Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О ВЫЧИСЛЕНИИ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

В. А. Бородин

(Москва)

При решении некоторых задач механики (устойчивость течений жидкости, распад струй жидкости и др.) выгодно было бы иметь для нулей алгебраических полиномов и целых трансцендентных функций аналитические выражения. Получить их можно, разложив нули заданной функции в степенные ряды по ее параметрам.

Этой задаче посвящена значительная литература (см., например, [1-12]), но в большинстве работ она либо не доводится до возможности применения, либо решена для функций частного вида. В работе [1] Л. К. Лахтина получены выражения нулей алгебраических полиномов в гипергеометрических функциях. В более современной работе [2] Белардинелли дан исчерпывающий обзор исследований подобного рода и приведены результаты автора, не доведенные, к сожалению, как и в работе [1], до возможности удобного применения для функций достаточно общего вида.

В настоящей работе делается попытка получить элементарными средствами разложения нулей целых функций (в том числе алгебраических полиномов произвольной степени), пригодные для приложений, и даются примеры применения полученных рядов к некоторым проблемам механики и другим вычислительным задачам.

1. Пусть

$$f(z) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + \ldots \qquad (1.1)$$

где $u = z - \xi$ есть целая функция комплексного переменного z, разложенная в ряд в точке ξ, лежащей в окрестности одного из нулей функции $f(z)$. По определению целой функции ряд (1.1) сходится для любых конечных z и ξ.

Известно (Гурвитц [13]), что если $f_1(z), f_2(z), \ldots$ — последовательность функций, аналитических в некоторой области D, ограниченной простым замкнутым контуром и, если $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в D, а $f(z)$ не равна тождественно нулю, то точка z_0, лежащая внутри D, в том и только в том случае есть нуль функции $f(z)$, если она является предельной для множества нулей функции $f_n(z)$.

Следовательно, если $f(z)$ — целая функция и, представляющий ее ряд (1.1) сходится в любой конечной точке плоскости, то последовательности нулей частичных сумм разложения (1.1) сходятся к нулям функции $f(z)$.

Будем представлять нуль функции $f(z)$ при помощи разложения

$$u = a_0 + a_1 p_0 + a_2 p_0^2 + \ldots \qquad (1.2)$$

по степеням свободного члена ряда (1.1). Введем обозначения

$$u^s = (a_0 + a_1 p_0 + a_2 p_0^2 + \ldots)^s = c_{s0} + c_{s1} p_0 + c_{s2} p_0^2 + \ldots \qquad (1.3)$$

Здесь [14]

$$c_{s0}=a_0^s,\qquad c_{sm}=\frac{1}{ma_0}\sum_{i=1}^{m}(si+i-m)\,a_ic_{s\,m-i}\quad \text{при } m\geqslant 1 \tag{1.4}$$

Можно легко показать, что (1.5)

$$c_{sm}=\sum\frac{s(s-1)\ldots[s-(\alpha_i+\alpha_j+\ldots+\alpha_k)+1]}{\alpha_i!\,\alpha_j!\ldots\alpha_k!}\,a_0^{s-(\alpha_i+\alpha_j+\ldots+\alpha_k)}\,a_i^{\alpha_i}a_j^{\alpha_j}\ldots a_k^{\alpha_k}$$

Здесь суммирование ведется по всем возможным разбиениям m на равные или неравные натуральные слагаемые

$$i\alpha_i+j\alpha_j+\ldots+k\alpha_k=m \tag{1.6}$$

Подставив (1.2) в (1.1) и учитывая (1.3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k\sum_{i=0}^{\infty}c_{k,i}p_0^{\,i}=0 \tag{1.7}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях p_0 в (1.7), получим систему уравнений для вычисления коэффициентов a_k

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_ka_0^k=0,\qquad 1+\sum_{k=0}^{\infty}p_kc_{k1}=0 \tag{1.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_kc_{kt}=0\qquad (t=2,3,\ldots) \tag{1.9}$$

Первое из уравнений (1.8) имеет один нулевой корень $a_0=0$. Вычислим коэффициенты ряда (1.2), соответствующие этому корню.

При $a_0=0$ формула (1.5) будет иметь вид

$$c_{t,k}^{\circ}=\sum\frac{t!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_p!}\,a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_p^{\alpha_p} \tag{1.10}$$

$$1\cdot\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots+p\alpha_p=k,\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_p=t$$

$$c_{0,k}^{\circ}=0,\qquad c_{t,k}^{\circ}=0\quad \text{при}\quad t>k \tag{1.11}$$

Приняв во внимание (1.10) для $a_0=0$, вместо уравнений (1.8), (1.9), получим для определения коэффициентов ряда (1.2) систему уравнений

$$a_0=0,\qquad 1+p_1a_1=0\qquad p_1a_s+\sum_{k=2}^{s}p_kc_{k,s}^{\circ}=0\qquad (s=2,3,\ldots) \tag{1.12}$$

Определяя из (1.12) коэффициенты a_k, получим

$$a_0=0,\quad a_1=-\frac{1}{p_1},\quad a_k=\frac{1}{p_1^{2k-1}}\sum A_kp_r^{\alpha_r}p_s^{\alpha_s}\ldots p_q^{\alpha_q}\qquad (k=2,3,\ldots) \tag{1.13}$$

где

$$A_k=(-1)^{\alpha_r+1}\frac{[2(k-1)-\alpha_r]!}{\alpha_r!\,\alpha_s!\ldots k!}\quad \text{при}\quad r=1$$

$$A_k=-\frac{(2k-2)!}{\alpha_r!\,\alpha_s!\ldots\alpha_q!\,k!}\quad \text{при}\quad r\neq 1 \tag{1.14}$$

Суммирование в (1.13) ведется по всем возможным разбиениям натурального числа

$$2(k-1) = r\alpha_r + s\alpha_s + \ldots + q\alpha_q \tag{1.15}$$

на равные или неравные натуральные слагаемые, при условии

$$\alpha_r + \alpha_s + \ldots + \alpha_q = k-1 \tag{1.16}$$

Ряд, подобный (1.2) с коэффициентами (1.13), был получен Хигманом [8] (приведен в работе Баженова [5]) для вещественного корня алгебраического уравнения. Положив

$$\frac{p_k}{p_1} = q_k, \quad q_0 q_2 = \eta \tag{1.17}$$

после подстановки (1.17) в (1.2) и некоторых преобразований, получим

$$u = -q_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(2t)!}{t!\,(t+1)!}\eta^t + \tag{1.18}$$

$$+ \sum (-1)^{\alpha_1+1} q_0{}^{m+1} 1^{\alpha_1} q_s{}^{\alpha_s} \ldots q_p{}^{\alpha_p} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(2t+2m-\alpha_1)!}{\alpha_s! \ldots \alpha_p!\, t!\,(t+m+1)!}\eta^t$$

где суммирование во второй сумме ведется по всем разбиениям последовательных четных натуральных чисел $2m$, начиная с числа 4, на m всевозможных натуральных слагаемых, кроме слагаемого 2,

$$2m = \alpha_1 + s\alpha_s + \ldots + p\alpha_p, \quad \alpha_1 + \alpha_s + \ldots + \alpha_p = m \tag{1.19}$$

Для внутренних сумм в (1.18) введем следующие обозначения:

$$\sigma_{2k,\,n}(\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(2t+2k)!}{t!\,(t+n)!}\eta^t, \quad \sigma_{2k+1,\,n}(\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(2t+2k+1)!}{t!\,(t+n)!}\eta^t \tag{1.20}$$

и, используя их, развернем уравнение (1.18) для применений

$$u = -q_0\sigma_{01} + q_0{}^3 q_3 \sigma_{3,3} - q_0{}^4 q_4 \sigma_{44} - \frac{1}{2} q_0{}^5 q_3{}^2 \sigma_{6\,5} + q_0{}^5 q_5 \sigma_{5\,5} +$$

$$+ q_0{}^6 q_3 q_4 \sigma_{7\,6} - q_0{}^6 q_6 \sigma_{6\,6} + \frac{1}{6} q_0{}^7 q_3{}^3 \sigma_{97} - \ldots \tag{1.21}$$

2. Ряды (1.20) выражаются через гипергеометрические функции. Легко видеть, что (2.1)

$$\sigma_{2k,\,n}(\eta) = \frac{(2k)!}{n!} F\left(k+1,\ k+\frac{1}{2};\ n+1;\ 4\eta\right) \quad \left(F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\, n!} z^n\right)$$

$$\sigma_{2k+1,\,n}(\eta) = \frac{(2k+1)!}{n!} F\left(k+1,\ k+\frac{3}{2};\ n+1;\ 4\eta\right) \tag{2.2}$$

Здесь F — гипергеометрическая функция Гаусса, причем для любых значений k и n, которые могут встретиться во внутренних суммах в (1.18), гипергеометрические ряды обрываются и выражаются в алгебраических функциях.

Воспользовавшись формулами преобразования ([14], стр. 1057), получим

$$\sigma_{2k,\,n}(\eta)=\frac{(2k)!}{n!}\left\{\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n-2k-{}^1\!/_2)}{\Gamma(n-k)\,\Gamma(n-k+{}^1\!/_2)(4\eta)^{k+1}}\times\right.$$

$$\times F\left(k+1,\ k-n+1;\ 2k-n+{}^3\!/_2;\ \frac{4\eta-1}{4\eta}\right)+ \tag{2.3}$$

$$\left.+\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2k-n+{}^1\!/_2)(1-4\eta)^{n-2k-{}^1\!/_2}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+{}^1\!/_2)(4\eta)^n}F\left(-k,\ -k+\frac{1}{2};\ n-2k+\frac{1}{2};\ 1-4\eta\right)\right\}$$

$$\sigma_{2k+1,\,n}(\eta)=\frac{(2k+1)!}{n!}\left\{\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n-2k-{}^3\!/_2)}{\Gamma(n-k)\,\Gamma(n-k-{}^1\!/_2)(4\eta)^{k+1}}\times\right. \tag{2.4}$$

$$\times F\left(k+1,\ k-n+1;\ 2k-n+\frac{5}{2};\ \frac{4\eta-1}{4\eta}\right)+$$

$$\left.+\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2k-n+{}^3\!/_2)(1-4\eta)^{n-2k-{}^3\!/_2}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+{}^3\!/_2)(4\eta)^n}F\left(-k,\ -k-\frac{1}{2};\ n-2k-\frac{1}{2};\ 1-4\eta\right)\right\}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а все гипергеометрические функции выражаются в конечном виде. Далее приведены вычисленные по формулам (2.3) и (2.4) конечные выражения для рядов $\sigma_{k,s}$, стоящих в начальных членах разложения (1.21)

$$\sigma_{01}=\frac{1}{2\eta}-\frac{(1-4\eta)^{1/2}}{2\eta},\qquad \sigma_{33}=\frac{\eta-1}{2\eta^3}+\frac{1-3\eta}{2\eta^3(1-4\eta)^{1/2}}$$

$$\sigma_{44}=\frac{2\eta-1}{2\eta^4}+\frac{2\eta^2-4\eta+1}{2\eta^4(1-4\eta)^{1/2}},\qquad \sigma_{65}=\frac{2-3\eta}{\eta^5}+\frac{10\eta^3-30\eta^2+15\eta-2}{\eta^5(1-4\eta)^{3/2}}$$

$$\sigma_{55}=-\frac{\eta^2-3\eta+1}{2\eta^5}+\frac{5\eta^2-5\eta+1}{2\eta^5(1-4\eta)^{1/2}}$$

$$\sigma_{.6}=\frac{3\eta^2-12\eta+5}{2\eta^6}+\frac{70\eta^3-105\eta^2+42\eta-5}{2\eta^6(1-4\eta)^{3/2}} \tag{2.5}$$

$$\sigma_{66}=\frac{1-6\eta+9\eta^2-2\eta^3}{2\eta^6(1-4\eta)^{1/2}}-\frac{3\eta^2-4\eta+1}{2\eta^6}$$

$$\sigma_{9;}=18\left\{-\frac{3\eta^2-3\eta+1}{\eta^7}+\frac{210\eta^4-420\eta^3+252\eta^2-60\eta+5}{6\eta^7(1-4\eta)^{5/2}}\right\}$$

Так как алгебраический полином является частным случаем целой аналитической функции, то выведенные разложения пригодны для отыскания корней алгебраических уравнений.

Ограничиваясь в (1.1) членом с u^m, рассмотрим уравнение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{m}p_k u^k=0 \tag{2.6}$$

степени m. Положив

$$q_0q_2=\omega_2,\ -q_0^2q_3=\omega_3,\ \ldots,\ (-1)^k q_0^{k-1}q_k=\omega_k,\ \ldots,\ u=-q_0\zeta \tag{2.7}$$

приведем уравнение (2.6) к виду

$$f(\zeta)=1-\zeta+\omega_2\zeta^2+\omega_3\zeta^3+\ldots+\omega_m\zeta^m=0 \tag{2.8}$$

Для корня уравнения (2.8) наименьшего по абсолютной величине из разложения (1.18) нетрудно получить (2.9)

$$\zeta = \sum_{t_m=0}^{\infty} \frac{\omega_m^{t_m}}{t_m!} \sum_{t_{m-1}=0}^{\infty} \frac{\omega_{m-1}^{t_{m-1}}}{t_{m-1}!} \cdots \sum_{t_3=0}^{\infty} \frac{\omega_3^{t_3}}{t_3!} \sum_{t_2=0}^{\infty} \frac{(2t_2+3t_3+\ldots+mt_m)!}{t_2!\,[t_2+2t_3+\ldots+(m-1)\,t_m+1]!}\,\omega_2^{t_2}$$

В частных случаях для уравнений второй, третьей, четвертой и пятой степеней, получим

$$\zeta = \sigma_{01}(\omega_2) \quad \text{при } m=2, \qquad \zeta = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\omega_3^{s}}{s!} \sigma_{3s,\,2s+1}(\omega_2) \quad \text{при } m=3$$

$$\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\omega_4^{r}}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\omega_3^{s}}{s!} \sigma_{3s+4r,\,2s+3r+1}(\omega_2) \quad \text{при } m=4 \tag{2.10}$$

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_5^{k}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\omega_4^{r}}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\omega_3^{s}}{s!} \sigma_{3s+4r+5k,\,2s+3r+4k+1}(\omega_2) \quad \text{при } m=5$$

Для практических вычислений в формулах (2.9) и (2.10) можно ограничиваться малым числом членов при условии разложения корня в точке, достаточно близкой к нему. Это дает возможность пользоваться разложением (1.21) и выражениями (2.5).

3. Для внутренних сумм $\sigma_{k,s}$ в (1.18) и (1.21), а также в (2.9) и (2.10) при фиксированных значениях всех индексов, кроме индексов внутренних сумм, можно определить радиус сходимости.

Любую из этих сумм можно написать следующим образом:

$$\sigma_{k,\,s} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(2t+k)!}{t!\,(t+s)!}\,\omega_2^{t} \tag{3.1}$$

где при сделанных предположениях k и s — константы. Радиус сходимости для ряда (3.1) можно вычислить по известной формуле

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{t\to\infty} \frac{(2t+2+k)!\,t!\,(t+s)!}{(t+1)!\,(t+1+s)!\,(2t+k)!}$$

Отсюда $\rho = {}^1/_4$, и для сходимости указанных выше внутренних сумм должно выполняться условие (если принять во внимание (1.17) и (2.7))

$$|\omega_2| = \left|\frac{p_0p_2}{p_1^2}\right| < \frac{1}{4} \tag{3.2}$$

Определим область сходимости для рассматриваемой суммы на плоскости переменного ξ.

Учитывая (1.1), неравенство (3.2) можно написать следующим образом:

$$\left|\frac{2f(\xi)f''(\xi)}{f'^2(\xi)}\right| < 1 \tag{3.3}$$

Положим

$$2f(\xi)f''(\xi) = \sum_{k=0}^{2(m-1)} A_k\xi^k, \qquad f'^2(\xi) = \sum_{k=0}^{2(m-1)} B_k\xi^k \tag{3.4}$$

где m — степень полинома $f(z)$.

Используя (3.4), из (3.3) можно получить уравнение области сходимости внутренних сумм в выражениях корней алгебраического уравнения

$$F(R,\theta)=\frac{d_0}{2}+\sum_{k=1}^{2(m-1)} d_k\cos k\theta=0 \qquad \left(d_k=2\sum_{s=0}^{2(m-1)-k} D_{s,\,s+k}R^{2s+k}\right) \tag{3.5}$$

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} B_i & A_i \\ A_j & B_j\end{vmatrix}$$

Можно предполагать, что ряд (2.9) сходится в случае, если разложение полинома (1.1) сделано в точке ξ, лежащей внутри области сходимости (3.5).

4. Полученное разложение корня алгебраического уравнения степени m (2.9) обладает достаточной общностью [1]. С его помощью можно получать точные решения уравнений, разрешимых в радикалах и в тех или иных специальных функциях, для случаев, когда удается суммировать полученные ряды. Далее рассматриваются примеры.

а) Для $m=2$

$$f(z)=z^2+pz+q=0 \tag{4.1}$$

По (2.10) и (2.5)

$$\zeta=\sigma_{0,1}(\omega_2)=\frac{1-\sqrt{1-4\eta}}{2\eta} \tag{4.2}$$

где

$$\zeta=-(p/q)\,z,\qquad \eta=q/p^2,\qquad \text{или}\qquad z=-{}^1/_2\,p+\sqrt{{}^1/_4\,p^2-q} \tag{4.3}$$

б) Для $m=3$

$$f(z)=z^3+pz+q=0 \tag{4.4}$$

По (2.10) и (1.20)

$$\zeta=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\omega_3{}^s}{s!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(2t+3s)!}{t!\,(t+2s+1)!}\,\omega_2{}^t \tag{4.5}$$

где

$$\zeta=-\frac{p}{q}\,z,\qquad \omega_2=0,\qquad \omega_3=-\frac{q^2}{p^3} \tag{4.6}$$

По подстановке (4.6) в (4.5) получим

$$z=-\frac{q}{p}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(3s)}{s!\,(2s+1)!}\left(-\frac{q^2}{p^3}\right)^s \tag{4.7}$$

Так как

$$\frac{(3s)!}{s!\,(2s+1)!}=\frac{({}^1/_3)_s\,({}^2/_3)_s}{({}^3/_2)_s\,s!}\left(\frac{27}{4}\right)^s$$

то, следовательно, из (4.7) получим

$$z=-\frac{q}{p}\,F\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{3};\,\frac{3}{2};\,-t^2\right)\qquad \left(t=\left(\frac{27q^2}{4p^3}\right)^{1/2}\right) \tag{4.8}$$

Воспользовавшись формулой преобразования ([14], стр. 1057, формула 9.131.1) получим

$$z=-\frac{q}{p}\,(t^2+1)^{-1/3}F\left(\frac{1}{3},\,\frac{5}{6};\,\frac{3}{2};\,\frac{t^2}{t^2+1}\right). \tag{4.9}$$

---

[1] Уравнение, в котором отсутствует неизвестное в первой степени ($p_1=0$) для возможности применения (2.9), должно быть преобразовано с помощью преобразования сдвига.

Применив к (4.9) формулу суммирования ([14], стр. 1054, формула 9.121.4) при $n = 1/3$, будем иметь

$$z = -\frac{3q}{2pt}\{[t + (t^2+1)^{1/2}]^{1/3} - [-t + (t^2+1)^{1/2}]^{1/3}\} \tag{4.10}$$

и, по подстановке в (4.10) выражения для t из (4.8), получим формулу Кардано

$$z = \left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3} \tag{4.11}$$

в) Представляет интерес разложение корня трехчленного уравнения

$$y^n + xy - 1 = 0 \tag{4.12}$$

Применив (2.9), получим

$$y = \frac{1}{x}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(nt)!}{t!\,[(n-1)t+1]!}\left(-\frac{1}{x^n}\right)^t \tag{4.13}$$

или

$$y = \frac{1}{x}\, {}_{n-1}F_{n-2}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}; \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-1}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n}{n-1}; -\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\frac{1}{x^n}\right) \tag{4.14}$$

Для сходимости ряда (4.13) или ряда (4.14) необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|x| > \frac{n}{(n-1)^{(n-1)/n}} \tag{4.15}$$

Для уравнения (4.12) известно разложение Меллина [2]

$$y = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha \Gamma((1+\alpha)/n)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+[1-(n-1)\alpha]/n)} x^\alpha \tag{4.16}$$

сходящееся при условии

$$|x| < \frac{n}{(n-1)^{n-1/n}} \tag{4.17}$$

Как видим, разложение (4.13) дополняет полученное Меллином и дает возможность получить решение для любых значений параметра x.

5. Далее дается несколько примеров применения полученных результатов к некоторым проблемам механики и другим вычислительным задачам.

а) В работе [15] получено характеристическое уравнение

$$H^3 + p_2 H^2 + p_1 H + p_0 = 0 \tag{5.1}$$

$$p_2 = -\frac{n_1 + Mn_2}{1+M}, \quad p_1 = \frac{n_2 - D}{1+M}, \quad p_0 = \frac{n_2 D}{1+M}, \quad n_1 = m + A, \quad n_2 = m - A$$

$$A = 1/2(1 - e^{-2m}), \quad M = \frac{\rho_3}{\rho_1}, \quad D = \frac{Mm^3}{W}, \quad W = \frac{\rho_2 h V^2}{\sigma}$$

Здесь m — безразмерное волновое число, M — отношение плотностей жидкостей, W — число Вебера (ρ_2 — плотность, h — толщина пограничного слоя, V — скорость, σ — коэффициент поверхностного натяжения). Требуется определить зависимость инкремента колебаний, т. е. мнимой части комплексного корня уравнения (5.1) от волнового числа для разных значений числа Вебера W.

В работе [15] решение было получено графически. Из (5.1) имеем

$$z^3 + b_1 z + b_0 = 0, \qquad H = z - 1/3 p_2 \tag{5.2}$$

получим

$$b_1 = \frac{3p_1 - p_2^2}{3}, \qquad b_0 = \frac{2p_2^3 - 9p_1p_2 + 27p_0}{27} \tag{5.3}$$

причем $\operatorname{Im}(H) = \operatorname{Im}(z)$. Легко показать, что второй и третий корни уравнения (5.2) выражаются через первый (действительный) корень при помощи формулы

$$z_{2,3} = -{}^1/_2 z_1 \pm {}^1/_2 i \sqrt{3z_1^2 + 4b_1} \tag{5.4}$$

$$z_i = {}^1/_2 \sqrt{3z_1^2 + 4b_1} \tag{5.5}$$

Для вычисления z_1 можем применить одну из формул (4.13) или (4.16). От (5.2) перейдем к (4.12) при помощи подстановки

$$z = y\,(b_0)^{1/3} \tag{5.6}$$

Проделанный таким образом поверочный расчет подтвердил зависимости, полученные в работе [15]. Использованное здесь аналитическое решение дает любую наперед заданную степень точности.

б) В работе [16] исследуется проблема распада струи вязкой жидкости. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^2 + \frac{2\nu k^2}{I_0(ka)}\left[I_1'(ka) - \frac{2kl}{k^2+l^2}\frac{I_1(ka)}{I_1(la)} I_1'(la)\right]\alpha = \frac{\sigma k}{\rho a^2}(1 - k^2a^2)\frac{I_1(ka)}{I_0(ka)}\frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2}$$

$$(l^2 = k^2 + a/\nu) \tag{5.7}$$

Здесь a — радиус струи, ka — безразмерное волновое число, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ν — кинематическая вязкость, α — комплексная частота колебаний, $I_0(ka)$, $I_1(ka)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. В работе [16] указывается, что ввиду сложности уравнения оно не может быть решено аналитически и рассмотрены лишь предельные случаи.

Введем в уравнение (5.7) безразмерные параметры

$$m = ka, \qquad z = \alpha\left(\frac{a^3\rho}{\sigma}\right)^{1/2}, \qquad A^2 = Lp = \frac{a\rho\sigma}{\eta^2} \tag{5.8}$$

Тогда

$$la = \sqrt{m^2 + Az} \tag{5.9}$$

Уравнение (5.7) принимает вид

$$z^2 + \frac{2m^2z}{AI_0(m)}\left[I_1'(m) - \frac{2m\sqrt{m^2+Az}}{2m^2+Az}\frac{I_1(m)}{I_1(\sqrt{m^2+Az})}I_1'(\sqrt{m^2+Az})\right] =$$

$$= m(1 - m^2)\frac{Az}{2m^2 + Az}\frac{I_1(m)}{I_0(m)} \tag{5.10}$$

Разлагая функции Бесселя и их производные в ряды в нулях их аргументов, получим вместо уравнения (5.10) после некоторых преобразований следующее уравнение:

$$\sum_{t=0}^{\infty} M_t\zeta^t = 0 \tag{5.11}$$

где

$$\zeta = m^2 + Az, \qquad M_0 = \frac{m^4I_0(m) - 6m^3I_1(m) - m(1-m^2)I_1(m)A^2}{I_0(m)}$$

$$M_1 = \frac{m^2(16 - 3m^2)I_0(m) - 2m(8 + 7m^2)I_1(m) - m(1 - m^2)I_1(m)A^2}{8I_0(m)}$$

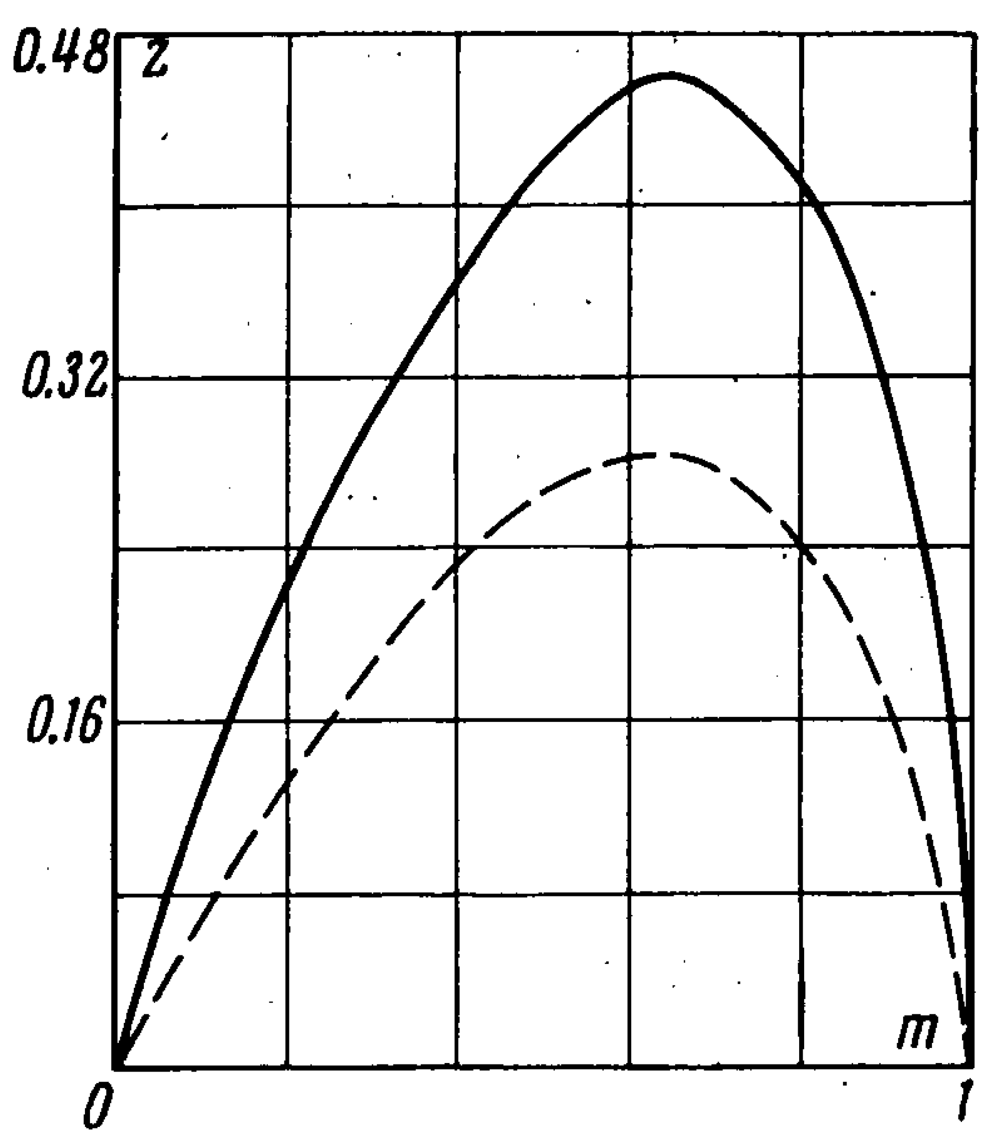
$$M_t = \frac{[16(t-1)t(t+1) + 8t(t+1)m^2 + m^4]\,I_0(m) - [8t(t+1)m + 2(3+4t)m^3]\,I_1(m)}{2^{2t}t!\,(t+1)!\,I_0(m)} -$$

$$- \frac{m(1-m^2)I_1(m)A^2}{2^{2t}t!\,(t+1)!\,I_0(m)} \qquad \text{при } (t = 2, 3, \ldots)$$

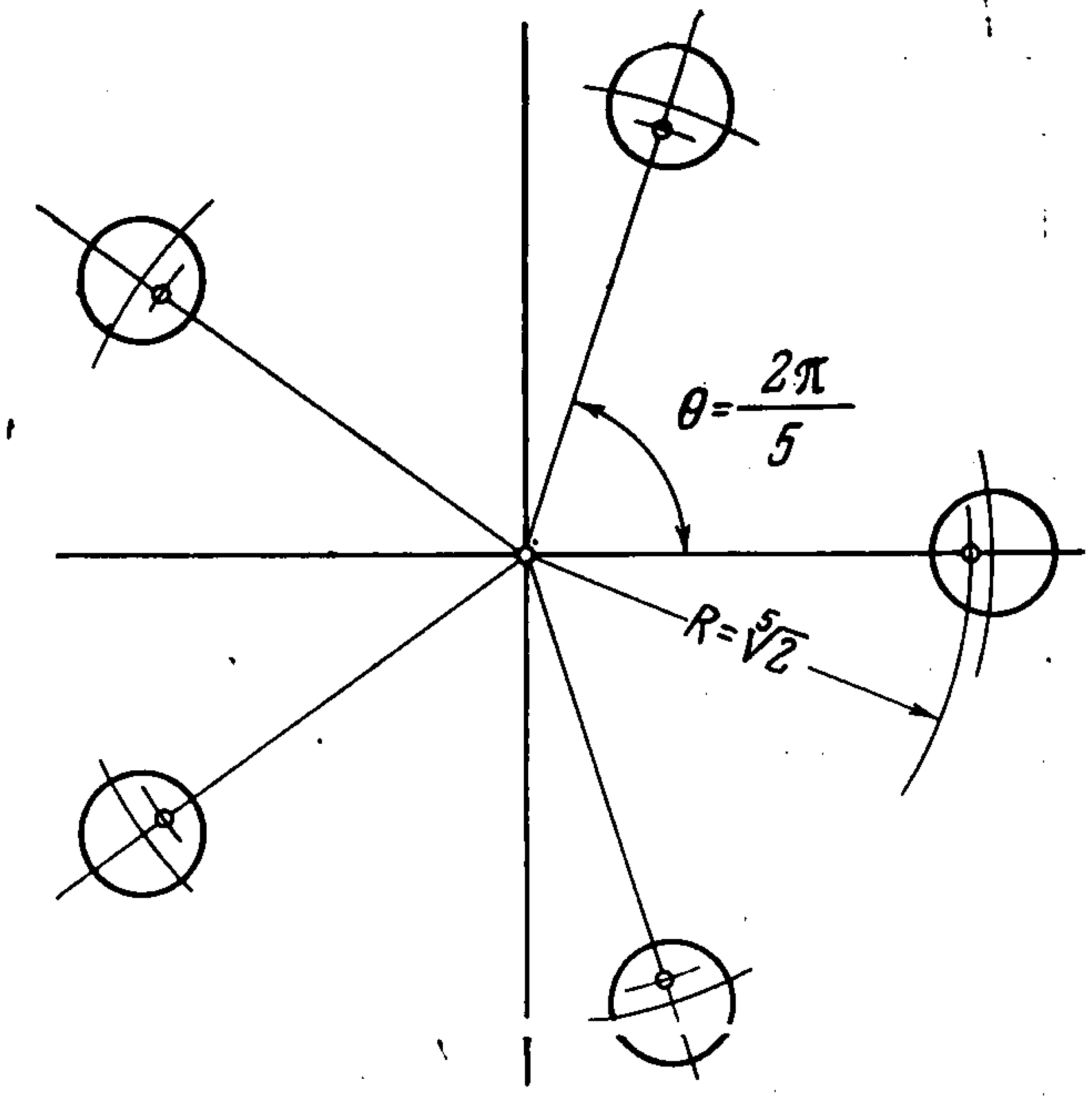
Подсчитаем инкремент колебаний для случая истечения струи 75% водного раствора глицерина. Для этого случая $A^2 = Lp = 33.5$. Результаты вычислений приведены на фиг. 1. Пунктиром приведена кривая, полученная в результате использования уравнения

$$z = -\frac{m^2}{A} + \left(\frac{m^4}{A^2} + \frac{1}{2} m^2 (1 - m^2)\right)^{1/2} \tag{5.12}$$

получающегося при подстановке безразмерных параметров (5.8) в упрощенное уравнение, приведенное в работе [16]. На той же фиг. 1 отмечено положение максимума



Фиг. 1



Фиг. 2

инкремента для случая струи идеальной жидкости (Релей). Как видим, характер кривых существенно разный. Значения инкремента колебаний, подсчитанные по более точным решениям характеристического уравнения, примерно в полтора раза больше, чем подсчитанные по формуле (5.12), данной в работе [16], что, очевидно, дает иные, более точные выводы о длине нераспавшейся части струи для исследуемого случая.

в) Рассмотрим уравнение деления круга

$$f(z) = z^5 - a = 0 \tag{5.13}$$

Область сходимости внутренних сумм в (1.21), согласно (3.5), определяется уравнением

$$F(R, \theta) = -(64a^2 + 39 R^{10}) + 128aR^5 \cos 5\theta = 0 \tag{5.14}$$

На фиг. 2 изображены области сходимости рядов для каждого из пяти корней уравнения (5.13) при $a = 2$. Вычислим действительный корень уравнения. Разложим функцию $f(z)$ в точке $\xi = 1{,}2$, лежащей внутри области сходимости действительного корня. Тогда вместо (5.13) получим уравнение

$$\eta^5 + 6\eta^4 + 14.4\eta^3 + 17.28\eta^2 + 10.368\eta + 0.48832 = 0 \tag{5.15}$$

где

$$\eta = z - 1.2 \tag{5.16}$$

Из разложения (1.21) используем два первые члена, поскольку остальными можно пренебречь по их малости. Тогда получим

$$q_0 = 0.047099, \quad q_2 = 1.66667, \quad q_3 = 1.38889,$$

$$w_2 = q_0 q_2 = 0.0784976, \quad \sigma_{0,1} = 1.093897, \quad \sigma_{3,3} = 1.56252$$

что дает результат

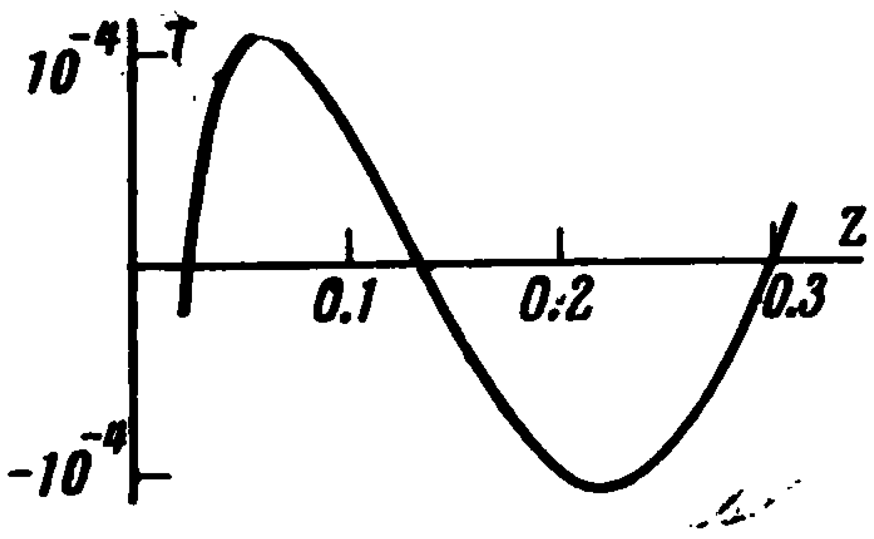
$$\eta = -0.05130 \text{ и } z = 1.14870 \tag{5.17}$$

с большой степенью точности, что легко проверить, так как действительный корень уравнения (5.13) при $a = 2$, $z = 2^{0.2} = 1.148698$ (см. например [17]).

г) Вычислим наименьший корень уравнения [18]

$$f(z)=z^7-\frac{7}{2}z^6+\frac{63}{13}z^5-\frac{175}{52}z^4+\frac{175}{143}z^3-\frac{63}{286}z^2+\frac{7}{429}z-\frac{1}{3432}=0 \qquad (5.18)$$

Локализация корней может быть осуществлена любым из многочисленных имеющихся методов. График функции $f(z)$ (построенный по приближенным вычислениям), приведенный на фиг. 3, дает возможность выбрать точку, достаточно близкую к искомому корню. Взяв



Фиг. 3

$$u = z - 0.02 \qquad (5.19)$$

получим коэффициенты преобразованного уравнения

$$q_0 = -0.00494670, \quad q_2 = -17.42303$$

$$q_3 = 109.73202, \quad \eta = q_0 q_2 = 0.0861865$$

Ограничившись опять двумя первыми членами разложения (1.21), получим

$$u = 0.0054454 \quad \text{или} \quad z = 0.0254454 \qquad (5.20)$$

В работе [18] значение этого корня $z = 0.02544604$.

д) Вычислим вещественный нуль функции

$$f(x) = \cos x \operatorname{ch} x - 1 = 0 \qquad (5.21)$$

Приближенные значения нулей функции $f(x)$ даются формулой [19]

$$a_n = {}^1/_2\,(2n+1)\,\pi \qquad (5.22)$$

Здесь n — порядковый номер нуля, если не считать тривиального значения $x = 0$. Разложение $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s}}{(2s)!}-1=0 \qquad (5.23)$$

Используя формулу умножения степенных рядов ([14], стр. 29, формула 0.316), вместо (5.23), получим

$$f(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}\zeta^k=0 \qquad \left(c_{2s}=2\sum_{t=0}^{s-1}\frac{(-1)^t}{(2t)!\,(4s-2t)!}+\frac{(-1)^s}{[(2s)!]^2}\right) \qquad (5.24)$$

или ([14], стр. 18, формулы 0.153.1,0.153.3)

$$c_{2s}=(-1)^s\frac{2^{2s}}{(4s)!}, \qquad \zeta = x^4 \qquad (5.25)$$

Отбросим тривиальное решение $\zeta = 0$. Для вычисления нуля x_n разложим функцию $f(\zeta)$ в ряд

$$f(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2(k+1)}\zeta^k=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\eta^k, \qquad \eta=\zeta-a_n^4. \qquad (5.26)$$

Получим

$$p_s=\frac{1}{s!}f^{(s)}(a_n^4)=\frac{1}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}k(k-1)\ldots(k-s+1)\,c_{2(k+1)}a_n^{4(k-s)} \qquad (5.27)$$

Для вычисления первого нуля x_1 воспользуемся опять двумя первыми членами разложения (1.21). Получим $q_0 = -7.40712$, $q_2 = -4.2416\cdot10^{-4}$, $q_3 = 4.16592\cdot10^{-8}$, $\eta = 3{\cdot}1418\cdot10^{-3}$, $\sigma_{0,1} = 1.003162$, $\sigma_{3,3} = 1.0159$, что дает $\eta = x^4 - a_1^4 = 7.43052$.

Подставив в полученное уравнение значение a_1, вычисленное по (5.22), для первого нуля функции (5.21) получим $x_1 = 4.73004$. В работе [19] дано $x_1 = 4.73$.

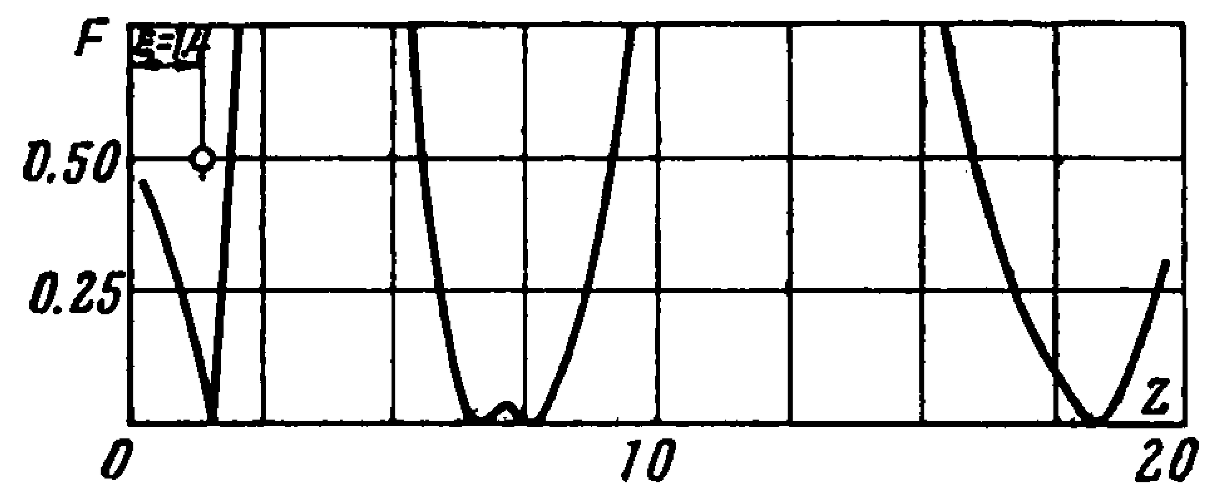
е) Вычислим вещественный нуль функции

$$f(z) = J_0(2\sqrt{z}) = 0 \qquad (5.28)$$

Эта задача была решена Эйлером посредством разложения нуля в бесконечное произведение; она приведена в работе [20].

Построим по формуле (3.3) области сходимости для разложения функции (5.28). На фиг. 4 приведена картина областей сходимости рядов для первых трех нулей функции (5.28). Прямая, параллельная оси абсцисс с ординатой $^1/_2$, даст области сходимости для указанных трех нулей на вещественной оси. Функцию (5.28) можно разложить в ряд, в нуле, следующим образом:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(k!)^2} = 0 \qquad (5.29)$$



Фиг. 4

Разложим функцию $f(z)$ в точке $\xi = 1.4$, находящейся внутри области сходимости (фиг. 4). Тогда получим $q_0 = -0.045085370$, $q_2 = -0.34104094$, $q_3 = 0.043352828$, $\eta = q_0 q_2 = 0.015375957$, что дает для первого нуля функции (5.28) значение $\alpha_1 = 1.4457964$; в работе [20] дано значение этого нуля $\alpha_1 = 1.445796$.

Поступила 27 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лахтин Л. К. Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях. М., 1893.
2. Belardinelli G. Fonctions hypergéométriques de plusiers variables et résolution analytique des équations algébriques générales. Paris, Gauthier — Villars, 1960.
3. Максимович. О разложении функций от корней уравнения в ряды. Казань, 1882.
4. Чебышев П. Л. Высшая алгебра, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1936.
5. Bazenow G. M. Über die Berechnung der Wurzeln von algebraischen Gléichungen mit Hilfe der unendlichen Reichen.«Записки Харьк. мат. т-ва», сер. 4, 1933, т. 7, стр. 39—45.
6. Неметти В. П. Ряд для вычисления несоизмеримого корня уравнения. Тр. Московск. ин-та инж. трансп., 1929, вып. 10, стр. 7—11.
7. Шевелев М. Л. О методе Э. Уиттекера для вычисления корней алгебраического уравнения. Сб. «Матем. просвещение», 1937, вып. 12, стр. 35—47.
8. Heegmann M. A. De la résolution générale des équations algébriques an moyen de séries. C. R. Acad. Sci., Paris, 1861, t. 52, pp. 972.—974.
9. Кокарева Т. А. О приближенном вычислении корней уравнения $z^m = A + Bz^k$. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1, стр. 157—160.
10. Kodl Otakar. Řešeni rovnic potenčnimî sodami. Časop. pěstov. mat., 1953, 78, No 3, s. 263.
11. Мархашов Л. М. Об отделении и вычислении корней алгебраического уравнения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, стр. 772—774.
12. Микеладзе Ш. Е. Решение численных уравнений. Тбилиси, Мецниереба, 1965.
13. Титчмарш К. Теория функций. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1951.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4, перераб., М., Физматгиз, 1962.
15. Бородин В. А., Ягодкин В. И. Устойчивость движения плоской границы раздела двух жидкостей. ПМТФ, 1967, № 1.
16. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
17. Комри Л. Дж. Шестизначные математические таблицы Чемберса. М., «Наука», 1964.
18. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 6, М., Гостехиздат, 1954.
19. Справочное руководство по машиностроению, т. I. Математика, под ред. В. М. Майзель, Харьков — Киев, Гостехиздат, 1937.
20. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ч. 1. М., Изд-во иностр. лит-ры 1949.