МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

С. В. Симеонов (София, Болгария)

В работе рассматриваются системы нелинейных уравнений в случае, когда они являются условием минимума функционала, заданного в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Для решения системы применяется специальный метод спуска, который приводит к последовательному включению неизвестных. Таким образом, задача решена после включения последней неизвестной. Показано, что в случае линейной системы этот спуск приводит к вычислительной схеме метода окаймления.

Исследование большого числа физических проблем, особенно в области механики и автоматики, приводит к решению систем уравнений, представляющих условие экстремума некоторого функционала $f(x)$. Такие системы будем называть системами потенциального типа. Здесь будет изложен метод решения таких систем в случае, когда (x) задан в некоторой области G n-мерного евклидова пространства E_n.

1. Пусть задана система нелинейных уравнений

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad x = (x_1, x_2,\ldots,x_n) \in G \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что система (1.1) является условием минимума функционала $f(x)$, о котором известно, что он ограничен снизу и имеет единственную стационарную точку x^*. Очевидно,

$$f_i(x) = \partial f(x)/\partial x_i \tag{1.2}$$

При определении точки x^* условие потенциальности оператора $f_x = (f_1,\ldots,f_n)$ позволяет вместо уравнений (1.1) рассматривать функционал $f(x)$ независимо от применяемых способов исследования. Это важное свойство широко используется ([1–4] и др.) как для качественного исследования этого типа операторов, заданных в довольно общих банаховых пространствах, так и для эффективных методов их решения.

Пусть $x^{(0)} \in G$ — некоторая выбранная начальная точка. При наших условиях $f(x^{(0)}) \geqslant f(x^*)$, где равенство имеет место только, если $x^{(0)} = x^*$. Предполагая, что необходимо разработать такой план (стратегия) спуска с $f(x^{(0)})$, чтобы обязательно и быстрее достигнуть $f(x^*)$. Подобные методы ([4, 5] и др.) обычно осуществляют спуск по прямой самого крутого наклона, исходящего из $f(x^{(0)})$. Длина пути спуска по этому направлению определяется по различным критериям, которые часто приводят к процессам довольно медленно сходящимся, особенно при подходе к $f(x^*)$.

Здесь принят другой план спуска, который в случае двух переменных можно условно назвать спуском по «долинам (увраам)». Эти «увраги» отличаются от тех, которые были введены И. М. Гельфандом. Такой спуск при принятых предположениях относительно функционала $f(x)$ всегда приводит к требуемой точке $f(x^*)$.

Выполним, во-первых, спуск с $f(x^{(0)})$ по направлению x_1 до самой нижней точки $f(x^{(1)})$, где $x_i^{(1)} = x_i^{(0)}$ при $i \geqslant 2$. Очевидно, что $x_1^{(1)}$ будет решением уравнения

$$f_1(x_1;\, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = 0 \tag{1.3}$$

рассматриваемое как уравнение одной переменной x_1.

Точку $x^{(1)}$ будем рассматривать как дно какого-то «уврага». Чтобы дальше спуститься по нему, необходимо иметь еще одну точку $x^{(1)\prime}$. Ее получим также из (1.3), если дадим некоторой другой координате, например x_2, приращение Δx_2. Для этого необходимо решить уравнение

$$f_1(x_1;\, x_2^{(0)} + \Delta x_2, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \tag{1.4}$$

Корень его будет $x_1^{(1)\prime} = x_1^{(1)} + \Delta x_1$. Направление t, по которому будем осуществлять дальнейший спуск, выражается при помощи параметра t по формулам

$$x_i(t) = x_i^{(1)} + \frac{\Delta x_i}{\Delta s}\, t \quad (i = 1, 2), \qquad x_i(t) = x_i^{(1)} = x_i^{(0)} \quad (i = 1, 2) \tag{1.5}$$
$$(\Delta s = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2})$$

Можно положить также $\Delta s = 1$

Спуск по t продолжается до достижения самой низкой точки $f(x(t^*))$. Нетрудно видеть, что t^* будет решением уравнения

$$f_1(x(t))\,\Delta x_1 + f_2(x(t))\,\Delta x_2 = 0 \tag{1.6}$$

Левая часть этого уравнения выражает приращение функционала по направлению t. Спуск с $x^{(0)}$ до $x(t^*) = x^{(1,1)}$ будет называть первым подциклом.

Принимая дальше $x^{(1,1)}$ в качестве $x^{(0)}$, выполняем совершенно аналогично второй подцикл и т. д. до тех пор, пока $x^{(1,m)}$ и $x^{(1,m+1)}$ не окажутся достаточно близкими. Предельную точку обозначим через $x^{(2)}$. Ее существование следует из принятых предположений относительно функционала.

Покажем, что достигнутая точка $x^{(2)}$ будет решением системы двух уравнений

$$f_1(x_1, x_2; x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \qquad f_2(x_1, x_2; x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \tag{1.7}$$

В самом деле, чтобы $x^{(2)}$ была решением системы (1.7), она должна удовлетворять условию $\Delta f = 0$, т. е. условию (1.6) при любых достаточно малых Δx_1 и Δx_2. Но именно это условие осуществляется описанной выше вычислительной процедурой.

Поскольку Δx_2 — подобранная достаточно малая величина, то, если $f_1(x)$ допускает частные производные по x_1 и x_2, (1.4) можно записать в виде

$$a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad \Delta x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta x_2 \tag{1.8}$$

Здесь

$$a_{11} = a_{11}(x^{(1)}) = \left.\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}\right|_{x=x^{(1)}}, \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x=x^{(1)}} \tag{1.9}$$

Эти коэффициенты можно определить и при помощи численного дифференцирования, что особенно удобно при применении вычислительных машин.

Решение уравнений типа (1.6) рассмотрим ниже.

Продолжим теперь начатый процесс следующим образом. Дадим достигнутой точке $x^{(2)}$ малое приращение Δx_3 и снова решим систему (1.7)

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2; x_3^{(0)} + \Delta x_3, x_4^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2; x_3^{(0)} + \Delta x_3, x_4^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \end{gathered} \tag{1.10}$$

Отсюда получим $x_1^{(2)'}$ и $x_2^{(2)'}$, при помощи которых вычисляем $\Delta x_1 = x_1^{(2)'} - x_1^{(2)}$, $\Delta x_2 = x_2^{(2)'} - x_2^{(2)}$. Эти значения вместе с принятым Δx_3 определяют новое направление спуска t. Это направление имеет следующие текущие координаты:

$$\begin{gathered} x_i(t) = x_i^{(2)} + \frac{\Delta x_i}{\Delta s}\,t \quad (i = 1, 2, 3), \quad x_i(t) = x_i^{(2)} = x_i^{(0)} \quad (i > 3) \\ \Delta s = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2} \end{gathered} \tag{1.11}$$

Значение параметра t, при котором функционал $f(x)$ достигает наименьшего значения на t, определяется как корень уравнения

$$f_1(x(t))\,\Delta x_1 + f_2(x(t))\,\Delta x_2 + f_3(x(t))\,\Delta x_3 = 0 \tag{1.12}$$

где $x(t)$ выражается через (1.11). Как и выше, это есть первый подцикл, который повторяется до получения с необходимой точностью точки $x^{(3)}$. И здесь при принятом малом Δx_3 можно вычислить Δx_1 и Δx_2 из линейной системы

$$\begin{aligned} a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2 &= -a_{13}\Delta x_3 \\ a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2 &= -a_{23}\Delta x_3 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} = \left.\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x^{(2)}} \tag{1.14}$$

Предполагается, что функции f_i дифференцируемы.

Точка $x^{(3)}$ уже является решением системы из трех уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, x_3; x_4^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \\ &f_2(x_1, x_2, x_3; x_4^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \\ &f_3(x_1, x_2, x_3; x_4^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Включение новой неизвестной будем называть циклом. Продолжая описанным способом включать новые неизвестные, достигаем k-го цикла, в котором решается следующее нелинейное уравнение:

$$f_1(x(t))\Delta x_1 + f_2(x(t))\Delta x_2 + \ldots + f_k(x(t))\,\Delta x_k = 0 \tag{1.16}$$

где Δx_k задается, как и раньше, а $x(t)$ в этом подцикле определяется по формулам

$$x_i(t) = x_i^{(k-1,\, s-1)} + \frac{\Delta x_i}{\Delta s}\, t \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.17}$$

$$x_i(t) = x_i^{(k-1,\, s-1)} = x_i^{(0)} \qquad (i > k), \qquad \Delta s = \Big(\sum_{j=1}^{k} (\Delta x_j)^2\Big)^{1/2}$$

Здесь $\Delta x_i = x_i^{(k-1,s)} - x_i^{(k-1,s-1)}$ $(i < k)$, где $x_i^{(k-1,s)}$ — решения системы

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}; x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}; x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Как и раньше, Δx можно вычислить из линейной системы

$$\begin{aligned} &a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2 + \ldots + a_{1,\,k-1}\Delta x_{k-1} = -a_{1k}\Delta x_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{k-1,\,1}\Delta x_1 + a_{k-1,\,2}\Delta x_2 + \ldots + a_{k-1,\,k-1}\Delta x_{k-1} = -a_{k-1,\,k}\Delta x_k \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(k-1,\, s-1)}} \tag{1.20}$$

Если расчет выполняется достаточно точно, n-й цикл приводит к требуемому решению. Если же допущена вычислительная ошибка так, что $x^{(n)}$ не удовлетворяет достаточно точно систему (1.1), или же наступило возмущение функционала $f(x)$, принимаем $x^{(n)}$ в качестве $x^{(0)}$ и повторяем вычисление.

Из изложенного видно, что принятый план спуска привел к методу, который можно назвать методом последовательного включения неизвестных.

Отметим, что описанный план спуска можно реализовать и в случае, когда известен сам функционал $f(x)$, а неизвестна система (1.1).

2. Изложенный метод требует многократного решения нелинейных уравнений одной переменной вида

$$y(t) \equiv f_1(x(t))\,\Delta x_1 + f_2(x(t))\,\Delta x_2 + \ldots + f_k(x(t))\,\Delta x_k = 0 \tag{2.1}$$

$$x_i(t) = x_i' + a_i t \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Предположим, что, как обычно в механике [2, 3], функционал $f(x)$ выпуклый в G, и удовлетворяет условию $d^2 f(x) > \gamma^2 (dx)^2$. Покажем, что при этом условии $y(t)$ всегда монотонно возрастающая функция, что позволяет предложить удобные способы решения, которые всегда приводят к точному решению уравнения (2.1).

Составим дифференциал функции (2.1)

$$dy = \Big[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} f_{ij}(x(t))\,\Delta x_i \Delta x_j\Big] \frac{1}{\Delta s}\, dt \tag{2.2}$$

Из условий выпуклости следует, что выражение в средней скобке при любом значении $x \in G$ будет положительно определенной квадратичной формой, и следовательно, $dy > \gamma^2 dt$, что и требовалось доказать. Существование единственного решения следует из существования $\gamma^2 > 0$.

К решению уравнений (2.1) удобно применить метод секущих [6] в комбинации с методом regula falsi. Выберем начальное приближение t_0, например, $t_0 = 0$ и вычислим $y_0 = y(t_0)$. Дадим переменной t некоторое приращение $\Delta t > 0$. В результате получим $t_1 = t_0 + \Delta t$. Вычислив $y_1 = y(t_1)$, все остальные приближения находим по рекуррентной формуле

$$t_{i+1} = t_i - y_i \frac{t_i - t_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \tag{2.3}$$

Этот процесс сходится всегда, если функция $y(t)$ не имеет точки перегиба. Нетрудно видеть, что в этом случае все y_i сохраняют один и тот же знак. Если это условие не выполнено, возможно, что процесс расходится. Чтобы сделать процесс всегда сходящимся, поступим так. Пусть y_{k+1} получает знак обратный по сравнению с y_k. Тогда, обозначив точное решение через $t^* \in (t_k, t_{k+1})$, дальнейшее вычисление проводим методом regula falsi. Для этого формулу (2.3) записываем в виде

$$t_{i+1} = t_i - y_i \frac{t_i - t_k}{y_i - y_k} \tag{2.4}$$

Если произойдут новые перемены знака, каждый раз заменяем t_k и y_k теми последними значениями, после которых наступает перемена знака.

При переходе из t_i к t_{i+1} необходимо проверять выполнение условия $x(t) \in G$. Если оно нарушено, вместо t_{i+1} принимается t_{i+1}', так, чтобы $t_i < t_{i+1}' < t_{i+1}$, $x(t'_{i+1}) \in G$.

3. Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим случай квадратичного функционала, когда система (1.1) линейная. В этом случае уравнения типа (1.16) также линейные и решаются элементарно. Поэтому нет необходимости составлять подциклы. Это означает, что дно уврага идет по прямой линии. Записав систему (1.1) в виде

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

и приняв $x^{(0)} = 0$, из первого уравнения получаем

$$x_1^{(1)} = \beta_{11}^{(1)} b_1 \qquad (\beta_{11}^{(1)} = -1/a_{11})$$

Дальше, имея в виду линейности задачи, положив $\Delta x_2 = 1$, из (1.8), получим

$$\Delta x_1^{(2)} = \beta_{11}^{(1)} a_{12}$$

Тогда, имея в виду (1.8), из (1.6) и (1.5), находим

$$x_2^{(2)} = \beta_{21}^{(2)} b_1 + \beta_{22}^{(2)} b_2, \quad x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \Delta x_1^{(1)} x_2^{(2)}$$

$$(\beta_{22}^{(2)} = -1 / (a_{12}\Delta x_1^{(2)} + a_{22}), \ \beta_{21}^{(2)} = \Delta x_1^{(2)} \beta_{22}^{(2)})$$

Полученные $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ представляют собой точные решения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 = 0$$

Предположим теперь, что получили решение $x^{(k-1)}$ подсистемы

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,\,k-1}x_{k-1} + b_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1,\,1}x_1 + a_{k-1,\,2}x_2 + \ldots a_{k-1,\,k-1}x_{k-1} + b_{k-1} = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

После этого, положив $\Delta x_k^{(k)} = 1$, находим $\Delta x_i^{(k)}$ из системы (1.20)

$$\begin{gathered} a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2 + \ldots + a_{1,\,k-1}\Delta x_{k-1} + a_{1k} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1,\,1}\Delta x_1 + a_{k-1,\,2}\Delta x_2 + \ldots + a_{k-1,\,k-1}\Delta x_{k-1} + a_{k-1,\,k} = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Отметим, что системы (3.2) и (3.3) имеют одну и ту же обратную матрицу A_{k-1}^{-1}. Составив уравнение (1.17) и имея в виду (3.3), нетрудно получить

$$x_k^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{kj}^{(k)} b_j, \quad \beta_{kj}^{(k)} = -\frac{\Delta x_j^{(k)}}{\alpha^k}, \quad \alpha_k = \sum_{j=1}^{k} a_{jk} \Delta x_j \tag{3.4}$$

Очевидно $\beta_{kj}^{(k)}$ являются элементами матрицы A_k^{-1}. Для определения остальных $\beta_{ij}^{(k)}$, исключив из (1.17) $t/\Delta s$, получим

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \Delta x_i^{(k)} x_k^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}^{(k)} b_j, \quad \beta_{ij}^{(k)} = \beta_{ij}^{(k-1)} + \Delta x_i^{(k)} \beta_{kj}^{(k)}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{3.5}$$

Вычисление $\Delta x_i^{(k+1)}$ осуществляется при помощи той же обратной матрицы A_k^{-1}

$$\Delta x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}^{(k)} a_{j,k+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad \Delta x_{k+1}^{(k+1)} = 1 \tag{3.6}$$

При $k = n$ получаем требуемое решение x^* системы (3.1).

Полученный вычислительный процесс, как и следовало ожидать, соответствует известному методу окаймления [7]. Здесь, однако, пришли к нему по совершенно иному пути, вследствие чего вычисляемые промежуточные величины имеют другой смысл.

4. На базе изложенного метода есть возможность строить различные варианты, позволяющие вносить одни или другие упрощения в вычислительную схему. Это будут разные процессы последовательных приближений, число циклов в которых теперь возрастет и будет зависеть от требуемой точности. Здесь рассмотрим два таких варианта.

Примем, во-первых, следующий план спуска. Сначала выполним спуск по x_1 и x_2, как это было сделано в п. 1. После этого, приняв достигнутую точку $x^{(2)}$ как исходной, осуществим такой же спуск по x_2 и x_3. Дальше, выбирая последовательно разные пары координат, в которых принимают участие все координаты, выполняем тот же спуск до тех пор, пока по всем парам не получим пренебрежимо малые поправки. Пары координат лучше выбирать так, чтобы в одной паре участвовали такие координаты, которые наисущественно зависят одна от другой. Сходимость изложенного процесса следует непосредственно из теоремы 2 работы [2, 3], но ее можно доказать и так, как было сделано в п. 1. Вычислительная схема этого процесса выражается в следующем.

Предположим, что, спускаясь по x_i и x_j, достигли точки $x^{(\nu)}$. Выбираем новую пару, содержащую и одну из предыдущих координат, например, x_i, x_k. Тогда, выбрав Δx_k, как в п. 1, аналогично (1.8), находим

$$\Delta x_i = -\frac{f_{ik}(x^{(\nu)})}{f_{ii}(x^{(\nu)})} \Delta x_k$$

и решаем уравнение

$$f_i(x(t)) \Delta x_i + f_k(x(t)) \Delta x_k = 0$$

Здесь

$$x_i(t) = x_i^{(\nu)} + \Delta x_i t, \quad x_k(t) = x_k^{(\nu)} + \Delta x_k t, \quad x_j(t) = x_j^{(\nu)} \quad (j \neq i, k)$$

Так получаем точку $x^{(\nu+1)}$. Потом выбираем новую пару координат и т. д. Изложенная процедура избавляет от необходимости многократно решать нарастающие системы линейных уравнений типа (1.19), но может привести к уменьшению быстроты сходимости.

Предположим теперь, что неизвестные можно разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе участвовали те неизвестные, которые больше всего зависели бы одно от другого. Потом группируем и уравнения системы (1.1) в подсистемы так, как группировали и неизвестные. По методу п. 1 последовательно решаем каждую подсистему, принимая достигнутую точку при решении данной подсистемы в качестве исходной при решении следующей.

Процесс заканчивается, когда уточнение неизвестных станет пренебрежимо малым Сходимость этого процесса доказывается как и в предыдущем случае.

Поступила 5 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956.
2. Симеонов С. В. Некоторые методы решения нелинейных задач механики деформируемого тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Симеонов С. В. Замечания к статье «Некоторые методы решения нелинейных задач механики деформируемого тела». ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд. 2, М., Физматгиз, 1963.
6. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1960.

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Н. Мильштейн, Ю. М. Репин

(Свердловск)

В заметке рассматриваются объекты, поведение которых описывается решениями системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Каждое такое решение в рассматриваемом случае является диффузионным процессом. Для вторых моментов этого диффузионного процесса выводится система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая, в частности, может быть применена для исследования на устойчивость в среднеквадратичном тривиального решения соответствующей системы стохастических дифференциальных уравнений.[1]

1. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,dt + \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\,k}x_j\Big)\,dw_k(t) \qquad (1)$$

Здесь $w_k(t)$ $(k = 1,\ldots, m)$ — независимые процессы броуновского движения.

При заданных начальных условиях уравнение (1), как известно [1–4], определяет диффузионный процесс. Стационарная марковская переходная функция $P(t, x, \Gamma)$ этого процесса определяет на банаховом пространстве B всех борелевских ограниченных функций $f(x)$ $(x = (x_1,\ldots, x_n))$ полугруппу линейных операторов T_t:

$$T_tf(x) = \int\limits_X P(t, x, dy)\,f(y) \qquad (2)$$

Все ограниченные функции $f(x)$, имеющие непрерывные ограниченные производные до второго порядка включительно, принадлежат области определения D_A инфини-

---
[1] При чтении корректуры авторам стала известна работа И. И. Гихмана [9], в которой другим способом получены уравнения для вторых моментов.