О СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВОЙНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

Н. В. Стоянов

(София, Болгария)

Общая задача о стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем до асимптотической устойчивости [1] рассмотрена в работе [2]. Ниже рассматриваются условия стабилизации нелинейной системы в критическом случае двойного нулевого корня.

1. Рассмотрим управляемую систему

$$dy / dt = f(t, y, w) \qquad (y \in \{R^{n+2}\},\ w \in \{R^m\}) \tag{1.1}$$

где f — заданная вектор-функция; y — $(n+2)$-мерный вектор фазовых координат системы; w — m-мерный вектор управления. Вектор y подвержен малым возмущениям x, так что в (1.1)

$$y = y^*(t) + x(t) \tag{1.2}$$

где $y^*(t)$ — заданное движение, осуществляемое управлением $w^*(t, y^*(t))$. Обозначим

$$u = w - w^* \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.1) и разлагая правые части по величинам x, u, получим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n+2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial w_j}\frac{\partial w_j^*}{\partial y_i}\right)x_i + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial w_j}u_j + g(t, x, u) \tag{1.4}$$

Здесь производные вычислены вдоль движения $y = y^*(t), w = w^*(t)$; $g(t, x, u)$ — члены выше первого порядка полости по x, u. Будем предполагать, что u имеет порядок малости не ниже x, т. е. $u(t, 0) = 0\ (t \geqslant 0)$:

$$|u_j(t, x'') - u_j(t, x')| \leqslant \alpha \sum_{i=1}^{n+2}|x_i'' - x_i'| \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, m \\ \alpha > 0,\ \mathrm{const}\end{pmatrix}$$

при малых x', x''.

Если при $u = 0$ невозмущенное решение $x = 0$ системы (1.4) неустойчиво, то возникает задача о стабилизации движения (1.1), т. е. задача о выборе такого управления $u(t, x)$, при подстановке которого в (1.4) нулевое решение $x = 0$ было бы асимптотически устойчивым по Ляпунову [1].

Будем предполагать, что невозмущенное движение установившееся. Таким образом, рассмотрим систему

$$dx / dt = Ax + Bu + g(x, u) \tag{1.5}$$

где x — $(n+2)$-мерный вектор возмущения; u — m-мерный вектор управления, которое будем считать невозмущенным помехами; A, B — постоянные матрицы соответствующих размеров. Предположим, что все коэффициенты уравнения (1.5) вещественны, а $g(x, u)$ — аналитическая функция по x, u, не ниже второго порядка.

2. Пусть имеет место критический случай двойного нулевого корня [2].

Рассмотрим первый случай, когда нулевой корень не обращает в нуль хотя бы один из миноров $(n+1)$-го порядка характеристического определителя исходной системы уравнений возмущенного движения, или, что то же самое, этому корню отвечает одна группа решений первого приближения этой системы.

Тогда система (1.5) при помощи невырожденного преобразования переменных, матрицу которого можно построить, следуя [1,2], принимая величины ξ, η за новые переменные и полагая $x_i = v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, приводится к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta + X(\xi, \eta, v, u), \qquad \frac{d\eta}{dt} = Y(\xi, \eta, v, u), \qquad \frac{dv}{dt} = A_0 v + B_0 u + Z(\xi, \eta, v, u) \tag{2.1}$$

Здесь ξ, η—скаляры; v—n-мерный вектор с компонентами v_s; A_0 и B_0 — постоянные матрицы порядка $n\times n$ и $n\times m$; Z — вектор-функция с компонентами Z_s; X, Y, Z_s — аналитические нелинейности по ξ, η, v, u.

Задача о стабилизации для системы уравнений (1.5) относительно переменных x_i ($i = 1, 2,\ldots, n+2$) эквивалентна той же задаче для системы (2.1) относительно переменных ξ, η, v_i ($i = 1, 2,\ldots, n$). Рассмотрим систему

$$dv / dt = A_0 v + B_0 u$$

которая удовлетворяет условию стабилизируемости, указанному в теореме 3.1 работы [2] (см. также работы [3-5]). Следовательно, в силу теоремы 3.1 существует линейное управление

$$u_0(v) = Pv \tag{2.2}$$

такое, что тривиальное решение системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$dv / dt = (A_0 + B_0 P)\, v$$

будет асимптотически устойчивым. Здесь P — некоторая $m\times n$-постоянная матрица.

Будем искать для системы (2.1) неаналитическое управление в виде

$$u^j(\xi, |\xi|, v) = u_0^{\,j}(v) + \sum_{s+k=1}^{\infty} \alpha_{sk}^{\,j}\xi^s|\xi|^k \qquad \left(\begin{matrix} j=1,2,\ldots,m\\ s\geqslant 0,\ k\geqslant 0\end{matrix}\right) \tag{2.3}$$

При $k = 0$ получается аналитическое управление. Использование неаналитического управления расширяет существенно возможности стабилизации.

В соответствии с методом Ляпунова рассмотрим систему

$$A_0 v + B_0 u + Z(\xi, \eta, v, u) = 0 \tag{2.4}$$

Если управление (2.3) подставить в (2.4), то ее функциональный определитель относительно v_i для нулевых значений ξ, η, v_i будет отличным от нуля [2] (см. также [3, 4]). Поэтому существует решение системы (2.4) в окрестности начала координат ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $v = 0$), представляемое рядами

$$v_i^{\,0} = \sum_{s+k+l=2}^{\infty} a_{skl}^{\,i}\xi^s|\xi|^k\eta^l \qquad \left(\begin{matrix} i=1,2,\ldots,n\\ s\geqslant 0,\ k\geqslant 0,\ l\geqslant 0\end{matrix}\right) \tag{2.5}$$

где коэффициенты $a_{skl}^{\,i}$ являются функциями $\alpha_{sk}^{\,j}$.

После подстановки (2.2), (2.3) в (2.1) функции $Y(\xi, |\xi|, \eta, v)$, $Z(\xi, |\xi|, \eta, v)$ правой части второго и третьего уравнений этой системы будут иметь вид

$$Y(\xi, |\xi|, \eta, 0) = Y^0(\xi, |\xi|) + \eta(Y^1)(\xi, |\xi|) + \ldots \tag{2.6}$$

$$Z(\xi, |\xi|, \eta, 0) = Z^{(0)}(\xi, |\xi|) + \eta Z^{(1)}(\xi, |\xi|) + \ldots \tag{2.7}$$

Здесь опущенные члены не заключают в себе η ниже второго измерения. Коэффициенты в разложении функций $Y^{(i)}$, $Z^{(i)}$ выражаются определенным образом через коэффициенты $\alpha_{sk}^{\,j}$.

Обозначим степени младших членов в разложении функций $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$ соответственно через p, q, p_s, q_s ($p\geqslant 2$, $q\geqslant 1$, $p_s\geqslant 2$, $q_s\geqslant 1$; $s=1,2,\ldots, n$).

Ряды (2.6), (2.7) являются функциями Y, Z в правой части системы (2.1) после преобразования Ляпунова

$$v_i = v_i^{\,\circ} + v_i^{\,*} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2.8}$$

если положить $v_i^{\,*} \equiv 0$.

При таком выборе управления (2.3) после подстановки (2.8) в систему (2.1) правые части преобразованной системы могут иметь разрывы на плоскости $\xi = 0$. Однако, принцип сводимости [8] справедлив также и в этом случае.

При помощи преобразований (2.8), не меняющих вида системы (2.1), всегда можно получить новую систему [6, 7], которая по структуре правых частей может быть отнесена к одному из следующих случаев.

(1) Если $Y^{(0)}(\xi, |\xi|) \equiv 0$, $Y^{(1)}(\xi, |\xi|) \not\equiv 0$, то $Z^{(0)}(\xi| \xi|) \equiv 0, q_s > q$ $(s = 1, \ldots n)$

(2) Если $Y^{(0)}(\xi, |\xi|) \equiv Y^{(1)}(\xi|\xi|) \equiv 0$, то $Z^{(0)}(\xi|\xi|) \equiv Z^{(1)}(\xi|\xi|) \equiv 0$

(3) Если $Y^{(0)}(\xi, |\xi|) \not\equiv 0$, то $p_s > p$; при этом $q_s > q$, если $p > q$ или $q_s \geqslant p$, если $q \geqslant p$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$

Кроме того, всегда можно предположить [6, 7], что $X(\xi, 0, 0) \equiv 0$. Рассмотрим последовательно каждый из этих случаев.

Будем следовать непосредственно известной теории устойчивости в критическом случае двойного нулевого корня [6, 7] и развитой теории о стабилизации [2]. Справедливость высказанных ниже утверждений следует из теорем Ляпунова [1] и теоремы Читаева о неустойчивости [9],для квазианалитической системы.

3. Пусть имеем случай, когда выполнены условия (1). Обозначим сумму коэффициентов при всех четных функциях в совокупности членов $Y^{(1)}(\xi, |\xi|)$ в (2.6) через b_k и аналогичную сумму при нечетных функциях через b_k^* $(k \geqslant 1)$, которые определенным образом зависят от коэффициентов α_{sk}^j. Здесь и в дальнейшем индексы коэффициентов функции $Y^{(i)}(\xi, |\xi|)$ будут обозначать и степени соответствующих членов.

Если коэффициенты α_{sk}^j в (2.3) могут быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие

$$b_q < -|b_q^*| \qquad (q = \min k \geqslant 1) \tag{3.1}$$

тогда стабилизация системы (2.1), а следовательно, и (1.5) обеспечены управлением (2.3). Невозмущенное движение системы (2.1) устойчиво, а каждое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет асимптотически приближаться к некоторому установившемуся движению $\xi = a$, $\eta = v_i = 0$.

Если условие (3.1) не выполняется, но имеет место хотя бы ослабленное условие $b_q = -|b_q^*|$, тогда следует рассмотреть $Y^{(1)}(\xi, |\xi|)$ совокупность членов следующего по порядку измерения. Таким образом, если оставшиеся коэффициенты α_{sk}^j могут быть выбраны так, что после некоторого шага $k > q$ будет выполнено условие

$$b_k < -|b_k^*| \qquad \text{или } b_k^* b_q^* < 0, \quad b_k < |b_k^*|$$

если выполнены соотношения

$$b_{q+i}^* b_q^* > 0, \; b_{q+i} = -|b_{q+i}^*| \quad \text{или} \quad b_{q+i}^* b_q^* < 0, \; b_{q+i} = |b_{q+i}^*|$$
$$(i \leqslant k - q - 1; \quad i = 0, 1, \ldots, K) \tag{3.2}$$

то стабилизация системы (2.1) обеспечена и управление (2.3) построено.

Если для любых возможных значений α_{sk}^j, коэффициенты младших членов удовлетворяют условию $b_q > 0$ или $|b_q^*| > -b_q$ при $b_q \leqslant 0$, или при некотором $k > q$ и условиях (3.2) выполнено одно из соотношений

$$b_q^* b_k^* < 0, \quad b_k > |b_k^*|; \qquad b_k^* b_q^* > 0, \quad b_k > -|b_k^*|$$

то стабилизация управлением (2.3) невозможна.

В случае (2) стабилизация системы (2.1) указанным путем не достигается.

Рассмотрим случай (3). Здесь отметим, что при некоторых утверждениях дальше будем предполагать функцию $X \equiv 0$, а функции $Z_s(\xi, |\xi|, \eta, 0)$ (2,7) —не содержащими членов сколь угодно высокого порядка. Этого можно всегда добиться некоторым преобразованием [6, 7], не меняющим вида системы (2.1). Обозначим сумму коэффициентов при всех четных функциях в совокупности членов $Y^{(0)}(\xi, |\xi|)$ через a_s и аналогичную сумму при нечетных функциях через a_s^* $(s \geqslant 2)$; эти коэффициенты являются функциями α_{sk}^j.

Если подходящим выбором $\alpha_{sk}{}^j$ можно добиться того, чтобы при

$$k < s, \quad k + s = 2\nu + 1 \tag{3.3}$$

выполнялись условия

$$a_p{}^* < -|a_p|, \quad b_q < -|b_q{}^*| \quad (p = \min s \geqslant 2, \ q = \min k \geqslant 1) \tag{3.4}$$

то стабилизация системы (2.1) обеспечена управлением (2.3).

Если условия (3.4) не выполняются, но удовлетворены хотя бы условия

$$a_p{}^* = -|a_p|, \qquad b_q = b_q{}^* < 0 \tag{3.5}$$

то следует рассмотреть совокупность членов следующего по порядку измерения. Таким образом, управление (2.3) будет построено, если после некоторого шага для $s > p$, $k > q$ и (3.3) будут выполняться условия

$$a_s{}^* < -|a_s|, \qquad a_s a_p < 0, \quad a_s{}^* < |a_s|, \qquad b_k < b_k{}^*$$

и при этом имеет место

$$b_{q+i} = b_{q+i}^* \quad (\text{при } i = 0)$$

$$a_{p+j}a_p > 0, \ a_{p+j}^* = -|a_{p+j}| \ \text{ или } \ a_{p+j}a_p < 0, \ a_{p+j}^* = |a_{p+j}| \tag{3.6}$$

для каждого

$$i \leqslant \kappa - q - 1, \quad j \leqslant s - p - 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, K_1; \ j = 0, 1, \ldots, K_2)$$

Замечание 3.1. Если из условий (3.4) не удовлетворено только одно, но выполнено соответствующее условие из (3.5), то надо искать приближения для соответствующих коэффициентов при (3.3).

Замечание 3.2. Если стабилизация системы (2.1) обеспечена при выполнении условий (3.4), то управление (2.3) достаточно взять в виде

$$u^j = u_0{}^j(v) + \alpha_{10}{}^j\xi + \alpha_{01}{}^j|\xi|$$

Стабилизация системы (2.1) управлением (2.3) будет невозможна, если при любом выборе коэффициентов $\alpha_{sk}{}^j$ окажется

$$\begin{gathered} a_p{}^* > 0; \quad |a_p| > -a_p{}^* \quad \text{при } a_p{}^* < 0 \\ a_p{}^* < -|a_p|, \quad b_q > |b_q{}^*| \quad \text{при (3.3)} \end{gathered} \tag{3.7}$$

или, если после некоторого шага $s > p$, $k > q$ и (3.3) будет иметь место хотя бы одно из неравенств

$$a_s a_p < 0, \quad a_s{}^* > |a_s|; \quad a_s a_p > 0, \quad a_s{}^* > -|a_s|$$

$$b_k > b_k{}^* \quad \text{при (3.6)}, \quad b_{q+i} = b_{q+i}{}^* \ \text{ для } i \leqslant k - q - 1 \quad (i = 0, 1, \ldots, K_1)$$

$$b_q = b_q{}^* > 0 \quad \text{при } i = 0.$$

Заметим, что если только одно из условий (3.7) не выполнено, то приближения необходимо искать по соответствующим коэффициентам. Системы (2.1) таким путем не стабилизируются также, если

$$a_p{}^* < -|a_p|, \quad b_q{}^* > |b_q| \quad \text{при } q < {}^1/{}_2(p-1) \quad \text{или}$$

$$(b_q + b_q{}^*)^2 + 4(q+1)(a_p + a_p{}^*) \geqslant 0 \quad \text{при } q = {}^1/{}_2(p-1)$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$a_p{}^* < -|a_p|, \qquad q > {}^1/{}_2(p-1)$$

$$(b_q + b_q{}^*)^2 + 4(q+1)(a_p + a_p{}^*) < 0, \qquad q = {}^1/{}_2(p-1)$$

Пусть $p = 2m - 1$ ($m \geqslant 1$ и целое). Введем в рассмотрение функции Ляпунова Cs и Sn, определяемые уравнениями [1,6,7]

$$\mathrm{Cs}^{2m}\theta + m\,\mathrm{Sn}^2\theta = 1, \qquad \mathrm{Cs}\,0 = 1, \qquad \mathrm{Sn}\,0 = 0$$

$$d\,\mathrm{Cs}\,\theta / d\theta = -\mathrm{Sn}\,\theta, \qquad d\,\mathrm{Sn}\,\theta / d\theta = \mathrm{Cs}^{2m-1}\theta$$

Будем предполагать построение таким, что преобразование (2.8) получается непрерывным. Преобразуем систему (2.1) при помощи подстановки

$$\xi = r \operatorname{Cs} \theta, \qquad \eta = -r^m \operatorname{Sn}\theta$$

Тогда, исключая из первых двух уравнений время t, получим уравнение

$$dr/d\theta = r^2 R_2(\theta) + r^3 R_3(\theta) + \ldots \quad \text{при } q > m - 1 \tag{3.8}$$

Здесь $R_k(\theta)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ — функции относительно $\operatorname{Cs}\theta$, $\operatorname{Sn}\theta$ вида Y^i в (2.6) с коэффициентами, зависящими от $\alpha_{sk}{}^j$. Решение уравнения (3.8) ищется в виде

$$r = c + c^2 u_2(\theta) + c^3 u_3(\theta) + \ldots \tag{3.9}$$

с начальным условием $r(0, c) = c$. Подставляя (3.9) в (3.8), для $u_k(\theta)$ получим

$$du_2 / d\theta = R_2(\theta) = F_2(\theta), \qquad du_3 / d\theta = R_3(\theta) + 2 R_2(\theta)\, u_2(\theta) = F_3(\theta), \ldots$$

Предположим, что среди коэффициентов $u_2, u_3, \ldots$ имеются непериодические. Пусть при этом $u_m(\theta)$ будет первым непериодическим

$$u_m = g\theta + G(\theta) \left(G(\theta) = G(\theta + 2\pi), \quad g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta)\, d\theta \neq 0 \right)$$

Тогда стабилизация системы обеспечена управлением (2.3), если коэффициенты $\alpha_{sk}{}^j$ могут быть подобраны так, чтобы выполнялось условие $g < 0$.

Если $g > 0$,то стабилизация таким путем не проходит.При выполнении условий

$$q = m - 1, \quad (b_q + b_q{}^*)^2 + 4m(a_p + a_p{}^*) < 0$$

уравнение, аналогичное уравнению (3.8), имеет вид

$$dr / d\theta = r R_1(\theta) + r^2 R_2(\theta) + r^3 R_3(\theta) + \ldots$$

где $R_k(\theta)$ $(k = 1, 2, \ldots,)$ — функции той же структуры, что и в уравнении (3.8).

В этом случае решение уравнения ищется в виде

$$r = c u_1(\theta) + c^2 u_2(\theta) + c^3 u_3(\theta) + \ldots$$

а условия стабилизации аналогичны предыдущему.

Если в (2.3) положить $k = 0$, получим аналитическое управление в виде

$$u^j = u_0{}^j(v) + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{s0}{}^j \xi^s$$

В этом случае стабилизация системы возможна, и для решения задачи можно применить известные в теории устойчивости способы исследования [6, 7].

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные советы и обсуждение результатов.

Поступила 26 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, стр. 988.
3. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. В сб.: Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем. М.,Изд-во АН СССР, 1961, стр. 521.
4. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, стр. 433—439.
5. Курцвейль Я. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 6, стр. 688—695.
6. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1963.
7. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
8. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1955.