одно от другого. Потом группируем и уравнения системы (1.1) в подсистемы так, как группировали и неизвестные. По методу п. 1 последовательно решаем каждую подсистему, принимая достигнутую точку при решении данной подсистемы в качестве исходной при решении следующей.

Процесс заканчивается, когда уточнение неизвестных станет пренебрежимо малым Сходимость этого процесса доказывается как и в предыдущем случае.

Поступила 5 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956.
2. Симеонов С. В. Некоторые методы решения нелинейных задач механики деформируемого тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Симеонов С. В. Замечания к статье «Некоторые методы решения нелинейных задач механики деформируемого тела». ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд. 2, М., Физматгиз, 1963.
6. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений.М., Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1960.

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Н. Мильштейн, Ю. М. Репин

(Свердловск)

В заметке рассматриваются объекты, поведение которых описывается решениями системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Каждое такое решение в рассматриваемом случае является диффузионным процессом. Для вторых моментов этого диффузионного процесса выводится система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая, в частности, может быть применена для исследования на устойчивость в среднеквадратичном тривиального решения соответствующей системы стохастических дифференциальных уравнений.[1]

1. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \, dt + \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\,k} x_j \Big) dw_k(t) \tag{1}$$

Здесь $w_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — независимые процессы броуновского движения.

При заданных начальных условиях уравнение (1), как известно [1-4], определяет диффузионный процесс. Стационарная марковская переходная функция $P(t, x, \Gamma)$ этого процесса определяет на банаховом пространстве B всех борелевских ограниченных функций $f(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ полугруппу линейных операторов T_t:

$$T_t f(x) = \int_X P(t, x, dy) f(y) \tag{2}$$

Все ограниченные функции $f(x)$, имеющие непрерывные ограниченные производные до второго порядка включительно, принадлежат области определения D_A инфини-

---

[1] При чтении корректуры авторам стала известна работа И. И. Гихмана [9], в которой другим способом получены уравнения для вторых моментов.

тезимального оператора A полугруппы T_t. Для таких функций имеет место формула

$$Af = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{\alpha j}{}^{k} x_j \sum_{j=1}^{n} b_{\beta j}{}^{k} x_j\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \tag{3}$$

которую можно переписать в виде

$$Af = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}{}^{\alpha\beta} x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) \tag{4}$$

где коэффициенты $a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ij}^{\beta\alpha}$ просто вычисляются по коэффициентам $b_{ij}{}^{k}$. Интеграл в правой части (2) дает математическое ожидание функции f в момент t при условии, что начальное распределение марковского процесса, определяемого переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$, сосредоточено в точке x. Этот интеграл может существовать и для неограниченных функций. Например, он сходится для функций вида $f_{ij}(x) = x_i x_j$. Во всех случаях интеграл в (2) будем обозначать через $T_t f$.

Теорема 1. Функции $T_t f_{kl}(x)$ ($k = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, n$) при каждом фиксированном x удовлетворяют следующей системе $n(n+1)/2$ линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dg_{kl}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}g_{jl} + \sum_{j=1}^{n} a_{lj}g_{jk} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}{}^{kl} g_{ij} \qquad (k \leqslant l) \tag{5}$$

причем решение системы (5), удовлетворяющее начальным данным $g_{kl}(0) = x_k x_l$, совпадает с функциями $T_t f_{kl}(x)$.

Доказательство. Если $f \in D_A$, то имеет место равенство [3]

$$dT_t f(x)/dt = AT_t f(x) = T_t A f(x) \tag{6}$$

Формальное применение этого равенства к функциям f_{kl} приводит сразу же к системе уравнений (5). Дадим строгое доказательство. Для функции $f_{kl}(x)$ построим сходящуюся к ней последовательность функций $f_{kl}{}^{N}(x) = y_k{}^{N}(x)\, y_l{}^{N}(x)$, где

$$y_i^N(x) = \begin{cases} x_i, & |x_i| \leqslant N \\ (N + 1/2)\operatorname{sign} x_i, & |x_i| \geqslant N+1 \\ 1/2(x_i - N)^4 - (x_i - N)^3 + x_i, & N < x_i < N+1 \\ -1/2(x_i + N)^4 - (x_i + N)^3 + x_i, & -N-1 < x_i < -N \end{cases} \tag{7}$$

Ясно, что $f_{kl}^{N}(x) \in D_A$ и выполняется равенство [3]

$$T_t f_{kl}{}^{N}(x) - f(x) = \int_0^t T_s A f_{kl}{}^{N}(x)\, ds \tag{8}$$

При любом фиксированном x нетрудно обосновать переход к пределу при $N \to \infty$ в равенстве (8), что приводит к уравнениям (5) и доказывает теорему.

Примечание 1. Пусть $\varphi(\Gamma)$ — финитная счетноаддитивная конечная функция борелевских множеств пространства X. Нетрудно показать, что функции

$$M_{kl}(t) = (T_t f_{kl}(x), \varphi) = \int_X\int_X P(t, x, dy) f_{kl}(y)\, \varphi(dx) \tag{9}$$

(которые определяют математическое ожидание функций $f_{kl}(x)$ в момент t при условии, что $\varphi(\Gamma)$ — начальное распределение марковского процесса с переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$) также удовлетворяют системе (5).

Примечание 2. В литературе (см., например, [5]), кроме понимания уравнений (1) в смысле Ито, встречается и другая их трактовка. Однако диффузионный процесс, получающийся при новой интерпретации уравнений (1), имеет инфинитезимальный оператор того же вида, что и (4), где изменяются известным образом [5] лишь постоянные коэффициенты линейных форм при первых производных функции f. Отсюда нетрудно видеть, что уравнения, аналогичные (5), могут быть получены и в этом случае. Другим способом эти уравнения были найдены в работе [6].

2. Тривиальное решение системы (1) называется устойчивым в среднеквадратичном (см., например, [7, 8]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \delta^2$, так $T_t f(x) < \varepsilon$ для всех $t > 0$, где $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Если, кроме только что сказанного, выполняется условие $T_t f(x) \to 0$ при $t \to \infty$, то тривиальное решение называется асимптотически устойчивым в среднеквадратичном. Исследование на устойчивость систем вида (1) проводилось в ряде работ (см. библиографию [8]). Ясно, что для того чтобы нулевое решение системы (1) было, например, асимптотически устойчивым в среднеквадратичном, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчивым и чтобы

$$\lim_{t\to\infty} T_t f_{ij}(x) = 0, \qquad \text{при } |x| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n)$$

Теорема 2. Для того чтобы тривиальное решение стохастической системы дифференциальных уравнений (1) было устойчивым (асимптотически устойчивым) в среднеквадратичном, необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым (асимптотически устойчивым) нулевое решение системы $n(n+1)/2$ линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (5).

Доказательство. Пусть тривиальное решение стохастической системы дифференциальных уравнений (1) устойчиво в среднеквадратичном, а ε и $\delta = \delta(\varepsilon)$ — числа, фигурирующие в данном выше определении устойчивости. Пусть $g_{kl}(t)$ $(k = 1,\ldots, n;$ $l = 1,\ldots, n;$ $k \leqslant l)$ решение системы (5) с начальными данными

$$g_{k_0k_0}(0) = x_{k_0}^2 \leqslant {}^1/_2\delta^2, \qquad g_{l_0l_0}(0) = x_{l_0}^2 \leqslant {}^1/_2\delta^2, \qquad g_{k_0l_0}(0) = x_{k_0}x_{l_0}, \qquad g_{kl}(0) = 0 \tag{10}$$

причем здесь $g_{kl}(0) = 0$ для остальных пар индексов k и l.

В силу теоремы 1, $g_{kl}(t) = T_t f_{kl}(x)$. Так как $x^2 = x_{k_0}^2 + x_{l_0}^2 \leqslant \delta^2$, то при $k = 1,\ldots,n;$ $l = 1,\ldots,n;$ $k \leqslant l$ и $t \wedge 0$ выполняется

$$|g_{kl}(t)| = |T_t f_{kl}(x)| \leqslant {}^1/_2(T_t f_{kk}(x) + T_t f_{ll}(x)) \leqslant {}^1/_2 T_t f(x) < {}^1/_2\varepsilon \tag{11}$$

Заметим теперь, что найдется $n(n+1)/2$ линейно независимых решений системы (5) с начальными данными вида (10). Пользуясь этим фактом, уже нетрудно доказать устойчивость тривиального решения системы (5). Обратное очевидно. Аналогичным образом доказывается теорема в случае асимптотической устойчивости.

Поступила 10 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Itô K. On stochastic differential equations. Memoirs Amer. Math. Soc., 1951, № 4. (Русск. перев.: О стохастических дифференциальных уравнениях. Математика. Сб. пер. и обз. иностр. период. лит., 1957, № 1, стр. 78—116).
2. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
5. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Изд-во Моск. ун-та, 1966.
6. Leibowitz M. A. Statistical Behavior of linear Systems with Randomly Varying Parameters. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, № 6, pp. 852—858.
7. Кац А. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, стр. 809—823.
8. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейных систем при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 404—409.
9. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «Фан», 1966.