СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Э. Н. Кузнецов (Москва)

Приводится вывод соотношений, связывающих дифференциальные операторы теории упругости ввиду их потенциальности. Для нелинейных систем с конечным числом степеней свободы соответствующие зависимости, по-видимому, впервые были получены в 1952 г. А. Р. Ржаницыным, который одновременно указал на возможность их обобщения на случай континуальных систем. Отправным пунктом данной статьи служит установленный И. И. Гольденблатом [1] факт существования полной системы потенциалов теории упругости и пластичности.

1. В работе [1] для консервативных дискретных систем с p степенями свободы доказано существование и дан способ построения функций U_l таких, что

$$-\partial U_l/\partial T_i = L_i(T_1,\ldots T_l, V_{l+1},\ldots V_p) = V_i \qquad (i = 1, 2,\ldots l)$$

$$\partial U_l/\partial V_m = L_m(T_1,\ldots T_l, V_{l+1},\ldots V_p) = T_m \qquad (m = l+1, l+2,\ldots p) \qquad (1.1)$$

Здесь T_i — обобщенные внутренние силы, V_m — обобщенные перемещения, L_k — алгебраические операторы, образующие систему уравнений рассматриваемой задачи; помимо искомых величин T_i и V_m, в эти уравнения входят в качестве параметров геометрические и упругие характеристики, а также обобщенные внешние силы.

Совокупность всевозможных функций U_l, обладающих указанным свойством, образует полную систему потенциалов упругой системы.

2. В случае континуальной механической системы потенциал U_l превращается в функционал, зависящий не только от обобщенных сил и перемещений, но и от их производных по координатам. Для уяснения существа дела достаточно рассмотреть следующий простейший функционал в двумерной области Ω:

$$U_* = \int_\Omega L(T,V)\,d\Omega = \int_\Omega F(T,V,T_x,T_y,V_x,V_y)\,dx\,dy \qquad \left(T_x = \frac{\partial T}{\partial x},\ldots\right) \qquad (2.1)$$

Здесь $T \in M$, $V \in N$, где M и N — множества таких функций из гильбертова пространства $L_2(\Omega)$, которые имеют в замкнутой области Ω непрерывные первые производные и суммируемые с квадратом вторые производные, а также удовлетворяют граничным условиям на контуре S области Ω. Множество пар (T, V), которые будем рассматривать как элементы прямого произведения пространства $L_2(\Omega)$ на себя, составляют область $D(L)$ определения оператора L и функционала U. Функция F предполагается непрерывной вместе со своими первыми и вторыми частными производными по всем аргументам.

Вычислим в соответствии с (1.1) частные вариации функционала U при произвольных фиксированных $T, V \in D(L)$:

$$\delta_T U = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial T}\,t\,d\Omega = \int_\Omega (F_T t + F_{T_x} t_x + F_{T_y} t_y)\,dx\,dy = \qquad (2.2)$$

$$= \int_S (F_{T_x}dy - F_{T_y}dx)\,t + \int_\Omega \left(F_T - \frac{\partial}{\partial x}F_{T_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{T_y}\right) t\,dx\,dy = \int_\Omega V^0 t\,dx\,dy$$

$$\delta_V U = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial V}\,v\,d\Omega = \int_\Omega (F_V v + F_{V_x} v_x + F_{V_y} v_y)\,dx\,dy = \qquad (2.3)$$

$$= \int_S (F_{V_x}dy - F_{V_y}dx)\,v + \int_\Omega \left(F_V - \frac{\partial}{\partial x}F_{V_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{V_y}\right) v\,dx\,dy = \int_\Omega T^0 v\,dx\,dy$$

Здесь производные $\partial L/\partial T$ и $\partial L/\partial V$ представляют собой линейные операторы над $t \in M$ и $v \in N$ в точке (T, V).

В результате преобразования Лагранжа каждая из вариаций приобретает вид суммы контурного интеграла и интеграла по области; подынтегральные выражения интегралов по области представляют собой левые части дифференциальных уравнений данной задачи, а из условия обращения в нуль контурных интегралов вытекают ее естественные граничные условия. Согласно (1.1), система дифференциальных уравнений задачи может быть представлена в виде

$$L_1(T, V) = -\left(F_T - \frac{\partial}{\partial x} F_{T_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{T_y}\right) = V^0, \; L_2(T, V) = F_V - \frac{\partial}{\partial x} F_{V_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{V_y} = T^0 \tag{2.4}$$

3. Умножим левую часть первого из уравнений (2.4) на t и проинтегрируем по области Ω; далее с учетом граничных условий проведем преобразование, обратное преобразованию Лагранжа (2.2), и выпишем полученное подынтегральное выражение. Обозначая произведенную операцию знаком * при соответствующем операторе, имеем, очевидно

$$L_1{}^*t = -(F_T t + F_{T_x} t_x + F_{T_y} t_y) \equiv -\frac{\partial L}{\partial T} t \tag{3.1}$$

Подвергнем теперь аналогичной операции (умножению на v с последующим преобразованием) второе из уравнений (2.4)

$$L_2{}^*v = F_V v + F_{V_x} v_x + F_{V_y} v_y \equiv \frac{\partial L}{\partial V} v \tag{3.2}$$

В соответствии с принятым выше предположением относительно функции F из (2.1) при всех $(T, V) \in D(L)$ оператор L будет иметь непрерывный по совокупности (T, V) второй дифференциал и [2]

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T\,\partial V} tv = \frac{\partial^2 L}{\partial V\,\partial T} vt \tag{3.3}$$

С учетом этого равенства получаем из (3.1) и (3.2)

$$\frac{\partial L_1{}^*}{\partial V} tv = -\frac{\partial L_2{}^*}{\partial T} vt \tag{3.4}$$

Теперь уже не составляет труда по аналогии записать на основании (1.1) соотношения подобного типа для континуальной системы с искомыми l обобщенными силами T_i и $(p - l)$ обобщенными перемещениями V_m. Отличие от предыдущего заключается лишь в том, что: 1) элемент $(T_1, \ldots T_l, V_{l+1}, \ldots V_p)$ области определения функционала U_l есть элемент произведения p гильбертовых пространств; 2) функции $T_1, \ldots$ $\ldots, V_p$ должны иметь в замкнутой области Ω производные такого порядка, какой требуется по смыслу рассматриваемой задачи; 3) область Ω не обязательно должна быть двумерной.

Считая, как и прежде, что подынтегральный оператор функционала U_l дважды непрерывно дифференцируем, получаем

$$\frac{\partial L_i{}^*}{\partial T_j} t_i t_j = \frac{\partial L_j{}^*}{\partial T_i} t_j t_i, \qquad \frac{\partial L_m{}^*}{\partial V_n} v_m v_n = \frac{\partial L_n{}^*}{\partial V_m} v_n v_m, \qquad \frac{\partial L_i{}^*}{\partial V_m} t_i v_m = -\frac{\partial L_m{}^*}{\partial T_i} v_m t_i \tag{3.5}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots l; \; m, n = l + 1, \; l + 2, \ldots p)$$

Таковы искомые соотношения между операторами для любой консервативной механической системы. Они могут служить для проверки уравнений, получаемых из рассмотрения статической, геометрической и физической стороны задачи.

Для дискретных систем дифференциальные операторы переходят в алгебраические, и вместо (3.5) будем иметь

$$\frac{\partial L_i}{\partial T_j} = \frac{\partial L_j}{\partial T_i}, \qquad \frac{\partial L_m}{\partial V_n} = \frac{\partial L_n}{\partial V_m}, \qquad \frac{\partial L_i}{\partial V_m} = -\frac{\partial L_m}{\partial T_i} \tag{3.6}$$

Если дискретная система линейна, то равенства (3.6), как нетрудно видеть, переходят в хорошо известные соотношения между коэффициентами метода сил, метода перемещений и смешанного метода строительной механики

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \; r_{mn} = r_{nm}, \qquad r_{im} = -\delta_{mi} \tag{3.7}$$

Таким образом, формулы (3.7) имеют ту же природу, что и обобщающие их зависимости (3.5), поэтому последние также следует считать соотношениями взаимности.

4. В качестве примера применим найденные соотношения к системе уравнений Кармана для гибкой пластинки

$$L_1(\Phi, W) = \frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi + W_{xx}W_{yy} - W_{xy}{}^2 = 0 \tag{4.1}$$

$$L_2(\Phi, W) = D\nabla^4 W - \Phi_{xx}W_{yy} - \Phi_{yy}W_{xx} + 2\Phi_{xy}W_{xy} = q$$

Умножив первое уравнение на φ, а второе на w, после двукратного интегрирования по частям с учетом граничных условий получим

$$L_1{}^*\varphi = \frac{1}{Eh}\varphi\nabla^4\Phi - \frac{1}{2}(W_x{}^2\varphi_{yy} + W_y{}^2\varphi_{xx}) + W_xW_y\varphi_{xy} \tag{4.2}$$

$$L_2{}^*w = \Phi_{xx}W_yw_y + \Phi_{yy}W_xw_x - \Phi_{xy}(W_xw_y + W_yw_x) + D\nabla^4 Ww \tag{4.3}$$

При вычислении (4.3) учтены условия равновесия в тангенциальном направлении. Последующее дифференцирование найденных выражений дает

$$\frac{\partial L_1{}^*}{\partial W}\varphi w = -W_xw_x\varphi_{yy} - W_yw_y\varphi_{xx} + (W_xw_y + W_yw_x)\varphi_{xy} = -\frac{\partial L_2{}^*}{\partial \Phi}w\varphi \tag{4.4}$$

Как видно из приведенного примера, использование соотношений взаимности (3.5) не предполагает, вообще говоря, знания соответствующих потенциалов.

Как известно, при использовании вариационных методов Ритца или Бубнова — Галеркина континуальная система оказывается в расчетной схеме системой с конечным числом степеней свободы. Поэтому получающиеся алгебраические уравнения должны подчиняться соотношениям (3.6). При применении методов Канторовича и Власова дифференциальные уравнения, полученные после понижения числа независимых переменных, так же, как исходные уравнения, должны удовлетворять соотношениям (3.5).

Поступила 14 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы теории упруго-пластических деформаций. В сб. «Исследования прочности, пластичности и ползучести строительных материалов», Госстройиздат, 1955.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.