

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Теория Гриффитса — Ирвина основана на представлении о поверхностном натяжении твердого тела, являющемся физической постоянной материала и зависящем лишь от температуры [1, 2]. Согласно этой теории коэффициент интенсивности напряжений на контуре подвижно-равновесной трещины нормального разрыва в линейно-упругом теле является постоянной материала. Введя вместо поверхностного натяжения эффективную плотность поверхностной энергии, Ирвин и Орован [3] распространили указанное условие на материалы, не являющиеся идеально хрупкими (концепция квазихрупкого разрушения). Уместно отметить, что эффективная плотность поверхностной энергии не будет физической постоянной материала; вообще говоря, она зависит от скорости роста трещины, от истории деформирования и т. д.

Ниже подход Гриффитса — Ирвина применяется для изучения процессов развития трещин в произвольной сплошной среде. Этот подход в сочетании с постановкой сингулярной задачи о «тонкой структуре» конца трещины позволил сформулировать условие, определяющее рост трещин в произвольной сплошной среде (§ 1). Для линейно-упругих тел оно приводит к уже известным результатам (§ 2).

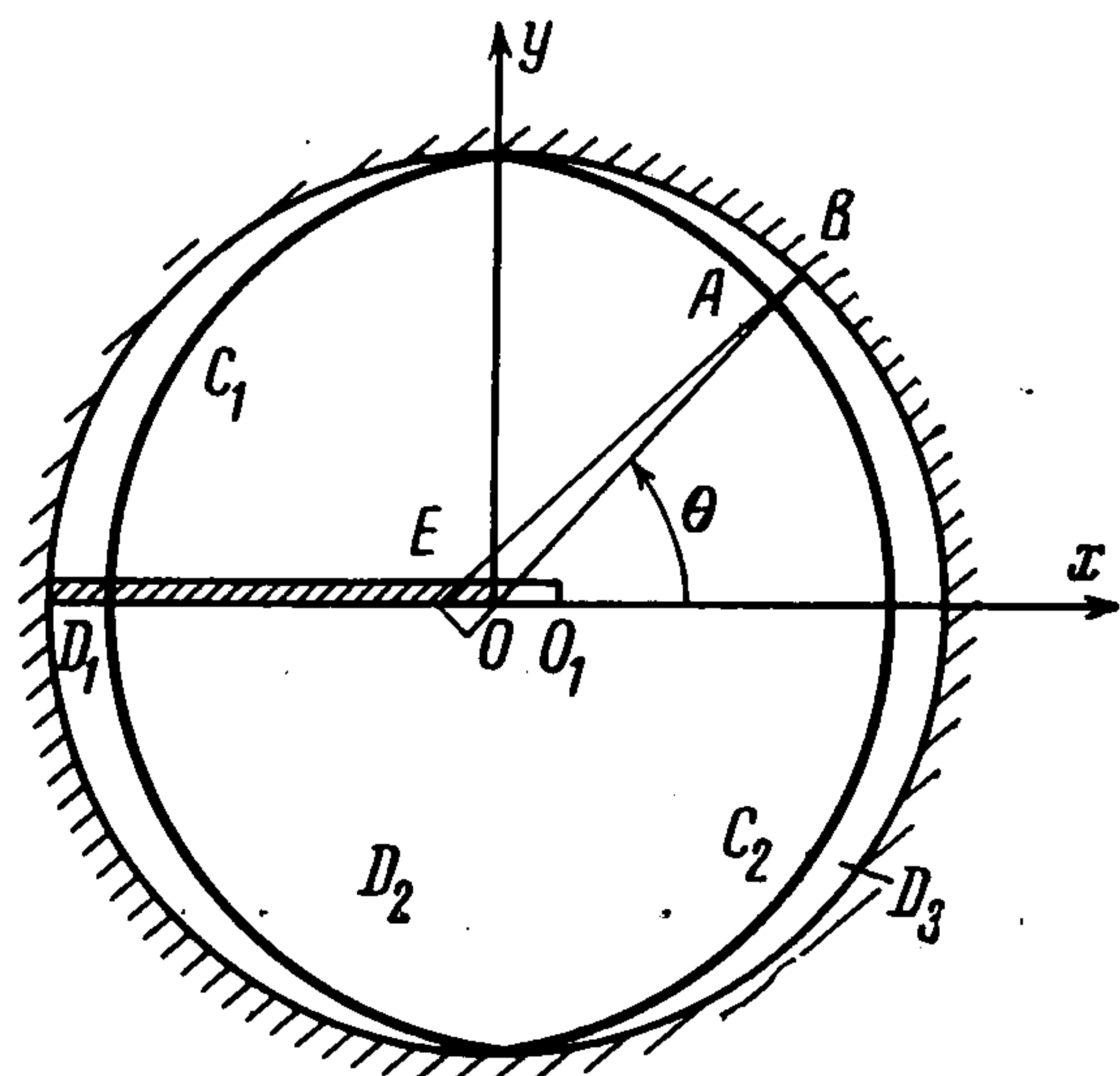
Рассмотрено приложение общего условия к некоторым пластическим (§ 3) и линейно-вязко-упругим телам (§ 4).

§ 1. Условие предельного равновесия на контуре трещины. 1°. Пусть сплошное деформируемое тело содержит трещины, являющиеся поверхностями разрыва смещений. Деформации среды будем считать малыми. Для определенности ограничимся рассмотрением трещин нормального разрыва с гладкой поверхностью, удовлетворяющих, кроме того, условию локальной симметрии. Согласно этому условию в малой окрестности каждой точки контура трещины будет иметь место симметрия относительно плоскости, касательной к поверхности трещины в этой точке. Без ограничения общности можно считать также, что некоторая окрестность поверхности трещины вблизи любой точки контура свободна от нагрузок.

Рассмотрим окрестность произвольно выбранной точки O контура трещины, малую сравнительно с характерным линейным размером тела. Введем систему прямоугольных декартовых координат xuz с центром в точке O ; при этом ось u направим по нормали к поверхности трещины, ось z — вдоль контура трещины, а ось x — в глубь тела. Сплошная среда в малой окрестности каждой точки контура трещины находится в условиях плоской деформации. Поэтому процессы деформирования и разрушения тела в рассматриваемой малой области вблизи точки O можно изучать на плоском чертеже (фиг. 1), считая трещину полубесконечной, прямолинейной и имеющей всюду свободную от внешних нагрузок поверхность. При этом во всей области и, в том числе, в бесконечно удаленной точке все функции, характеризующие напряжения, смещения, тем

пературу и т. д., будут определяться асимптотическим распределением соответствующих величин в малой окрестности точки O исходного тела («принцип микроскопа»). Заметим, что вследствие условия локальной симметрии нормальное смещение и касательное напряжение на продолжении трещины при $\infty > x > 0$ равны нулю.

Ограничимся рассмотрением процессов, протекающих с участием лишь механической и тепловой энергии. Обозначим через C замкнутый контур в плоскости xy (фиг. 1), охватывающий точку O ; наибольшее расстояние произвольной точки контура C от начала координат мало сравнительно с характерным линейным размером тела. Без ограничения общности для дальнейшего контур C можно считать окружностью с центром в точке O , причем радиус этой окружности в рассматриваемой постановке задачи о «тонкой структуре» конца трещины стремится в бесконечность. Фиксируем контур C и изучим процесс деформирования и разрушения среды D , находящейся внутри C . Обозначим через $r\theta$ полярные координаты с центром в точке O , а через R — радиус окружности C .



Фиг. 1

Согласно закону сохранения энергии работа A^* , совершенная в единицу времени поверхностными силами на контуре C и объемными силами в D , плюс тепловая энергия Q^* , подведенная к телу D в единицу времени через контур C , равны скорости возрастания суммы кинетической K^* и внутренней энергии $W^* + \Pi^*$ тела в области D , т. е.

$$A^* + Q^* = K^* + W^* + \Pi^* \quad (1.1)$$

$$A^* = R \int_0^{2\pi} [(\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) u^* + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) v^*] d\theta + \\ + \int_D \rho (F_x u^* + F_y v^*) dx dy$$

$$Q^* = R \int_0^{2\pi} (q_x^* \cos \theta + q_y^* \sin \theta) d\theta, \quad \Pi^* = 2\gamma l^*$$

$$K^* = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D \rho (u^2 + v^2) dx dy, \quad W^* = \frac{d}{dt} \int_D \rho U dx dy$$

Здесь введены следующие обозначения: u, v — компоненты вектора смещения по осям x и y ; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z$ — составляющие тензора напряжений; q_x^*, q_y^* — компоненты вектора теплового потока; F_x, F_y — компоненты объемной силы; ρ и U — соответственно массовая плотность и плотность внутренней энергии элемента материала, расположенного в момент времени t в точке (x, y) ; γ — поверхностная энергия, приходящаяся на единицу поверхности (в пренебрежении скрытой теплотой образования по-

верхности она равна поверхностному натяжению материала); l' — скорость распространения конца трещины вдоль оси x . Точка в позиции штриха означает производную по времени t . Полная внутренняя энергия тела, очевидно, складывается из объемной (W) и поверхностной (Π) энергии.

Все функции, участвующие в уравнении (1.1), в принципе могут быть найдены из решения задачи в целом для любой модели сплошного тела с точностью до одной неопределенной постоянной, характеризующей положение трещины в рассматриваемой точке O . Уравнение (1.1) служит дополнительным условием на контуре растущей трещины для определения этой постоянной и, тем самым, позволяет поставить задачу о развитии трещин в произвольной сплошной среде.

Заметим, что длина распространяющейся трещины l будет однозначной функцией времени t , поэтому она может играть роль времени в уравнении (1.1), если исключить время при помощи соотношения $l = l(t)$. При этом условие (1.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & R \int_0^{2\pi} [(\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial l} + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial l}] d\theta + \\ & + \frac{R}{l'} \int_0^{2\pi} (q_x \cos \theta + q_y \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} l^2 \frac{d}{dl} \int_D \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial l} \right)^2 \right] dx dy + \\ & + 2\gamma + \frac{d}{dl} \int_D \rho U dx dy - \int_D \rho \left(F_x \frac{\partial u}{\partial l} + F_y \frac{\partial v}{\partial l} \right) dx dy \end{aligned} \quad (1.2)$$

Производные по l функций, фигурирующих в (1.2), вычисляются из сингулярного решения, очевидно, следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(x, y, l + \Delta l) - f(x, y, l)}{\Delta l} \quad (1.3)$$

Здесь функция $f(x, y, l)$ известна из сингулярного решения; она соответствует положению конца трещины в точке O .

Функция $f(x, y, l + \Delta l)$ соответствует положению конца трещины в точке O_1 , сдвинутой на расстояние Δl вдоль оси x (фиг. 1).

Дополнительное условие 1.2 на контуре растущей трещины будет играть основную роль в дальнейшем. Следует подчеркнуть, что в общем случае все члены в уравнении (1.2) оказываются одного порядка. Однако для различных сред и режимов развития трещин они будут играть различную роль.

Например, в случае квазистатических трещин, скорость роста которых гораздо меньше скорости звука, первым членом в правой части уравнения (1.2), представляющим собой кинетическую энергию, можно пренебречь.

2°. Преобразуем условие (1.2) к более удобному виду. Пусть сингулярное решение, соответствующее положению конца трещины в точке O , имеет вид

$$u = u_0(N, x, y), \quad v = v_0(N, x, y), \quad \sigma_x = \sigma_{x0}(N, x, y), \dots, \quad \rho U = \rho U_0(N, x, y) \quad (1.4)$$

Здесь N — неопределенная постоянная; она определяется только из решения задачи в целом и является некоторой функцией формы тела (в частности, длины трещины l) и параметров внешней нагрузки. В динамических задачах N зависит также от параметров, определяющих функцию $l(t)$ (например, от скорости трещины в случае роста трещины с постоянной скоростью).

Пусть в процессе развития конец трещины достигает точки O_1 , находящейся на расстоянии Δl от начального положения в точке O (фиг. 1). При этом функция параметров задачи N получает некоторое приращение ΔN . Сингулярное решение, соответствующее положению конца трещины в точке O_1 , на основании (1.4) будет иметь вид

$$u = u_0(N + \Delta N, x - \Delta l, y), \quad v = v_0(N + \Delta N, x - \Delta l, y) \quad (1.5)$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0}(N + \Delta N, x - \Delta l, y), \dots, \quad \rho U = \rho U_0(N + \Delta N, x - \Delta l, y)$$

Закон сохранения энергии (1.1) для области D , заключенной внутри окружности C , можно записать в форме

$$\lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta N} + \frac{\Delta Q}{\Delta N} - \frac{\Delta K}{\Delta N} - \frac{\Delta W}{\Delta N} \right)_{\Delta l=0} \Delta N +$$

$$+ \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta l} + \frac{\Delta Q}{\Delta l} - \frac{\Delta K}{\Delta l} - \frac{\Delta W}{\Delta l} - 2\gamma \right)_{\Delta N=0} \Delta l = 0 \quad (1.6)$$

Здесь Δx означает приращение величины x . Множитель при ΔN в формуле (1.6) равен нулю в силу закона сохранения энергии для неподвижной трещины.

Отсюда следует, что в условии (1.2) производные по l можно вычислять при $N = \text{const}$. Проведем из точки O_1 полуокружность C_1 радиуса R , а из точки $E(x = -\Delta l, y = 0)$ полуокружность C_2 также радиуса R (фиг. 1). Части области D , заключенные соответственно между C и C_1 , C_1 и C_2 , C_2 и C , обозначим через D_1 , D_2 и D_3 ($D \approx D_1 + D_2 + D_3$). При $N = \text{const}$ с точностью до малых высшего порядка ($\Delta l \ll R$) имеет место равенство

$$\int_{D_2+D_3} \rho U|_{O_1} dx dy = \int_{D_1+D_2} \rho U|_O dx dy \quad (1.7)$$

Здесь значения подынтегральных функций берутся в том положении конца трещины, которое указано рядом. Используя (1.7) и равенство $AB = \Delta l \cos \theta$ (фиг. 1), находим

$$\frac{d}{dl} \int_D \rho U dx dy = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left[\int_{D_1+D_2+D_3} \rho U|_{O_1} dx dy - \int_{D_1+D_2+D_3} \rho U|_O dx dy \right] =$$

$$= -R \int_0^{2\pi} \rho U_0 \cos \theta d\theta \quad (1.8)$$

Совершенно аналогично вычисляем производную по l кинетической энергии области D при $N = \text{const}$

$$\frac{dK}{dl} = -\frac{1}{2} Rl^2 \int_0^{2\pi} \rho [(\partial u / \partial l)^2 + (\partial v / \partial l)^2] \cos \theta d\theta \quad (1.9)$$

При помощи (1.4) и (1.5) получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{N=\text{const}} = -\frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)_{N=\text{const}} = -\frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (1.10)$$

Работу объемных сил, используя (1.8), (1.10), представим в виде

$$\begin{aligned} \int_D \rho \left(F_x \frac{\partial u}{\partial l} + F_y \frac{\partial v}{\partial l} \right) dx dy &= \int_D \frac{d(\rho H)}{dl} dx dy = \\ &= \frac{d}{dl} \int_D \rho H dx dy = -R \int_0^{2\pi} \rho H \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\rho H = \int \rho \left(F_x \frac{\partial u}{\partial x} + F_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

Собирая формулы (1.8) — (1.11), запишем условие (1.2) в форме

$$R \int_0^{2\pi} \left[(\rho U + K_* - \rho H) \cos \theta + \frac{1}{l} (q_x \cos \theta + q_y \sin \theta) - A_* \right] d\theta = 2\gamma$$

$$K_* = \frac{1}{2} \rho l^2 [(\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2] \quad (1.12)$$

$$A_* = (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) (\partial u / \partial x) + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) (\partial v / \partial x)$$

Здесь все функции вычисляются непосредственно из сингулярного решения, соответствующего положению конца трещины в точке O (индекс v для простоты опущен). Каждое из слагаемых в подынтегральном выражении (1.12) на контуре трещины должно иметь особенность типа $1/r$, чтобы вклад от него в общую сумму был конечным. Особенность большего порядка $r^{-\lambda}$ ($\lambda > 1$) не допускается, так как это вызвало бы нарушение закона сохранения энергии (1.12) (напомним, что в рассматриваемой сингулярной задаче нет характерного линейного масштаба). Члены с особенностью меньшего порядка $r^{-\lambda}$ ($\lambda < 1$), очевидно, выпадают из уравнения (1.12). Из выражения (1.12) вытекает также другое интересное следствие, согласно которому роль диссипативного (третьего) члена убывает с ростом скорости трещины и увеличивается значение второго динамического слагаемого.

Условие предельного равновесия на контуре трещины (1.12) можно представить также в другом удобном виде, в который входят распределения лишь смещений и напряжений в окрестности контура трещины. В каждой точке сплошной среды, занимающей область D , выполняется локальный закон сохранения энергии [4]

$$\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + \partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y = \rho U \quad (1.13)$$

При помощи теоремы о дивергенции, уравнения (1.13) и формулы (1.8) сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{R}{l} \int_0^{2\pi} (q_x \cos \theta + q_y \sin \theta) d\theta &= \frac{1}{l} \int_D \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{l} \int_D [\rho U - (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2\tau_{xy} \epsilon_{xy})] dx dy = \\ &= -R \int_0^{2\pi} \rho U \cos \theta d\theta + R \int_0^{2\pi} \mathcal{E} \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\mathcal{E} = \int \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + 2\tau_{xy} d\epsilon_{xy}$$

Применяя формулу (1.14), условие (1.12) можно записать так:

$$R \int_0^{2\pi} [(\mathcal{E} + K_* - \rho H) \cos \theta - A_*] d\theta = 2\gamma \quad (1.15)$$

Здесь обозначения \mathcal{E} , K_* , ρH и A_* поясняются в формулах (1.14), (1.11) и (1.12). Физически члены \mathcal{E} , K_* , ρH , A_* представляют собой соответственно работу внутренних сил, кинетическую энергию, работу объемных сил и работу поверхностных сил.

Подчеркнем, что при выводе предельного условия на контуре трещины совершенно не затрагивались механические свойства сплошной среды, использована лишь ее непрерывность. Очевидно, если левая часть уравнения (1.12) или (1.15) меньше 2γ , то трещина не будет расти.

Применяемый подход может быть обобщен в направлении, аналогичном концепции квазихрупкого разрушения [3]. При этом под γ следует понимать работу необратимых деформаций в окрестности контура трещины, не учитываемых в принятой модели тела.

§ 2. Упругое тело. 1°. Рассмотрим вначале вопрос об изотермическом развитии квазистатических трещин нормального разрыва в однородном изотропном теле, линейно-упругом вплоть до разрушения. Взаимным переходом тепловой и механической энергии пренебрежем.

Сингулярное решение для полубесконечной трещины нормального разрыва в случае изотермического процесса может быть найдено методом Колосова — Мусхелишвили [5]

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2Nr^{-1/2} \cos(1/2\theta), & \sigma_z &= 2\nu Nr^{-1/2} \cos(1/2\theta) \\ \sigma_x - i\tau_{xy} &= 1/4 Nr^{-1/2} [e^{-1/2i\theta} + 2e^{1/2i\theta} + e^{-5/2i\theta}] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1+\nu)N}{4E\sqrt{r}} [e^{5/2i\theta} - 3e^{1/2i\theta} + 2(3-4\nu)e^{-1/2i\theta}]$$

Здесь N — коэффициент интенсивности напряжений; он определяется из решения задачи в целом и является некоторой действительной функцией формы тела и граничных условий, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

В принятых допущениях условие (1.12) для упругих тел имеет вид

$$R \int_0^{2\pi} \left[\rho U \cos \theta - (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \\ \left. - (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial x} \right] d\theta = 2\gamma \quad (2.2)$$

Внутренняя энергия ρU , приходящаяся на единицу объема, равна удельному упругому потенциалу

$$\rho U = 1/2 (1 - \nu^2) E^{-1} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + (1 + \nu) E^{-1} (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y) \quad (2.3)$$

Подставляя в уравнение (2.2) функции согласно (2.1) и (2.3) и вычисляя интегралы, находим

$$\pi N^2 = E \gamma (1 - \nu^2)^{-1} \quad (2.4)$$

Это известная формула Ирвина [3], определяющая условие предельного равновесия на контуре трещины нормального разрыва в линейно-упругом теле. Отметим, что способ Ирвина [3] применим только для линейно-упругих тел.

2°. Перейдем теперь к нелинейно-упругим однородным и изотропным телам, имеющим трещины нормального разрыва. Будем считать, что среда несжимаема и подчиняется произвольной степенной зависимости между интенсивностью касательных напряжений J и интенсивностью деформаций сдвига Γ . Эта зависимость может служить удобной аппроксимацией произвольной связи между J и Γ в интервале величин, характерных для окрестности контура трещины. Можно показать, что в рассматриваемом случае степенной зависимости переменные в уравнениях теории упругости, по крайней мере, в декартовых и полярных координатах, разделяются.

Приведем основные соотношения задачи [6]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.5)$$

условие совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} \quad (2.6)$$

соотношения между деформациями и напряжениями

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = 1/2 a J^k (\sigma_r - \sigma_\theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = a J^k \tau_{r\theta} \quad (2.7)$$

$$\Gamma = 2aJ^{k+1}, \quad 2J = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad \Gamma = 2 \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_{r\theta}^2}$$

Здесь a и k — упругие постоянные.

Сингулярное решение задачи ищем в таком виде:

$$\sigma_r = -(\lambda + 1)^{-1} r^\lambda [f''(\theta) + (\lambda + 2)f(\theta)] \\ \sigma_\theta = -(\lambda + 2) r^\lambda f(\theta), \quad \tau_{r\theta} = r^\lambda f'(\theta) \quad (2.8)$$

Здесь $f(\theta)$ — произвольная функция, λ — неопределенная постоянная. Нетрудно проверить, что уравнения равновесия (2.5) при этом удовлетворяются. Подставляем выражения (2.8) в формулы (2.7) для деформаций, затем последние подставляем в условие совместности (2.6); окончательно получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$:

$$2[\lambda(\kappa + 1) + 1](f'\Phi^\kappa)' = [d^2/d\theta^2 - 2\lambda(\kappa + 1) - \lambda^2(\kappa + 1)^2][\Phi^\kappa \sqrt{\Phi^2 - (f')^2}] \quad (2.9)$$

$$4\Phi^2 = 4(f')^2 + [(\lambda + 2)f - (\lambda + 1)^{-1}(f'' + \lambda f + 2f)]^2$$

Берега трещины свободны от нагрузок; отсюда по формулам (2.8) находим граничные условия

$$f(\theta) = f'(\theta) = 0 \quad (\theta = \pm \pi) \quad (2.10)$$

Решение дифференциального уравнения (2.9) с граничными условиями (2.10) представляет самостоятельную задачу численного анализа. Любопытно, что постоянная λ , которая определяет характер распределения напряжений в окрестности контура трещины и является своеобразным собственным числом краевой задачи (2.9), (2.10), может быть найдена из физических соображений.

Действительно, на основании условия (2.2), справедливого, очевидно, и в этом случае, подынтегральная функция в (2.2) в точках контура трещины должна иметь особенность типа $1/r$.

Для рассматриваемого тела плотность внутренней энергии равна удельному упругому потенциалу

$$\rho U = 2a(\kappa + 1)(\kappa + 2)^{-1} J^{\kappa+2} \quad (2.11)$$

Отсюда при помощи формул (2.7) и (2.8) находим

$$\lambda = -1/(\kappa + 2) \quad (2.12)$$

В частности, в линейной задаче $\kappa = 0$ и $\lambda = -1/2$, как и было приведено выше в формулах (2.1).

Таким образом, напряжения вблизи края трещины в подчиняющемся степенному закону теле имеют особенность вида $r^{-1/(\kappa+2)}$. Функция $f(\theta)$ находится из граничной задачи (2.9), (2.10) с точностью до неопределенного множителя (если задать еще условие симметрии); последний вполне определяется дополнительным условием (2.2).

§ 3. Пластическое тело. Займемся теперь случаем несжимаемого идеального упруго-пластического тела. Предположим, что контур, отделяющий упругую область от пластической в плоскости $z = 0$ (фиг. 1), целиком охватывает конец трещины нормального разрыва и в пластической области нигде не происходит разгрузки. Тогда напряжения вблизи края трещины могут быть найдены только из уравнений равновесия и условия пластичности Мизеса $J = \tau_s$, где τ_s — предел текучести при сдвиге.

Пусть предполагаемое поле линий скольжения имеет вид, изображенный на фиг. 2.

Имеем [7,8]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pi \tau_s, & \sigma_y &= (2 + \pi) \tau_s, & \tau_{xy} &= 0 & (1/4\pi > |\theta| > 0); \\ \sigma_x &= \sigma - \tau_s \sin 2\theta, & \sigma_y &= \sigma + \tau_s \sin 2\theta & & & (3.1) \\ \tau_{xy} &= \tau_s \cos 2\theta, & \sigma &= (1 + 3/2\pi - 2\theta) \tau_s & (3/4\pi > |\theta| > 1/4\pi) \\ \sigma_x &= 2\tau_s, & \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 & (\pi > |\theta| > 3/4\pi) \end{aligned}$$

Из уравнения Прандтля — Рейсса и условия несжимаемости [7,8] определяем поле скоростей в окрестности конца трещины

$$\begin{aligned} v^{\cdot} &= f_1^{\cdot}(x-y) - f_1^{\cdot}(x+y), & u^{\cdot} &= f_1^{\cdot}(x-y) + f_1^{\cdot}(x+y) & (1/4\pi > |\theta| > 0) & (3.2) \\ u_r^{\cdot} &= f_2^{\cdot}(\theta) & u_{\theta}^{\cdot} &= f_3^{\cdot}(r) - f_2^{\cdot}(\theta) & (3/4\pi > |\theta| > 1/4\pi) \\ u^{\cdot} &= f_4^{\cdot}(x-y) + f_5^{\cdot}(x+y), & v^{\cdot} &= f_4^{\cdot}(x-y) - f_5^{\cdot}(x+y) & (\pi > |\theta| > 3/4\pi) \end{aligned}$$

Здесь f_1^{\cdot} , f_2^{\cdot} , f_3^{\cdot} , f_4^{\cdot} — произвольные функции, u_r^{\cdot} и u_{θ}^{\cdot} — составляющие вектора скорости по осям r и θ . Из физических соображений потребуем ограниченности скоростей в окрестности конца трещины. Распределение смещений вблизи конца трещины согласно (3.2) в общем случае не может быть записано в виде (1.4),

поэтому условием (1.12) в общем случае воспользоваться нельзя.

Запишем локальный закон сохранения энергии в случае плоской деформации, выполняющийся в каждой точке пластической области несжимаемого идеального упруго-пластического тела [4]

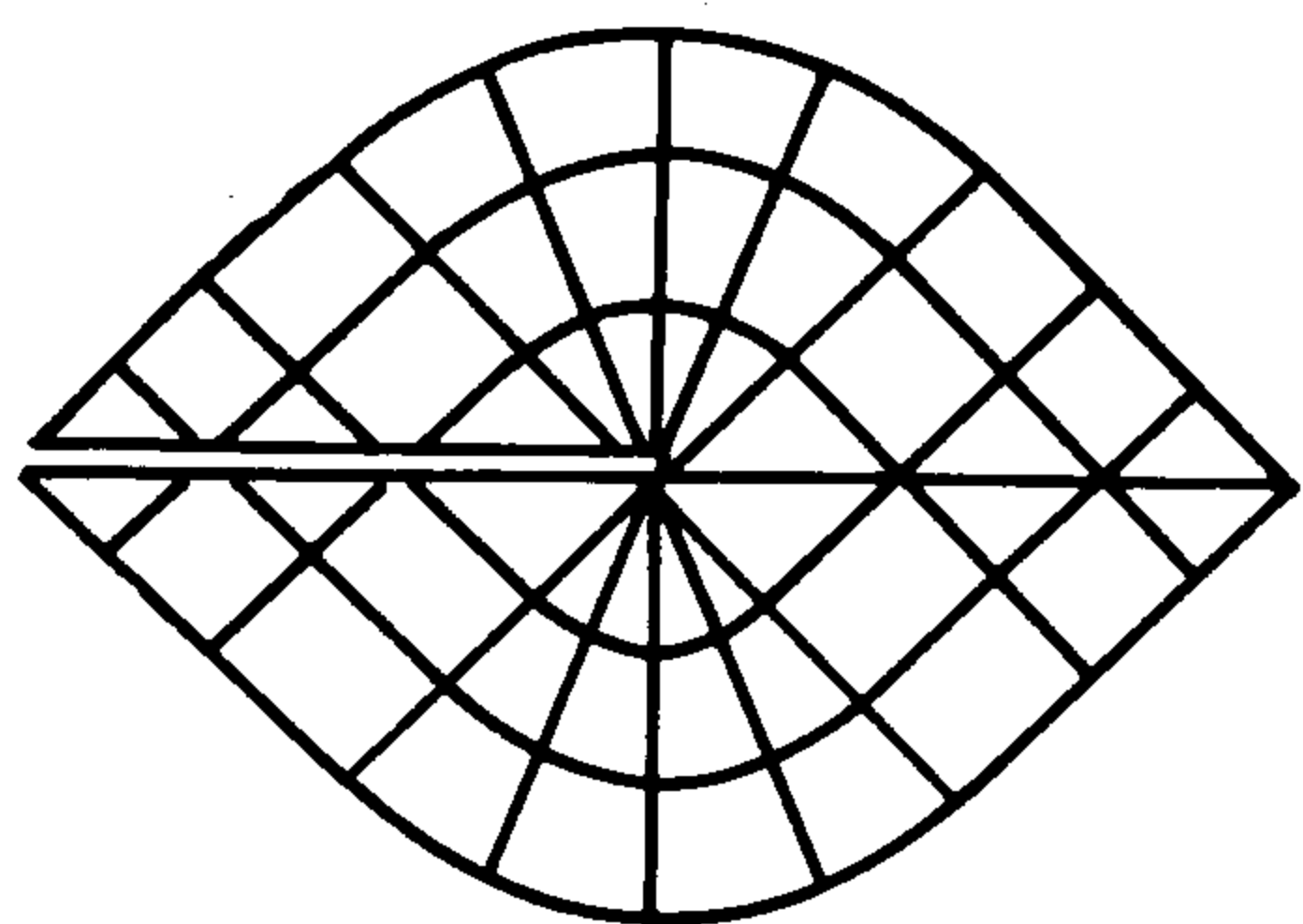
$$\tau_s \Gamma^{\cdot} + \partial q_x^{\cdot} / \partial x + \partial q_y^{\cdot} / \partial y = \rho U^{\cdot} \quad (3.3)$$

Здесь Γ — интенсивность деформаций сдвига. При помощи уравнения (3.3) и теоремы о дивергенции условие (1.2) при отсутствии объемных сил и сил инерции можно записать в виде

$$R \int_0^{2\pi} \left[(\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial l} + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial l} \right] d\theta = \tau_s \int_D \frac{\partial \Gamma}{\partial l} dx dy \quad (3.4)$$

Здесь круговая область D находится целиком в пластической области.

Рассмотрим наиболее важный частный случай пластической области, характерный линейный размер которой мал сравнительно с характерным линейным размером тела. При этом напряжения и деформации в пластической области (а также форма и размеры пластической области) будут зависеть лишь от одного параметра N , представляющего собой коэффициент интенсивности напряжений вблизи конца трещины, вычисленный из чисто упругой задачи в предположении об отсутствии пластической области. В этом случае можно применить прием, указанный выше в



Фиг. 2

п. 2° § 2, и из уравнения (3.4) получить следующее условие:

$$R\tau_s \int_0^{2\pi} \Gamma \cos \theta d\theta - R \int_0^{2\pi} \left[(\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial x} \right] d\theta = 2\gamma \quad (3.5)$$

Анализируя формулы (3.2), дающие распределение скоростей вблизи конца трещины, на основании условия ограниченности скоростей можно заключить, что [конечный] вклад в уравнение (3.5) дает только функции $f_2(\theta)$. Окончательно условие (3.5) можно записать так:

$$2R\tau_s \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \varepsilon_{r\theta} \cos \theta d\theta - R \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + \tau_{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) d\theta = \gamma \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) напряжения и смещения согласно (3.1), (3.2), находим

$$F = F_0 + \gamma / \tau_s \quad (3.7)$$

$$F = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \{ [f_2''(\theta) + f_2(\theta)] \cos \theta + (1 + 3/2\pi - 2\theta) f_2''(\theta) \sin \theta - f_2'(\theta) \sin \theta \} d\theta$$

Здесь функция F_0 равна F в начальный момент нагружения; она характеризует уровень начальных (остаточных) деформаций.

Условие (3.7) служит для определения параметра N , входящего в функцию $f_2(\theta)$, и тем самым позволяет поставить задачу о развитии трещин нормального разрыва в несжимаемых упруго-пластических телах. В формулах (3.6) и (3.7) предполагается, что радиус R области D гораздо меньше характерного линейного размера пластической области L ($R \ll L$). Заметим, что строгое обоснование концепции квазихрупкого разрушения может быть получено лишь сочетанием только что рассмотренного подхода с подходом, примененным выше в § 2 и соответствующим случаю $R \gg L$.

§ 4. Вязкоупругое тело. 1°. Рассмотрим изотропное и однородное линейное вязкоупругое тело с трещинами нормального разрыва. Процесс распространения трещин будем считать квазистатическим и изотермическим. Связь деформаций с напряжениями в этом случае может быть представлена в наиболее общем виде так [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= E^{-1}\sigma_x - E^{-1}\nu(\sigma_y + \sigma_z), & \varepsilon_y &= E^{-1}\sigma_y - E^{-1}\nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_{xy} &= E^{-1}(1 + \nu)\tau_{xy}, & E^{-1}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь E^{-1} и ν — линейные коммутирующие операторы по времени t , имеющие вид

$$E^{-1}f = \int_0^t E_0(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad \nu f = \int_0^t \nu_0(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

Функции $E_0(x)$ и $\nu_0(x)$ принадлежат классу обобщенных функций. Соотношения (4.1) написаны для условий плоской деформации, имеющей место в малой окрестности каждой точки гладкого контура трещины.

Задачи о распределении напряжений и деформаций в вязкоупругих телах с распространяющимися трещинами, контур которых изменяется во времени, являются чрезвычайно трудными при граничных условиях общего типа. Однако в одном интересном частном случае плоской деформации имеет место замечательный факт: распределение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в конечном односвязном теле из вязкоупругого материала с движущимися трещинами такое же, как и в соответствующей упругой задаче, если на границе тела заданы только нагрузки. Эта аналогия имеет место и в случае бесконечного или многосвязного тела, если главные векторы внешних усилий, приложенных к каждому из граничных контуров, в отдельности равны нулю. Аналогия легко доказывается, если написать условие совместности изображений (по Лапласу) деформаций $\Delta(\sigma_x^\circ + \sigma_y^\circ) = 0$, перейти к оригиналам $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ и вспомнить известные результаты плоской теории упругости по независимости напряженного состояния от упругих постоянных.

В частности, можно показать, что сингулярная задача о распределении напряжений и смещений вблизи контура трещины по аналогии с § 2 имеет решение:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2Nr^{-1/2} \cos(\theta/2), & \sigma_z &= 2\nu Nr^{-1/2} \cos(\theta/2) \\ \sigma_x - i\tau_{xy} &= 1/4Nr^{-1/2} [e^{-i\theta/2} + 2e^{i\theta/2} + e^{-5i\theta/2}] \\ \partial u/\partial x + i\partial v/\partial x &= 1/4r^{-1/2}E^{-1}(1+\nu) [2(3-4\nu)Ne^{-i\theta/2} + \\ &+ Ne^{5i\theta/2} - 3Ne^{i\theta/2}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом коэффициент интенсивности напряжений N в (2.1) являющийся функцией граничных условий и формы тела, в общем случае будет и функцией времени; эта функция определяется из решения задачи в целом. Если имеет место указанная выше аналогия, то, очевидно, явной зависимости N от времени не будет.

В рассматриваемом случае общее условие на контуре трещины (1.15) при отсутствии объемных сил запишется в форме

$$R \int_0^{2\pi} (\mathcal{E} \cos \theta - A_*) d\theta = 2\gamma \quad (4.4)$$

Вычисляем, используя формулы (4.1), (4.3), (1.12) и (1.14)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^t (\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\varepsilon}_{xy}) dt = \int_0^t [\sigma_x E^{-1}(1+\nu) \dot{\sigma}_x + \sigma_y E^{-1}(1+\nu) \dot{\sigma}_y - \\ &- (\sigma_x + \sigma_y) E^{-1}(1+\nu) \nu (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) + 2\tau_{xy} E^{-1}(1+\nu) \dot{\tau}_{xy}] dt \\ R \int_0^{2\pi} \mathcal{E} \cos \theta d\theta &= \pi \int_0^t NE^{-1}(1+\nu)(1-2\nu) N' dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} R \int_0^{2\pi} A_* d\theta &= \text{Im} \oint (\sigma_x - i\tau_{xy})(\partial u/\partial x + i\partial v/\partial x) dz + R \int_0^{2\pi} (\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta (\partial v/\partial x) d\theta = \\ &= -1/2\pi NE^{-1}(1+\nu)(3-2\nu)N \quad (z = Re^{i\theta}) \end{aligned}$$

Здесь контурный интеграл берется против часовой стрелки.

Окончательно условие предельного равновесия на контуре трещины нормального разрыва согласно (4.4) и (4.5) запишется так:

$$2 \int_0^t NE^{-1}(1+\nu)(1-2\nu)N' dt + NE^{-1}(1+\nu)(3-2\nu)N = \frac{4\gamma}{\pi} \quad (4.6)$$

Условие (4.6) в общем случае представляет собой, как видно, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, служащее для определения функции $N(t)$, а с ней и закона распространения трещины во времени.

В случае упругого тела, когда операторы E^{-1} и ν равны упругим постоянным: обратному модулю Юнга и коэффициенту Пуассона, — из уравнения (4.6), как легко видеть, получается условие Ирвина (2.4).

2°. В качестве иллюстративного примера рассмотрим несжимаемое обобщенное линейное тело [4]. Связь $\sigma - \varepsilon$ при растяжении стержня из такого материала имеет вид

$$\varepsilon + \zeta \dot{\varepsilon} = (3\mu)^{-1} \sigma + (3\eta)^{-1} \dot{\sigma} \quad (4.7)$$

Здесь μ — модуль сдвига, η — коэффициент вязкости, ζ — некоторая константа материала.

Нетрудно показать, что ядро $E_0(x)$ оператора E^{-1} , соответствующего телу (4.7), равно

$$E_0(x) = (3\mu)^{-1} \delta(x) + 1/3 (\eta^{-1} - \zeta\mu^{-1}) \exp(-\zeta x) \quad (4.8)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция, определяемая так:

$$\int_0^t \delta(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau = \sigma(t)$$

Для несжимаемых тел условие (4.6) имеет следующий весьма простой вид:

$$NE^{-1}N = (4\gamma) / (3\pi) \quad (4.9)$$

Нелинейное интегральное уравнение (4.9) с ядром (4.8) сводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$-4\gamma\mu\eta N' + 4\gamma\zeta\mu\eta N = \pi\eta N^2 N' + \pi\mu N^3 \quad (4.10)$$

Находим решение уравнения (4.10)

$$\frac{\pi N^2 - 4\gamma\eta\zeta}{\pi N_0^2 - 4\gamma\eta\zeta} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^\lambda e^{-\zeta\lambda(t-t_0)} \quad \text{при } t = t_0, \quad N = N_0 \left(\lambda = \frac{2\mu}{\mu + \zeta\eta}\right) \quad (4.11)$$

Кривая $N = N(t)$ согласно (4.11) имеет две асимптоты: $N = 0$ и $N = N_*$ (фиг. 3)

$$N_*^2 = 4\pi^{-1}\gamma\eta\zeta \quad (4.12)$$

Производная $N'(t)$, равная]

$$N' = \frac{\mu N (4\gamma\eta\zeta - \pi N^2)}{\eta (\pi N^2 + 4\gamma\mu)} \quad (4.13)$$

при $N > N_*$ всегда отрицательна, а при $0 < N < N_*$ всегда положительна. Поэтому кривая $N(t)$ состоит из двух участков: монотонно возрастающего ($0 < N < N_*$) и монотонно убывающего ($N > N_*$).

В частном случае тела Максвелла, получающегося из (4.7) предельным переходом $\zeta \rightarrow 0$ при конечных μ и η , формула (4.11) принимает вид

$$t - t_0 + \frac{\eta}{\mu} \ln \frac{N}{N_0} = -\frac{2}{\pi} \eta\gamma \frac{N^2 - N_0^2}{N^2 N_0^2} \quad (4.14)$$

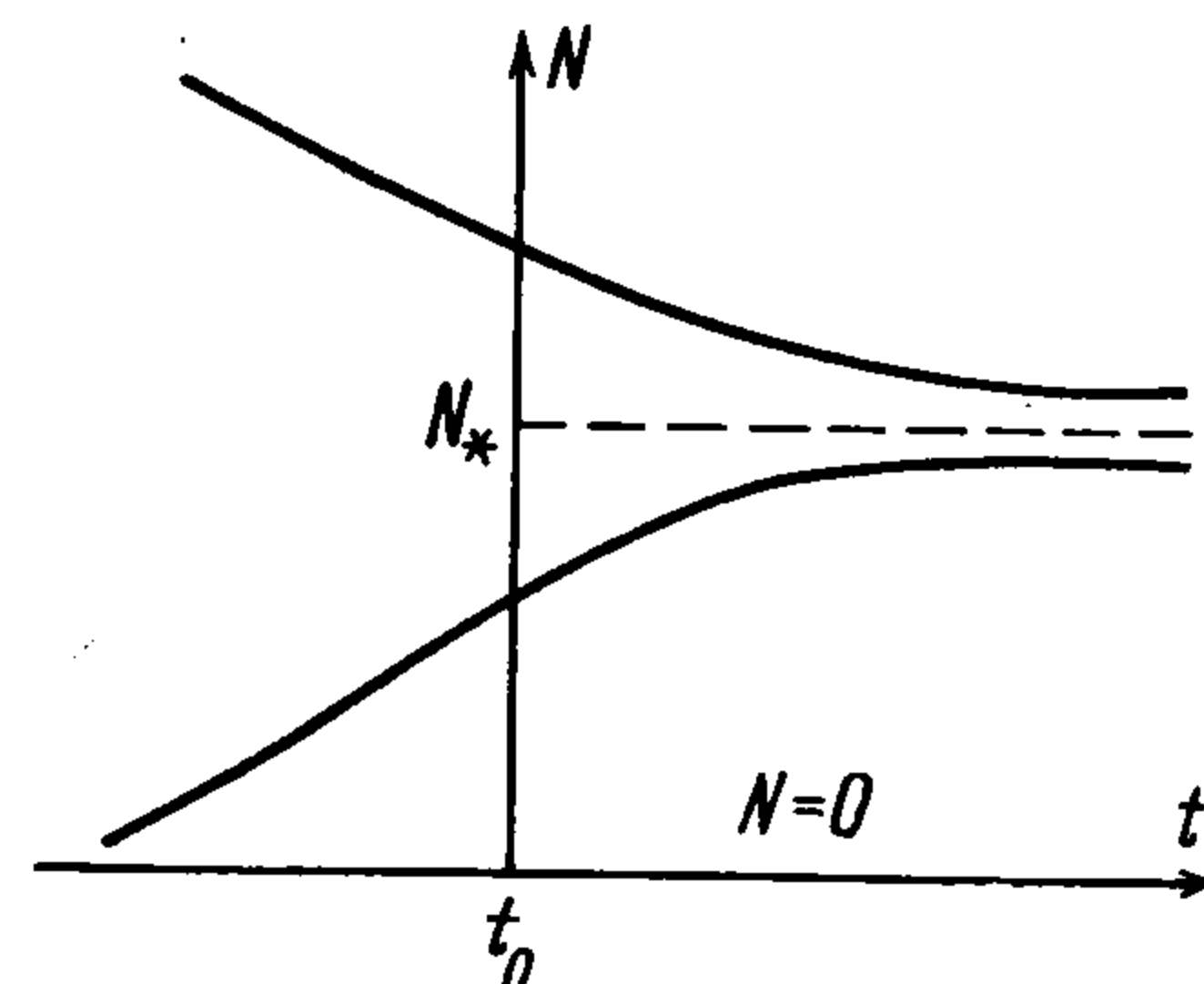
Для тела Максвелла $N_* = 0$, возрастающая ветвь исчезает, N монотонно убывает с течением времени, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$ (при $t \rightarrow -\infty$ $N \rightarrow \infty$)

В случае тела Кельвина

$$\sigma = 3\eta\varepsilon' + 3\mu\varepsilon \quad (4.15)$$

совершенно аналогично получаем

$$\frac{N^2}{N_0^2} = \frac{4\gamma\mu - \pi N^2}{4\gamma\mu - \pi N_0^2} e^{\frac{\mu}{\eta}(t-t_0)} \quad (4.16)$$



Фиг. 3

При этом кривая $N(t)$ качественно имеет тот же вид, что и в случае обобщенного линейного тела (фиг. 3), а величина N_*^2 равна $4\gamma\mu/\pi$.

Посмотрим, как развивается изолированная прямолинейная трещина длины $2l$, находящаяся в бесконечном теле, в случае постоянного растягивающего напряжения p на бесконечности (направленного перпендикулярно линии трещины) и в случае двух равных и противоположно направленных сосредоточенных сил P , приложенных к различным берегам посередине трещины. Коэффициент интенсивности напряжений N на основе указанной выше аналогии будет равным соответственно

$$N^2 = 1/2 p^2 l, \quad N^2 = 1/2 \pi^{-2} P^2 l^{-1} \quad (4.17)$$

В первом случае, если в начальный момент времени $N_0 < N_*$, то трещина растет, достигая (при $p = \text{const}$ за бесконечно большое время) критической длины $l_* = 2N_*^2 p^{-2}$ (имеется в виду тело Кельвина или обобщенное линейное тело). Если же в начальный момент времени $N_0 \geq N_*$, то трещина растет в динамическом режиме, поскольку это равновесное состояние будет неустойчивым (с увеличением p длина l согласно (4.17) уменьшается). Для максвеллова тела при любых p равновесное состояние всегда будет неустойчивым.

Во втором случае, если в начальный момент времени $N_0 < N_*$, то трещина не развивается (и уменьшается для обратимых трещин до равновесного значения $l_* = 1/2 \pi^{-2} P^2 N_*^{-2}$). Если в начальный момент $N_0 > N_*$, то трещина устойчиво растет (бесконечно долго) до равновесного значения l_* . Для максвеллова тела при любых начальных N_0 трещина будет устойчиво расти до бесконечно большой длины.

Нетрудно видеть, что и в произвольном случае, если иметь в виду характерные времена приложения нагрузок, большие сравнительно с временем релаксации $\theta = \mu/\eta$, то тело Максвелла будет разрушаться при любой конечной нагрузке, а трещины в линейном обобщенном теле или теле Кельвина будут развиваться точно так же, как в линейно-упругом теле (если выполнены условия аналогии), причем предельное значение N для тела Кельвина $2\sqrt{\gamma\mu}/\pi$ совпадает с соответствующей предельной величиной для несжимаемого упругого тела, а для обобщенного линейного тела оно равно $2\sqrt{\gamma\eta\zeta}/\pi$.

Заметим, что изучение кинетики роста трещин было предпринято ранее Л. М. Качановым [10] и М. Л. Вильямсом [11], применявшими менее строгий подход.

Поступила 24 I 1967

Ин-т проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, A 221.
2. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24.
3. Irwin G. R. Fracture, in «Handbuch der Physik», B. VI, Springer — Berlin, 1958.
4. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., Гл. ред. общетехн. лит-ры и номогр. 1935.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1950.
9. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. Качанов Л. М. К кинетике роста трещин. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
11. Williams M. L. The Fracture of Viscoelastic Material, in «Fracture of Solids», N.-Y. 1963, vol. 20.