\varphi_{i\sigma}$, $\omega_{s\sigma}$ — голоморфные функции $x_1, \ldots, x_m$, уничтожающиеся при $x_1 = \ldots = x_m = 0$; P_{ik} — линейные; Q_i — квадратичные формы $z_1, \ldots, z_n$; R_i — голоморфные функции $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_m$, не содержащие членов ниже третьего измерения относительно этих переменных и не заключающие членов ниже второго порядка относительно $y_1 \ldots y_m;\ z_1 \ldots z_n$; R_s' — голоморфные функции $x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_n$, уничтожающиеся при $x_k = y_k = z_s = 0$, при $y_1 = \ldots = y_m = 0$ они не содержат членов с первой степенью $z_1, \ldots, z_n$. Отметим, что, если при $z_1 = \ldots = z_n = 0$ функции Y_i содержат, например, члены $x_i^{r_{ik}}$, то функции z_s при $z_1 = \ldots = z_n = 0$ могут содержать аналогичные члены, порядок которых в отношении x_i будет, по крайней мере, на единицу выше. Это свойство функций Z_s следует из равенств (1.3).

Покажем, что невозмущенное движение неустойчиво, если:

а) нелинейные функции Y_i, Z_s удовлетворяют условиям (2.1),

б) в каждом столбце матрицы

$$\begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mm} \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

наименьшие числа $r_{i'k}$ $(k = 1, \ldots, m)$ — четные и соответствующие величины $g_{i'k}$ одного знака.

Возьмем функцию Ляпунова V вида [1]

$$V = \sum_{k=1}^{m} \left[1 + \left(\sum_{i'} g_{i'k} - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\right) x_k\right] y_k + \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} z_s \psi_{ks} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} U_{ik}'(z_1, \ldots, z_n) y_k + \sum_{k=1}^{m} W_k \tag{2.3}$$

где ψ_{ks} — функции от переменных $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s\sigma} + \omega_{s\sigma}) \psi_{ks} + \left[1 + \left(\sum_{i'} g_{i'k} - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\right) x_k\right] \varphi_{k\sigma} = 0$$
$$(\sigma = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$$

U_{ik}, W_k — линейные и квадратичные формы $z_1, \ldots, z_n$, определяемые из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial z_s} (p_{s1} z_1 + \cdots + p_{sn} z_n) + P_{ik} = -\sum_{s=1}^{n} z_s \left(\frac{\partial \psi_{is}}{\partial x_k}\right)_0$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W_k}{\partial z_s} (p_{s1} z_1 + \cdots + p_{sn} z_n) + Q_k = \sum_{i'} \sum_{s=1}^{n} g_{i'k} z_s^2$$

Функция V вида (2.3) удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [3]. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Невозмущенное движение также неустойчиво, если:

а) нелинейные функции Y_i, Z_s удовлетворяют условиям (2.1);

б) диагональные элементы r_{kk} матрицы (2.2) нечетные и меньше, чем элементы соответствующего столбца, и, кроме того, величины $g_{kk} > 0$.

В этом случае функцию Ляпунова V можно взять в виде

$$V = \sum_{k=1}^{m} \left(g_{kk}x_k + \sum_{i=1}^{m} U_{ik}\right) y_k + \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} z_s \psi_{ks} + W \tag{2.4}$$

где ψ_{ks} — функции от $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s\sigma} + \omega_{s\sigma}) \psi_{ks} + g_{kk}x_k \varphi_{k\sigma} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Функции U_{ik}, W — линейные и квадратичная формы, определяемые из уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial z_s} (p_{s1}z_1 + \cdots + p_{sn}z_n) = -\sum_{s=1}^{n} z_s \left(\frac{\partial \psi_{is}}{\partial x_k}\right)_0 \\ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_s} (p_{s1}z_1 + \cdots + p_{sn}z_n) = \sum_{s=1}^{n} z_s^2 \end{gathered} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Функция V вида (2.4) удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [3]. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 3 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагитов М. С., Филатов А. Н. Об устойчивости по Ляпунову в критическом случае, когда определяющее уравнение имеет четное число нулевых корней. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1955.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. И. Бондаренко, Ю. М. Филимонов

(Нижний Тагил)

Рассматривается задача о построении управляющего воздействия, приводящего нелинейную систему к заданному движению.

1. Пусть поведение системы автоматического управления описывается дифференциальными уравнениями возмущенного движения

$$dx / dt = Ax + f(x) + bu \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат $\{x_i\}$ объекта; $u(t)$ — скалярная функция, описывающая управляющее воздействие; A — $n \times n$-мерная матрица $\{a_{ij}\}$; b — n-мерный вектор; $f(x)$ — n-мерная вектор-функция координат; $f(0) = 0$.

В отношении этой функции предполагается, что во всем фазовом пространстве x она удовлетворяет условию Липшица

$$| f_j(x)^{(2)} - f_j(x)^{(1)} | \leqslant L \| x^{(2)} - x^{(1)} \| \tag{1.2}$$