Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ В СОЕДИНЕННЫХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛАХ И ИХ СВЯЗИ С РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ТРЕЩИН ПО ЛИНИИ СОЕДИНЕНИЯ

Р. В. Гольдштейн

(Москва)

Рассмотрим упругое тело, составленное из двух материалов с различными упругими свойствами. Предположим, что линия соединения — горизонтальная и условия контакта вдоль этой линии всюду одинаковы. Среди различных комбинаций условий контакта возможны следующие: 1) полное сцепление (непрерывность нормальных и касательных напряжений и вертикальных и горизонтальных смещений); 2) налегание без трения (непрерывность нормальных напряжений и вертикальных смещений при обращении в нуль касательных напряжений); 3) непроскальзывание с возможным отставанием (непрерывность касательных напряжений и горизонтальных смещений и отсутствие нормальных напряжений).

Хорошо известно, что в соединенных материалах при условиях полного сцепления могут, вообще говоря, распространяться вдоль линии соединения поверхностные волны — волны Стоунли [1]. Вопрос о существовании этих волн при произвольных свойствах соединенных материалов рассмотрен в работах [2, 3].

В предлагаемой работе (§ 1) исследованы поверхностные волны, распространяющиеся в соединенных материалах вдоль границы соединения в случаях налегания и непроскальзывания с возможным отставанием.

Поверхностные волны в налегающих телах так же, как и волны Стоунли, существуют не при любых соотношениях между свойствами упругих материалов, а поверхностные волны в непроскальзывающих телах существуют всегда. Скорость и тех и других поверхностных волн заключена между меньшей из релеевских скоростей и меньшей из скоростей звука соединенных материалов.

Отметим, что ранее исследовалось отражение и преломление упругих волн на линии соединения двух полупространств при условиях контакта типа (2) в работах [4, 5, 6] и типа (3) в работе [6].

Скорости поверхностных волн в налегающих и непроскальзывающих телах — характерные скорости в задачах о движении трещин по границе соединения. В работе [7] было показано, что при стационарном движении трещины нормального разрыва по границе соединения, когда на продолжении трещины имеет место полное сцепление, помимо скоростей звуковых волн, выделяются еще пять характерных скоростей, переход через которые приводит к изменению характера распределения напряжений в окрестности конца трещины. Эти скорости суть скорости поверхностных волн Релея в каждом из полупространств; скорость волн Стоунли и, наконец, еще две скорости, которые, как будет видно, совпадают со скоростями c_e и c_g поверхностных волн в налегающих и непроскальзывающих телах соответственно.

В связи с этим в § 2 предлагаемой работы рассматривается стационарное движение «полубесконечной» трещины нормального разрыва по границе полностью соединенных материалов под действием касательных и нормальных сосредоточенных нагрузок, когда скорость трещины c совпадает со скоростями поверхностных волн в налегающих и непроскальзывающих телах.

Оказывается, что, как в случае продвижения трещины нормальными нагрузками, так и при действии только касательных нагрузок, если $c = c_e$ или $c = c_g$, то перед нагрузкой не может быть участка свободной трещины.

Отмечено интересное свойство скоростей c_e и c_g. Если два свободных упругих полупространства деформируются одинаковыми нормальными поверхностными нагрузками, движущимися со скоростью c_e, то смещения границ таковы, что эти полупространства могут быть вложены одно в другое с соблюдением условий налегания на границе соединения. Аналогичная картина имеет место при действии на границы свободных полупространств одинаковых касательных нагрузок, перемещающихся со скоростью c_g. Оба полупространства могут быть приведены в контакт так, что на границе будут выполняться условия непроскальзывания.

§ 1. 1.1°. Предположим, что упругое тело составлено из двух соединенных вдоль оси x полупространств с различными упругими свойствами. Все величины, относящиеся к верхнему ($y \geqslant 0$) и нижнему ($y \leqslant 0$) полупространствам, будем снабжать индексами 1 и 2 соответственно. Будем считать, что на линии контакта выполняются условия налегания:

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \quad v_1 = v_2, \quad \tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0 \quad (y = 0, \ -\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

Здесь σ_y, τ_{xy} — нормальное и касательное напряжения, а v — вертикальное смещение точек граничной поверхности.

Таким образом, горизонтальные смещения могут претерпевать разрыв на линии соединения, т. е. полупространства могут проскальзывать одно вдоль другого без трения. Такой вид соединения может быть, например, в том случае, когда упругие тела накладываются одно на другое и на линии контакта отсутствует трение.

Поверхностные волны в упругом теле, составленном из двух налегающих полупространств, будем искать точно так же, как в работе [2] ищутся поверхностные волны в соединенных материалах при условии полного сцепления ($\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$, $\tau_{xy1} = \tau_{xy2}$, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$) на границе раздела, пользуясь методом комплексных решений волнового уравнения В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [8].

Если ввести скалярные $\varphi_{1,2}$ и векторные $\psi_{1,2}$ потенциалы, удовлетворяющие волновым уравнениям (1.2)

$$a_i^2 \Delta\varphi_i = \varphi_{itt}, \quad b_i^2 \Delta\psi_i = \psi_{itt}, \quad a_i^2 = (\lambda_i + 2\mu_i)/\rho_i, \quad b_i^2 = \mu_i/\rho_i \quad (i = 1, 2)$$

то граничные условия налегания (1.1) перепишутся следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right] = 0 \tag{1.3}$$

$$\mu_1\left[\left(\frac{a_1^2}{b_1^2} - 2\right)\Delta\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\right] - \mu_2\left[\left(\frac{a_2^2}{b_2^2} - 2\right)\Delta\varphi_2 + 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y}\right] = 0$$

$$2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = 0$$

Следуя [2,8], будем искать потенциалы φ_i, ψ_i в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = N_1 f(pt + \alpha x + iy\omega_{a1}), \qquad \psi_1 = N_2 f(pt + \alpha x + iy\omega_{b1}) \\ &\varphi_2 = N_3 f(pt + \alpha x - iy\omega_{a2}), \qquad \psi_2 = N_4 f(pt + \alpha x - iy\omega_{b2}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\omega_{aj} = (\alpha^2 - p^2/a_j^2)^{1/2}, \qquad \omega_{bj} = (\alpha^2 - p^2/b_j^2)^{1/2} \quad (j = 1, 2)$$

Здесь $N_1, \ldots, N_4$ — постоянные, а f — функция комплексного переменного, регулярная в верхней полуплоскости, и такая, что ее производная обращается в нуль на бесконечности. Это обеспечит затухание колебаний при удалении от границы раздела $y = 0$, т. е. колебания будут представлять собой поверхностную волну. Кроме того, будем предполагать, что скорость волны не превосходит наименьшей из скоростей звука соединенных материалов.

Подставляя (1.4) в (1.3), получим однородную систему линейных уравнений для определения четырех постоянных $N_1, \ldots, N_4$. Для того чтобы существовало нетривиальное решение этой системы, а следовательно, и собственное колебание налегающих тел, необходимо и достаточно обращение в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} \mu_1\Omega_{b1} & -2\mu_1 i\alpha\omega_{b1} & -\mu_2\Omega_{b2} & -2\mu_2 i\alpha\omega_{b2} \\ 2i\alpha\omega_{a1} & \Omega_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\alpha\omega_{a2} & -\Omega_{b2} \\ i\omega_{a1} & -\alpha & i\omega_{a2} & \alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.5)$$

$$\Omega_{bj} = p^2 / b_j^2 - 2\alpha^2 \qquad (j = 1, 2)$$

В развернутом виде условие (1.5) имеет вид

$$\mu_2 (p^2 / b_1^2)\, \omega_{a1} [\Omega_{b2}^2 - 4\alpha^2\omega_{a2}\omega_{b2}] + \mu_1 (p^2 / b_2^2)\, \omega_{a2} [\Omega_{b1}^2 - 4\alpha^2\omega_{a1}\omega_{b1}] = 0 \quad (1.6)$$

С учетом обозначений (1.4) и (1.5) для ω и Ω это условие представляет собой уравнение для определения скорости поверхностных волн в налегающих телах. Левая часть уравнения (1.6) совпадает с общим знаменателем коэффициентов отражения и преломления упругих волн на линии соединения проскальзывающих упругих материалов, приведенным в работе [5].

1.2°. Обозначим $(p / |\alpha|) = c$ и представим (1.6) в виде

$$E(c) \equiv \mu_2 n_1^2 \sqrt{1 - m_1^2}\, R_2(c) + \mu_1 n_2^2 \sqrt{1 - m_2^2}\, R_1(c) = 0$$

$$R_j(c) = (2 - n_j^2)^2 - 4\sqrt{1 - m_j^2}\sqrt{1 - n_j^2}$$

$$m_j = c / a_j, \quad n_j = c / b_j \qquad (j = 1, 2) \qquad (1.7)$$

Здесь $R_j(c)$ — функция Релея для j-го полупространства. Корни c_R^j уравнений $R_j(c) = 0$ — скорости поверхностных волн Релея в каждом из соединенных полупространств.

Выясним теперь, при каких условиях уравнение (1.7) имеет корни в интервале изменения c от 0 до b_1 (без ограничения общности можно считать, что $b_1 < b_2$ и $c_{R1} < c_{R2}$). Можно показать (так же, как это делается [2] для уравнения, определяющего скорость волн Стоунли), что уравнение (1.7) не может иметь более одного корня в интервале $(0, b_1)$. Нетрудно видеть далее, что при $0 \leqslant c \leqslant c_{R1}$ уравнение (1.7) корней не имеет. В самом деле, $R_1 \leqslant 0$ при $c \leqslant c_{R1}$, а $R_2 \leqslant 0$ при $c \leqslant c_{R2}$, поэтому $E(c) < 0$, когда $c \leqslant c_{R1}$. Таким образом, если корень c_e существует, то он расположен между c_{R1} и b_1. Необходимым и достаточным условием существования корня уравнения (1.7), определяющего скорость поверхностных волн в налегающих телах, будет условие

$$E(b_1) > 0 \qquad (1.8)$$

Это условие выполняется, например, тогда, когда упругие свойства соединенных материалов не сильно отличаются и имеет место следующее соотношение между скоростями поверхностных и поперечных волн в первом и во втором полупространствах: $c_{R1} < c_{R2} < b_1 < b_2$. В этом случае $E(b_1) > 0$, так как $R_2 > 0$ при $(c > c_{R2})$, а $R_1 > 0$ при $c > c_{R1}$. Более того, при указанном соотношении между характерными скоростями корень c_e расположен между релеевскими скоростями c_{R1} и c_{R2}, так как $E(c_{R1}) < 0$, а $E(c_{R2}) > 0$. В частности, если упругое тело состоит из двух налегающих полупространств из одного и того же материала, то $c_{R1} = c_{R2}$ и скорость c_e просто совпадает со скоростью c_R релеевских волн в этом материале. С другой стороны, если свойства материалов резко отличаются, например, один из них, скажем, второй абсолютно жесткий, то $E(b_1) < 0$ и уравнение (1.7) корня не имеет. Это значит, что в случае налегания упругого тела на абсолютно жесткое вдоль границы не могут распространяться поверхностные волны.

1.3°. Будем искать теперь поверхностные волны в соединенных материалах при иных, чем в 1.1°, 1.2°, условиях контакта. Пусть на линии соединения

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2}, \quad u_1 = u_2, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2} = 0 \qquad (y = 0, \ -\infty < x < \infty) \tag{1.9}$$

При таких условиях материалы могут отходить друг от друга, но не могут проскальзывать.

Это можно представить следующим образом. Предположим, что в каждом из полупространств имеется ряд небольших отверстий, выходящих на границу и к ней перпендикулярных. Пусть материалы налегают так, что отверстия расположены друг против друга и в каждую пару противолежащих отверстий вставлен без трения тонкий жесткий стержень. При таком способе соединения стержни исключат возможность проскальзывания материалов одного вдоль другого, но не будут препятствовать отставанию одного материала от другого.

Условия контакта в потенциалах запишутся следующим образом:

$$\mu_1\left[2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right] - \mu_2\left[2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right] = 0 \tag{1.10}$$

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1^2} - 2\right)\Delta\varphi_1 + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \left(\frac{a_2^2}{b_2^2} - 2\right)\Delta\varphi_2 + 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y} = 0$$

Если опять искать потенциалы в виде (1.4), то необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \mu_1 2i\alpha\omega_{a1} & \mu_1\Omega_{b1} & \mu_2 2i\alpha\omega_{a2} & -\mu_2\Omega_{b2} \\ \alpha & i\omega_{b1} & -\alpha & i\omega_{b2} \\ \Omega_{b1} & -2i\alpha\omega_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{b2} & 2i\alpha\omega_{b2} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.11}$$

или после раскрытия определителя с учетом обозначений (1.4) и (1.5) и затем переобозначений ($[p\ /\ |\alpha|\ ] = c$) будем иметь

$$G(c) \equiv \mu_2 n_1^2 \sqrt{1 - n_1^2}\, R_2(c) + \mu_1 n_2^2 \sqrt{1 - n_2^2}\, R_1(c) = 0 \tag{1.12}$$

Легко видеть, что уравнение (1.12) имеет единственный корень c_g в интервале $(0, b_1)$ тогда и только тогда, когда

$$G(b_1) \geqslant 0 \tag{1.13}$$

Так как $G(b_1) = \mu_1 (b_1^2 / b_2^2) \sqrt{1-(b_1^2/b_2^2)} \geqslant 0$, то это условие всегда выполняется.

Таким образом, при любых соотношениях между упругими свойствами материалов, соединенных без проскальзывания, но с возможным отставанием, вдоль границы соединения могут распространяться поверхностные волны со скоростью c_g, определяемой уравнением (1.12).

§ 2. Скорости c_e и c_g поверхностных волн в налегающих и в непроскальзывающих телах оказываются характерными скоростями в задачах о распространении трещин по границе соединения различных типов.

Рассмотрим в качестве примера задачу о стационарном движении полубесконечной трещины нормального разрыва, продвигаемой по границе нормальными или касательными сосредоточенными нагрузками, когда на продолжении трещины имеет место полное сцепление.

Можно показать [7], что преобразования Фурье напряжений и смещений в верхнем и нижнем полупространствах на границе связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
\alpha U_1^- &= -\alpha U_1^+ + iA_1\Sigma_{y1}^+ + B_1\mathrm{T}_{xy1}^+ + (iA_1\Sigma_{y1}^- + B_1\mathrm{T}_{xy1}^-)\\
\alpha V_1^- &= -\alpha V_1^+ + C_1\Sigma_{y1}^+ - iA_1\mathrm{T}_{xy1}^+ + (C_1\Sigma_{y1}^- - iA_1\mathrm{T}_{xy1}^-) \qquad (\alpha > 0)\\
\alpha U_2^- &= -\alpha U_2^+ + iA_2\Sigma_{y2}^+ - B_2\mathrm{T}_{xy2}^+ + (iA_2\Sigma_{y2}^- - B_2\mathrm{T}_{xy2}^-)\\
\alpha V_2^- &= -\alpha V_2^+ - C_2\Sigma_{y2}^+ - iA_2\mathrm{T}_{xy2}^+ + (-C_2\Sigma_{y2}^- - iA_2\mathrm{T}_{xy2}^-)\\
\alpha U_1^- &= -\alpha U_1^+ + iA_1\Sigma_{y1}^+ - B_1\mathrm{T}_{xy1}^+ + (iA_1\Sigma_{y1}^- - B_1\mathrm{T}_{xy1}^-)\\
\alpha V_1^- &= -\alpha V_1^+ - C_1\Sigma_{y1}^+ - iA_1\mathrm{T}_{xy1}^+ + (-C_1\Sigma_{y1}^- - iA_1\mathrm{T}_{xy1}^-) \qquad (\alpha < 0)\\
\alpha U_2^- &= -\alpha U_2^+ + iA_2\Sigma_{y2}^+ + B_2\mathrm{T}_{xy2}^+ + (iA_2\Sigma_{y2}^- + B_2\mathrm{T}_{xy2}^-)\\
\alpha V_2^- &= -\alpha V_2^+ + C_2\Sigma_{y2}^+ - iA_2\mathrm{T}_{xy2}^+ + (C_2\Sigma_{y2}^- - iA_2\mathrm{T}_{xy2}^-)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$A_j = \frac{2\sqrt{1-m_j^2}\sqrt{1-n_j^2}-(2-n_j^2)}{\mu_j R_j}, \qquad B_j = \frac{n_j^2\sqrt{1-n_j^2}}{\mu_j R_j}, \qquad C_j = \frac{n_j^2\sqrt{1-m_j}}{\mu_j R_j}$$
$$(j = 1, 2)$$

Здесь c — скорость конца трещины.

Большие буквы U, V, Σ, Т суть обозначения преобразований Фурье соответствующих величин, α — параметр преобразования. Индексами (+) и (—) помечены преобразования Фурье функций, совпадающих с искомыми при $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$ соответственно, а при других значениях x, равных нулю. $U^\pm$, $V^\pm$, $\Sigma^\pm$, $\mathrm{T}^\pm$ представляют собой предельные значения на действительной оси функций комплексного переменного $\zeta = \alpha + i\gamma$, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях плоскости ζ соответственно.

2.1°. Сперва рассмотрим случай продвижения трещины нормальными к границе соединения сосредоточенными силами. На линии $y = 0$ имеют место условия

$$\begin{aligned}
&\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = -Q\delta(x+l), \qquad \tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0 \qquad (x<0)\\
&u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2, \qquad \tau_{xy1} = \tau_{xy2}, \qquad \sigma_{y1} = \sigma_{y2} \qquad (x>0)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В работе [7] было показано, что в этой задаче переход через скорости c_e и c_g связан с изменением типа особенности напряжений в окрестности конца трещины. Посмотрим, что происходит, когда скорость c трещины совпадает со скоростью c_e поверхностных волн в налегающих телах.

Из системы (2.1), используя преобразования Фурье граничных условий и условий сцепления (2.2), получаем (2.3)

$$\alpha (V_1^- - V_2^-) = (C_1 + C_2) \Sigma_{y1}^+ - i (A_1 - A_2) T_{xy1}^+ + (G_1 - G_2)$$

$$\alpha (U_1^- - U_2^-) = i (A_1 - A_2) \Sigma_{y1}^+ + (B_1 + B_2) T_{xy1}^+ + (F_1 - F_2)$$

$$\alpha V_2^- = -\alpha V_1^+ - C_2\Sigma_{y1}^+ - iA_2 T_{xy1}^+ + G_2, \quad \alpha U_2^- = -\alpha U_1^+ + iA_2\Sigma_{y1}^+ - B_2 T_{xy1}^+ + F_2$$

$$(\alpha > 0)$$

$$\alpha (V_1^- - V_2^-) = -(C_1 + C_2) \Sigma_{y1}^+ - i (A_1 - A_2) T_{xy1}^+ - (G_1 - G_2)$$

$$\alpha (U_1^- - U_2^-) = i (A_1 - A_2) \Sigma_{y1}^+ - (B_1 + B_2) T_{xy1}^+ + (F_1 - F_2)$$

$$\alpha V_2^- = -\alpha V_1^+ + C_2\Sigma_{y1}^+ - iA_2 T_{xy1}^+ - G_2, \quad \alpha U_2^- = -\alpha U_1^+ + iA_2\Sigma_{y1}^+ + B_2 T_{xy1}^+ + F_2$$

$$(\alpha < 0)$$

Здесь

$$G_1 = -QC_1 e^{-i\alpha l}, \qquad G_2 = QC_2 e^{-i\alpha l}, \qquad F_j = -iQA_j e^{-i\alpha l} \qquad (j = 1, 2)$$

Если скорость трещины $c = c_e$, то, в силу (1.7) и (2.1),

$$C_1 + C_2 = E(c)/\mu_1\mu_2 R_1 R_2 = 0$$

и первая пара соотношений (2.3) принимает вид

$$\alpha (V_1 - V_2)^- = -i (A_1 - A_2) T_{xy1}^+ \qquad (-\infty < \alpha < \infty) \tag{2.4}$$

Требование интегрируемости напряжений в конце трещины (отсутствие сосредоточенных в конце трещины сил) приводит к условию $T_{xy1}^+ \to 0$ при $\alpha \to \infty$, поэтому из (2.4) следует, что $T_{xy1}^+ = 0$ и $V_1^- - V_2^- = 0$. Это означает, что при $c = c_e$ касательные напряжения на продолжении трещины отсутствуют $\tau_{xy} = 0$ $(x > 0)$, и вертикальные смещения берегов трещины совпадают $v_1 = v_2$ $(x < 0)$, т. е. один берег трещины налегает на другой. Теперь из второй пары соотношений (2.3) имеем

$$\alpha (U_1 - U_2)^- = i (A_1 - A_2) \Sigma_{y1}^+ - iQ (A_1 - A_2) e^{-i\alpha l} \qquad (-\infty < \alpha < \infty) \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что $i (A_1 - A_2)\Sigma_{y1}^+$ и $\alpha (U_1 - U_2)^-$ равны предельным значениям интеграла типа Коши

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iQ (A_1 - A_2) e_2^{-itl}\, dt}{t - \zeta} \tag{2.6}$$

при стремлении $\zeta = \alpha + i\gamma$ к действительной оси (линии интегрирования) сверху и снизу соответственно. Легко видеть, что $W^+ = 0$, $W^- = i (A_1 - A_2) Q^{-i\alpha l}$. Таким образом, $\Sigma_{y1}^+ = 0$, и так как $U_1^+ - U_2^+ = 0$, то $\alpha (U_1 - U_2) = -iQ (A_1 - A_2) e^{-i\alpha l}$. Вычисляя обращение и учитывая условия сцепления на продолжении трещины, получаем

$$u_1 - u_2 = -Q (A_1 - A_2) \text{ при } x < -l; \; u_1 - u_2 = 0 \text{ при } x > -l \tag{2.7}$$

Далее, $\sigma_{y1} = 0$ при $x > 0$ и вместе с граничным условием (2.2) на берегах трещины это означает, что нормальные напряжения на линии соединения отличны от нуля только в точке, где находится в данный момент движущаяся сосредоточенная нагрузка.

Вычислим вертикальные смещения точек линии соединения. Так как $V_1^- = V_2^-$ и $T_{xy1}^+ = \Sigma_{y1}^+ = 0$, то третью пару соотношений (2.3) можно записать в виде

$$\alpha V_1 = QC_2 e^{-i\alpha l} \quad (\alpha > 0), \qquad \alpha V_1 = -QC_2 e^{-i\alpha l} \quad (\alpha < 0) \tag{2.8}$$

Отсюда после обращения получаем

$$v_1(x, 0) = v_2(x, 0) = -\frac{QC_2}{\pi} \ln |x + l| + \text{const} \tag{2.9}$$

Таким образом, распределение вертикальных смещений точек границы соединения имеет такой же вид, как и в задаче о действии сосредоточенной силы на полупространство. Для горизонтальных смещений имеет место аналогичная картина. Как и в случае действия нормальной сосредоточенной силы на полупространство, горизонтальные смещения на границе соединения в первом и во втором полупространствах справа и слева от точки приложения нагрузок ($x = -l$) принимают постоянные значения. При этом, как показывает формула (2.7), при $x > -l$ значения u_1 и u_2 совпадают (следствие условий полного сцепления на продолжении трещины), а при $x < -l$ разность горизонтальных смещений постоянна.

Таким образом, если скорость движения нормальных нагрузок, поддерживающих трещину, совпадает со скоростью c_e поверхностных волн в налегающих телах, то перед точкой приложения нагрузок $x = -l$ автоматически выполняются условия полного сцепления. Впереди нагрузок не может быть участка свободной трещины (т. е. $l = 0$). В самом деле, в конце распространяющейся трещины должно происходить поглощение энергии, необходимой для разрушения материала. Если же скорость трещины $c = c_e$, то в окрестности конца трещины $x = 0$ напряжения отсутствуют (в предположении, что $l \neq 0$) и поток энергии в кончике равен нулю. Таким образом, при $c = c_e$ вершина трещины совпадает с точкой приложения нагрузок.

Берега трещины налегают один на другой и распределение напряжений и смещений в каждом из полупространств на границе соединения такое же, как и в случае движения по свободной границе соответствующего полупространства со скоростью c_e нормальной нагрузки, такой же, как и приложенная к соответствующему берегу трещины. Это означает, что трещина нормального разрыва при $c = c_e$ перестает существовать. Нормальными к границе соединения разрывающими нагрузками, движущимися со скоростью $c = c_e$, нельзя отделить материалы друг от друга. Деформирование каждого из двух соединенных полупространств происходит так, что одно из них вкладывается в другое. При этом, как следует из (2.9), в первом полупространстве под сжимающей нагрузкой произойдет поднятие поверхности, а во втором — провал. Последнее обстоятельство связано с тем, что скорость поверхностных волн в налегающих телах для первого материала — сверхрелеевская ($c_e > c_{R1}$), а для второго — дорелеевская ($c_e < c_{R2}$). Известно [9, 10], что переход через релеевскую скорость в стационарных задачах о движении нагрузок и штампов по свободной границе полупространства приводит к изменению знака смещений и напряжений.

Предположим теперь, что скорость c конца трещины равна скорости c_g поверхностных волн в непроскальзывающих телах. При этом, как видно из (1.12) и (2.1),

$$B_1 + B_2 = G(c) / \mu_1\mu_2 R_1(c) R_2(c) = 0$$

Из (2.3) тогда имеем, в частности, соотношение

$$\alpha (U_1 - U_2)^- = i (A_1 - A_2) \Sigma_{y1}^+ - iQ (A_1 - A_2) e^{-i\alpha l} \qquad (-\infty < \alpha < \infty) \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что $\Sigma_{y1}^+ = 0$, т. е. нормальные напряжения на продолжении трещины отсутствуют, и что

$$\alpha (U_1 - U_2) = - i (A_1 - A_2) Q e^{-i\alpha l}$$

т. е. разность горизонтальных смещений постоянна

$$u_1 - u_2 = - Q (A_1 - A_2) \quad \text{при } x < -l; \qquad u_1 = u_2 \quad \text{при } x > -l$$

Можно показать, что в этом случае касательные напряжения на продолжении трещины отличны от нуля и не имеют особенности в вершине трещины

$$\tau_{xy1} = Q (C_1 + C_2) / \pi (A_1 - A_2)(x + l) \qquad \text{при } x > 0$$

Далее, разность вертикальных смещений берегов трещины равна

$$v_1 - v_2 = Q (C_1 + C_2) / \pi \ln | x + l | + \text{const}$$

Так как в окрестности конца трещины $x = 0$ в предположении, что $l \neq 0$, напряжения конечны, то поток энергии в вершине трещины равен нулю. Это означает (так же, как и в случае $c = c_e$), что стационарное движение трещины нормального разрыва со скоростью $c = c_g$ по границе соединения возможно только, если впереди нормальных нагрузок, продвигающих трещину, нет участка свободной трещины ($l = 0$).

2.2°. Предположим, что трещина нормального разрыва продвигается сосредоточенными силами величины Q, направленными вдоль линии соединения. Пусть на продолжении трещины выполняются условия полного сцепления, тогда имеем при $y = 0$

$$\begin{array}{ll}\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = -Q\delta(x+l), \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2} = 0 & (x<0)\\ \sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \quad \tau_{xy1} = \tau_{xy2}, \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 & (x>0)\end{array} \tag{2.11}$$

Преобразования Фурье напряжений и смещений на границе связаны соотношениями, аналогичными (2.3). Пусть $c = c_g$, тогда, как и в п. 2.1°, можно показать, что нормальные и касательные напряжения на продолжении трещины равны нулю $\sigma_{y1}=0, \tau_{xy1}=0$ $(x>0)$, горизонтальные смещения совпадают вдоль всей линии соединения

$$u_1 = u_2 = -(QB_2 / \pi) \ln |x + l| + \text{const}$$

вертикальные смещения границы каждого из полупространств постоянны справа и слева от точки приложения нагрузок и их разность

$$v_1 - v_2 = Q(A_1 - A_2) \quad \text{при } x < -l, \qquad v_1 - v_2 = 0 \text{ при } x > -l$$

Если же $c = c_e$, то касательные напряжения на продолжении трещины отсутствуют $\tau_{xy1} = 0$ $(x > 0)$, нормальные напряжения не имеют особенности в конце трещины

$$\sigma_{y1} = -Q(B_1 + B_2) / \pi (A_1 - A_2)(x + l) \quad \text{при } x > 0$$

разность горизонтальных смещений берегов трещины равна

$$u_1 - u_2 = (QB_1 / \pi) \ln |x + l| + \text{const} \quad (x < 0)$$

разность вертикальных смещений — постоянна

$$v_1 - v_2 = Q(A_1 - A_2) \text{ при } x < -l, \text{ и } v_1 - v_2 = 0 \text{ при } x > -l$$

Таким образом, как и в случае продвижения трещины нормальными нагрузками, стационарное движение трещины под действием касательных нагрузок со скоростями c_e и c_g возможно лишь тогда, когда нагрузка находится в вершине трещины.

Роль скорости c_g в случае действия касательных нагрузок такая же, как и скорости c_e в случае действия нормальных нагрузок. Если два различных свободных упругих полупространства подвержены действию одинаковых поверхностных касательных нагрузок, движущихся со скоростью c_g, то деформирование каждого из них происходит таким образом, что они могут быть вложены одно в другое, причем на линии соединения будут выполняться условия непроскальзывания, а впереди точек приложения нагрузок — еще и условия полного сцепления.

Поступила 30 X 1966 НИИ Механики Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. S t o n e l e y R. Elastic waves at the surface of separation of two solides. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1924, vol. 106, pp. 416.
2. Г о г о л а д з е В. Г. Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн Релея. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1947, № 125.
3. S c h o l t e J. G. J. Rayleigh waves in isotropic and anisotropic elastic media. Mededelingen en Verhandelingen Koninklijk Nederlands Meteorologisch Institute, 1958, № 72.
4. K ü h n G. J., L u t s c h A. Elastic wave mode conversion at a solid — solid boundary with transverse slip. J. Acoust. Soc. America, 1961, vol. 33, No 7.
5. П о д ъ я п о л ь с к и й Г. С. Отражение и преломление на границе двух упругих сред в случае нежесткого контакта. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 4.
6. K ü h n G. J. Symmetry of energy-transfer ration for elastic waves at a boundary between two media. J. Acoust. Soc. America., 1964, vol. 36, No. 3.
7. Г о л ь д ш т е й н Р. В. О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов. Инж. ж, МТТ, 1966, № 5.
8. С о б о л е в. С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Франк Ф., Мизес Р. «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики», ч. 2, гл. 12, М.— Л., ОНТИ, 1937.
9. Б а р е н б л а т т Г. И., Ч е р е п а н о в Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
10. Г о л ь д ш т е й н Р. В. Волны Релея и резонансные явления в упругих телах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.