Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

К ЗАДАЧЕ ОБ УСПОКОЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Н. Н. Красовский, Ю. М. Репин

(Свердловск)

§ 1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнением

$$dx/dt = Ax + bu \tag{1.1}$$

где x — n-вектор фазовых координат x_i, u — скалярное управление, A — постоянная $(n \times n)$-матрица, b — постоянный n-вектор. Задача состоит в выборе управления $u(t)$ $(t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta)$, которое переводит систему (1.1) из состояния $x(t_\alpha) = x^\alpha$ в положение равновесия $x(t_\beta) = 0$. Этой известной задаче посвящена большая библиография (см., например, работы [1-6]). В предлагаемой статье задача рассматривается в предположении, что управления u описываются обобщенными функциями. Этот выбор класса допускаемых воздействий u, естественно, укладывается в рамки того подхода к задачам об управлении, который предложен в статье [6]. В самом деле, полагая сначала $u(t)$ интегрируемой функцией, запишем по формуле Коши [7]

$$x(t_\beta) = X[t_\beta, t_\alpha]\, x^\alpha + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} H[t_\beta, \tau]\, u(\tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

где $X[t, t_0] = \exp A(t - t_0) = \{x_{ij}(t, t_0)\}$ — фундаментальная матрица системы (1.1) (при $u(t) \equiv 0$),

$$H[t_\beta, \tau] = \{h^{(i)}(\tau)\} = X[t_\beta, \tau]\, b$$

Компоненты второго слагаемого в правой части равенства (1.2) удобно трактовать, как значения линейного функционала $\varphi_u[h^{(i)}]$ на функциях $h^{(i)}(\tau)$. Поэтому запишем векторное равенство (1.2) в координатах следующим образом:

$$x_i(t_\beta) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t_\beta, t_\alpha)\, x_j^\alpha + \varphi_u[h^{(i)}(\tau)] \tag{1.3}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Функции $h^{(i)}(\tau)$ $(t_\alpha \leqslant \tau \leqslant t_\beta)$ можно продолжить до функций, определенных при $-\infty < \tau < \infty$, имеющих производные любого порядка и обращающихся в нуль при $|\tau| \geqslant \zeta$, где ζ — достаточно большое число. Тогда эти функции можно рассматривать, как элементы линейного пространства $K_\zeta\{h\}$, которое используется при построении обобщенных функций [8]. Теперь, пользуясь равенствами (1.3), можно расширить допускаемые управления u до класса обобщенных функций, носитель которых ([8]) целиком содержится на отрезке $[t_\alpha, t_\beta]$. При этом по определению примем, что такое обобщенное управление u приводит рассматриваемую систему (1.1) в состояние $x(t_\beta) = \{x_i(t_\beta)\}$ (1.3), где φ_u — линейный функционал на $K_\zeta\{h\}$, олицетворяющий данное воздействие. Частный случай такой ситуации рассмотрен в статьях [3,5,9], где фактически допускались простейшие обобщенные управления, включающие импульсные воздействия. Постановка задачи об устойчивости, опирающаяся на обобщенные возмущения, трактуемые с позиций теории обобщенных функций, предложена и изучена в работах [10,11]. В данной статье обсуждаются две задачи: 1) успокоение системы (1.1) обобщенными воздействиями u, которые складываются из δ-функции и из ее последовательных производных $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \ldots, \delta^{(n-1)}$, 2) оптимальное успокоение системы (1.1) при условии минимума выбранной интенсивности $\varkappa[u]$ обобщенного воздействия u.

§ 2. Управление u, успокаивающее систему (1.1), будем искать в виде

$$u = \lambda_1\delta(t-\vartheta) + \ldots + \lambda_n\delta^{(n-1)}(t-\vartheta) \tag{2.1}$$

где ϑ — некоторый фиксированный момент времени из отрезка $[t_\alpha, t_\beta]$; λ_i — искомые постоянные. По определению функций $\delta^{(k)}(t)$ и по известным свойствам матрицы $X[t_\beta, \tau]$ имеем

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta} X[t_\beta, \tau]\, b\delta^{(k)}(\tau-\vartheta)\,d\tau = (-1)^k\left(\frac{d^kX[t_\beta, \tau]}{d\tau^k}\right)_{\tau=\vartheta} b = X[t_\beta, \vartheta]\,A^kb$$

Поэтому, подставляя выражение (2.1) для u в (1.2), где правая часть трактуется в соответствии с § 1, и полагая $x(t_\beta) = 0$, получим следующее уравнение для неизвестных λ_i:

$$-X[t_\beta, t_\alpha]\,x^\alpha = X[t_\beta, \vartheta]\,(\lambda_1 b + \lambda_2 Ab + \lambda_3 A^2 b + \ldots + \lambda_n A^{n-1}b) \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет решение $\{\lambda_i\}$ при любом начальном условии $x = x^\alpha$ тогда и только тогда, когда векторы $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ линейно независимы, т. е. когда выполнено условие общего положения [1] или, иначе говоря, когда выполнено условие полной управляемости [4] системы (1.1). В частности, при $\vartheta = t_\alpha$ уравнение (2.2) принимает вид

$$-x^\alpha = \lambda_1 b + \lambda_2 Ab + \lambda_3 A^2 b + \ldots + \lambda_n A^{n-1}b \tag{2.3}$$

Таким образом, приходим к выводу: обобщенное управление u вида (2.1), успокаивающее систему (1.1), существует тогда и только тогда, когда вектор $x = x^\alpha$ содержится в подпространстве, порожденном векторами b, $Ab, \ldots, A^{n-1}b$; если $\vartheta = t_\alpha$, то числа λ_i — суть составляющие координаты вектора $-x^\alpha$ в его разложении по векторам $A^{i-1}b$.

Этот вывод, естественно, соответствует известным фактам теории управления линейными системами за счет воздействий, описываемых обычными функциями $u(t)$.

§ 3. Предположим теперь, что x — элемент некоторого бесконечно мерного линейного пространства $\{x\}$. Пусть при этом в уравнении (1.1) u — снова скаляр, b — элемент из $\{x\}$ и символ A означает линейный оператор, для которого справедлива формула Коши (1.2), причем функция

$$\exp A(t-t_0)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i(t-t_0)^i}{i!}$$

обладает известными регулярными свойствами группового оператора [12]. Предположим далее, что элементы $y^{[k]}=A^{k-1}b$ $(k=1, 2,\ldots)$ составляют базис пространства $\{x\}$. Следовательно, каждый элемент x из $\{x\}$ можно представить в виде

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y^{[i]}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i A^{i-1}b \tag{3.1}$$

Допустим, что норма $\rho\,[x]$, определяющая метрику в пространстве $\{x\}$, выбрана таким образом, что выполнено условие: каков бы ни был элемент x (3.1) с конечной нормой $\rho\,[x]<\infty$ и каково бы ни было число $\varepsilon>0$, можно указать число N такое, что

$$\rho\Big[\sum_{i=N+1}^{\infty}\xi_i y^{[i]}\Big]<\varepsilon$$

Тогда для любого начального условия $x=x^\alpha$ с конечной нормой $\rho\,[x^\alpha]$ и для любого $\varepsilon>0$ можно построить обобщенное управление u вида (2.1), которое переводит объект (1.1) в состояние $x=x\,(t_\beta)$, удовлетворяющее условию $\rho\,[x\,(t_\beta)]<\varepsilon$. Для того чтобы проверить справедливость этого утверждения, достаточно в (2.1) выбрать $\vartheta=t_\alpha$, $n=N$ и положить $\lambda_i=-\xi_i$ $(i=1,\ldots,N)$. Тогда, повторяя выкладки из § **2**, справедливость которых для рассматриваемого оператора A предполагается, убедимся, что выбранное управление u приводит объект в состояние

$$x\,(t_\beta)=\sum_{i=N+1}^{\infty}\xi_i y^{[i]}$$

Этим и устанавливается справедливость высказанного утверждения.

§ 4. Управление u, рассмотренное формально в § 2 и 3, успокаивает систему (1.1) (до состояния равновесия $x=0$ или до состояния, лежащего в ε-окрестности точки равновесия $x=0$ соответственно) мгновенно при $t=\vartheta$. Такое управление, естественно, практически реализовать нельзя. Однако это управление полезно рассматривать в тех случаях, когда речь идет об успокоении системы (1.1) весьма кратковременными, но и интенсивными воздействиями, работающими в течение малого отрезка времени $[t_\alpha, t_\alpha+\varepsilon]$. Тогда реально осуществимые управления $u_\varepsilon(t)$ получаются за счет аппроксимации δ-функции и ее последовательных производных $\delta^{(k)}$ известными обычными функциями $\Delta_\varepsilon^{(k)}(t)$:

$$\Delta_\varepsilon^{(0)}(t)=1/\varepsilon \text{ при } 0\leqslant t<\varepsilon,\quad \Delta_\varepsilon^{(0)}(t)=0 \text{ при других } t$$
$$\Delta_\varepsilon^{(1)}(t)=4/\varepsilon^2 \text{ при } 0\leqslant t<\varepsilon/2$$
$$\Delta_\varepsilon^{(1)}(t)=-4/\varepsilon^2 \text{ при } \varepsilon/2\leqslant t\leqslant\varepsilon$$
$$\Delta_\varepsilon^{(1)}(t)=0 \text{ при других } t \text{ и т. д.}$$

При $\varepsilon \to 0$ результат воздействия управления

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta_\varepsilon^{(i-1)}(t - \vartheta) \quad (t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\alpha + \varepsilon) \tag{4.1}$$

сходится к тому значению $x(t_\beta)$, которое получается формальным использованием управления u (2.1). Это обстоятельство и определяет реальный смысл последнего обобщенного управления. Заметим еще, что таким путем использование управления u (2.1) и связанного с ним управления $u_\varepsilon(t)$ (4.1) позволяет оценить порядок роста управляющих воздействий $u_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Этот порядок оказывается, вообще говоря, равным порядку величины $1 / \varepsilon^n$.

§ 5. Рассмотрим задачу об успокоении системы (1.1) при условии минимума некоторой интенсивности $\varkappa[u]$ обобщенного управления u. По самому смыслу рассматриваемых обобщенных управлений u их интенсивность $\varkappa[u]$, естественно, оценивать по результатам соответствующей операции $\varphi_u[h]$ на элементах $h(\tau)$ из пространства $K_\zeta[h(\tau)]$. Поэтому зададимся некоторой функцией (точнее говоря — функционалом) $\rho_\mu[h(\tau)]$ (индекс μ — число) и будем полагать по определению, что $\varkappa[u] \leqslant \mu$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\varphi_u[h(\tau)] \leqslant \rho_\mu[h(\tau)] \tag{5.1}$$

при всех $h(\tau)$ из $K_\zeta\{h(\tau)\}$. Очевидно эта оценка интенсивности $\varkappa[u]$ является автоматическим распространением на обобщенные управления u той трактовки интенсивности $\varkappa[u]$ обыкновенных управлений $u(t)$, которая описана в статьях [6,9], где полагалось $\varkappa[u] = \rho^*[u(\tau)]$ и $\rho_\mu[h(\tau)] = \mu\rho[h(\tau)]$ $(\mu \geqslant 0)$, причем символы ρ и ρ^* обозначают нормы в подходящем функциональном пространстве $B\{h(\tau)\}$ и в сопряженном ему пространстве $B^*\{u(\tau)\}$ соответственно. Но тогда ясно, что и здесь задачу об управлении удобно трактовать, как проблему моментов, и при подходящих свойствах функции $\rho_\mu[h]$ решение этой проблемы, а с ней — решение задачи об управлении получится как следствие из теоремы Хана — Банаха о распространении линейного функционала [13]. В дальнейшем, в соответствии со сказанным, будем предполагать, что функция ρ_μ удовлетворяет двум условиям: 1) величина $\rho_\mu[h(\tau)]$ зависит только от значений функции $h(\tau)$, принимаемых при $t_\alpha \leqslant \tau \leqslant t_\beta$; 2) при любых $h(\tau)$ и $g(\tau)$ из K_ζ и при любом значении числа $\alpha \geqslant 0$ выполнены условия

$$\rho_\mu[h+g] \leqslant \rho_\mu[h] + \rho_\mu[g], \quad \rho_\mu[\alpha h] = \alpha\rho_\mu[h] \tag{5.2}$$

Тогда действительно процедура решения задачи об успокоении системы (1.1) повторяет известную процедуру решения проблемы моментов. Опишем ее здесь кратко для полноты изложения.

В (1.3) положим $x_i(t_\beta) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, тогда получим уравнения

$$\varphi_u[h^{(i)}(\tau)] = c_i \ (i = 1, \ldots, n) \quad (c = \{c_i\} = -X[t_\beta, t_\alpha]\, x^\alpha) \tag{5.3}$$

Рассмотрим в пространстве $K_\zeta\{h\}$ подпространство $K_n\{h\}$, состоящее из всех тех функций $h(\tau)$ из K_ζ, которые при $t_\alpha \leqslant \tau \leqslant t_\beta$ имеют вид

$$h(\tau) = l_1 h^{(1)}(\tau) + \ldots + l_n h^{(n)}(\tau) \tag{5.4}$$

и определим на этих функциях линейную операцию $\varphi_n[h]$, исходя из равенства

$$\varphi_n[h] = l_1 c_1 + \ldots + l_n c_n \tag{5.5}$$

Здесь l_i — всевозможные действительные числа. Операцию φ_n (5.5) можно построить тогда и только тогда, когда величина $\nu = l_1 c_1 + \ldots + l_n c_n)$ обращается в нуль всякий раз, как только

$$l_1 h_1(\tau) + \ldots + l_n h_n(\tau) \equiv 0 \qquad \text{при } t_\alpha \leqslant \tau \leqslant t_\beta$$

Если данное условие не выполнено, то проблема моментов (5.3), а с ней и задача об управлении решения не имеют. Итак, пусть операция (5.5) имеет смысл. Эта операция удовлетворяет уравнениям (5.3), но она определена пока лишь на K_n. Обсудим возможность распространения φ_n до операции φ_u, определенной на всем пространстве K_ζ. Зададимся каким-нибудь числом μ.

Если для каких-нибудь значений l_i возможно неравенство

$$\varphi_n[h] = l_1 c_1 + \ldots + l_n c_n > \rho_\mu[h] \tag{5.6}$$

то проблема моментов (5.3) при $\varkappa[u] \leqslant \mu$ снова решения не имеет. Пусть, однако, при выбранном значении μ при всех l_i справедливо неравенство

$$\varphi_n[h] = \sum_{i=1}^{n} l_i c_i \leqslant \rho_\mu[h] \tag{5.7}$$

Тогда, согласно упомянутой выше теореме Хана — Банаха ([13]) операцию $\varphi_n[h]$ можно распространить до функционала $\varphi_u[h]$, определенного на всем пространстве $K_\zeta\{h\}$ и удовлетворяющего и равенствам (5.3) и неравенству $\varphi_u[h] \leqslant \rho_\mu[h]$ при всех $h(\tau)$ из K_ζ. Так как на каждой функции $h(\tau)$ из K_ζ, удовлетворяющей условию $h(\tau) \equiv 0$ при $t_\alpha \leqslant \tau \leqslant t_\beta$, имеем по построению $\varphi_u[h] = 0$, то заключаем, что носитель функции u действительно содержится на отрезке $[t_\alpha, t_\beta]$. Итак, при выполнении неравенства (5.7) существует обобщенное управление u, успокаивающее систему (1.1) и имеющее интенсивность $\varkappa[u] \leqslant \mu$.

Воспользуемся теперь известным соотношением

$$\sum_{i=1}^{n} l_i h^{(i)}(\tau) = l'H[t_\beta, \tau] = l'X[t_\beta, \tau]\, b = b'S[\tau, t_\beta]\, l \tag{5.8}$$

где верхний индекс штрих означает транспонирование; символ $S[t, t_0]$ означает фундаментальную матрицу системы, движение которой $s(t)$ описывается уравнением

$$\frac{ds}{dt} = -A_s' \tag{5.9}$$

сопряженным к уравнению $dx / dt = Ax$, отвечающему исходной системе (1.1). Тогда приведенные выше соображения, связанные с неравенствами (5.6) и (5.7), суммируются в следующее правило, определяющее решение задачи об оптимальном успокоении системы (1.1) и аналогичное правилу, известному для обычных управлений [6,14].

Теорема 5.1. Для решения задачи об оптимальном успокоении системы (1.1) надлежит рассмотреть движения $s(t) = S[t, t_\beta]\, s(t_\beta)$ сопряженной системы (5.9) и составить величину

$$\gamma_\mu [s(t_\beta)] = \rho_\mu [b'S[\tau, t_\beta] s(t_\beta)]$$

Пусть μ° — наименьшее из чисел μ, при которых выполняется неравенство

$$\gamma_\mu [s(t_\beta)] - s'(t_\beta)\, c \geqslant 0 \tag{5.10}$$

при всех $s[t_\beta]$, причем

$$\min_s [\gamma_{\mu^\circ} [s(t_\beta)] - s'(t_\beta)\, c] = 0 \tag{5.11}$$

при $\| s(t_\beta) \| = 1$. Тогда искомый $\min \varkappa [u] = \mu^\circ$ и оптимальное управление u° с интенсивностью $\varkappa [u^\circ] = \mu^\circ$ удовлетворяет условию максимума

$$\varphi_{u^\circ} [b'S[\tau, t_\beta]\, s^\circ] = \max_u \text{ при } \varkappa [u] \leqslant \mu^\circ \tag{5.12}$$

Здесь $s^\circ = s^\circ(t_\beta)$ — решение задачи (5.11), символ $\| s \|$ означает евклидову норму вектора s.

Замечание. Содержательная теория обобщенных функций предполагает, что функционалы φ_u, которые олицетворяют эти функции, являются непрерывными в счетнонормированном пространстве K. В соответствии с этим, надлежит предполагать, что по выбору $\rho_\mu[h]$ условие $\varphi_u [h] \leqslant \rho_\mu [h]$ обеспечивает непрерывность φ_u.

Проблему моментов (5.3) часто удобно трансформировать, умножив предварительно обе части равенства (1.2) слева на $X^{-1} [t_\beta, t_\alpha]$. Тогда получим правило решения задачи, аналогичное теореме 5.1, где, однако, следует искать наименьшее число $\mu = \mu^\circ$ не из условия (5.11), а из условия

$$\min_s [\gamma_{\mu^\circ} [s(t_\alpha)] - s'(t_\alpha)\, c] = 0 \tag{5.13}$$

при $\| s(t_\alpha) \| = 1$ и $c = -x^\alpha$. Здесь $\gamma_\mu [s(t_\alpha)] = \rho_\mu [b'S[\tau, t_\alpha]\, s(t_\alpha)]$. Само же оптимальное управление u° определяется снова из условия максимума

$$\varphi_{u^\circ} [b'S[\tau, t_\alpha]\, s^\circ] = \max_u \text{ при } \varkappa [u] \leqslant \mu^\circ \tag{5.14}$$

аналогичного условию (5.12), где $s^\circ = s^\circ(t_\alpha)$ — решение задачи (5.13).

Вследствие однородности величин $\gamma_\mu [s]$ и $\nu = s'c$ по s, условие $\| s \| = 1$ в задачах (5.11) и (5.13) выбрано произвольно и может быть заменено любым другим аналогичным условием.

В теореме 5.1 речь шла о приведении системы (1.1) в состояние $x(t_\beta) = x^\beta = 0$. Если речь идет о приведении системы (1.1) в одно из состояний $x(t_\beta) = x^\beta$, составляющих заданное многообразие $M\{x^\beta\}$, то, как и в случае обыкновенных управлений [14], можно решать задачу, как проблему моментов (5.3), пользуясь теоремой 5.1 при

$$c[x^\beta] = x^\beta - X[t_\beta, t_\alpha]\, x^\alpha$$

и минимизируя затем $\mu^\circ [x^\beta]$ по x^β из M.

Если многообразие M является выпуклым компактным множеством в пространстве $\{x\}$, то, как и в случае обыкновенных управлений [14], встречающиеся при этом операции минимума по s и максимума по x^β переставляются местами, так как получается ситуация, известная в теории игр с седловой точкой [15] и имеющая естественный геометрический смысл, если соотношения, определяющие решение, интерпретируются как условия разделения выпуклого множества M и выпуклой области достижимости G процесса (1.1) в пространстве $\{x\}$ (см., например, [16, 17]).

В качестве функций $\rho_\mu\,[h]$ удобно выбирать величины, зависящие от величин $\eta^{(k)} = \max_\tau |d^k h / d\tau^k|$. В частности, выбирая $\rho_\mu\,[h] = \mu \max_\tau\,|\,h\,(\tau)\,|$, придем к управлениям, содержащим импульсные δ-функции и рассмотренным, например, в статьях [3, 5, 9]. Обобщенные функции более высокого ранга тогда исключаются благодаря выбранному неравенству $\varphi_u[h] \leqslant \mu \max_\tau\,|\,h\,(\tau)\,|$, которое не учитывает производных от $h\,(\tau)$. Полагая $\rho_\mu\,[h] = \mu \max\,[\eta^\circ,\ \eta^{(k)}]$, придем к более широкому классу обобщенных функций u, который будет включать и функции $\delta^{(1)}\,(t - v) = d\delta\,(t - \vartheta)\,/\,dt$ и т. д.

§ 6. Рассмотрим пример. Пусть на прямой ξ движется управляемая материальная точка, описываемая уравнением

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = u \qquad (\omega \geqslant 0) \tag{6.1}$$

и эту точку за время $t_\alpha = 0 \leqslant t \leqslant t_\beta = \pi\,/\,\omega$ требуется привести из состояния

$$\xi\,(0) = \xi_0, \qquad (d\xi\,(t)\,/\,dt)_{t=0} = \xi_1$$

в положение равновесия

$$\xi\,(\pi/\omega) = 0, \qquad (d\xi\,(t)\,/\,dt)_{t=\pi/\omega} = 0.$$

В качестве минимизируемой интенсивности $\varkappa\,[u]$ выберем величину, определяемую функцией $\rho_\mu\,[h] = \mu \max_\tau\,[\,|\,h\,(\tau)\,|,\,|\,dh\,(\tau)\,/\,d\tau|\,]$. Тогда, сопоставляя уравнению (6.1) систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\,\omega^2 x_1 + u \tag{6.2}$$

и применяя к этой системе теорему 5.1, убедимся, что при $\omega > 1$ минимум величины

$$\gamma_{\mu^\circ}\,[s\,(t_\beta)] = \rho_{\mu^\circ}\,[b'S\,[\tau,\ t_\beta]\,s\,(t_\beta)] = \mu^\circ \max_\tau\,[\,|\,b's\,(\tau)\,|,\ \,|\,db's\,(\tau)\,/\,d\tau\,|\,]$$

определяется членом $\max_\tau |\,db's\,(\tau)\,/\,d\tau\,|$, а при $\omega < 1$ этот минимум определяется членом $\max_\tau\,|\,b'\,s\,(\tau)\,|\ s(\tau) = S\,[\tau,\,t_\beta]\,s\,(t_\beta)$. Отсюда, в соответствии с условием максимума (5.11), выводим, что в случае $\omega \leqslant 1$ в качестве оптимального управления u° надлежит выбирать управляющее воздействие в виде импульса $u^\circ\,(t) = \lambda\delta\,(t - \vartheta)$, мгновенно останавливающего точку ξ в тот момент $t = \vartheta$, когда она проходит положение равновесия $\xi = 0$. Напротив, в случае $\omega > 1$ при выбранной оценке интенсивности $\varkappa\,[u]$ оптимальное управление u° надлежит выбирать в виде воздействия $u^\circ\,(t) = \lambda\delta^{(1)}\,(t - \vartheta)$, которое прилагается в тот момент $t = \vartheta$, когда скорость $d\xi\,(t)\,/\,dt$ движущейся точки ξ становится равной нулю. Данное воздействие можно трактовать, как два следующих сразу друг за другом противоположных по направлению чрезвычайно мощных импульса. Первый из этих импульсов придает точке ξ огромную скорость, перебрасывающую ее в положение $\xi = 0$, а второй импульс гасит сразу эту скорость, фиксируя точку в заданном положении $\xi = 0$. Заметим кстати, что в данном примере оптимальное управление u° имеет как раз форму того обобщенного управления, которое было рассмотрено в § 2—4.

В качестве второго примера можно рассмотреть задачу об успокоении линейной системы с последействием [18,19] за время $T = 2\tau$. Тогда, например, при $n = 2$ управление $u(t)$ при $0 < t \leqslant T$ будет снова определяться условием сохранения траектории $x(t)$ в нужных подпространствах, а в момент $t = +0$ управление $u(t)$ можно искать в виде линейной комбинации $u = \gamma_1 \delta(t) + \gamma_2 \delta'(t)$. Пользуясь случаем отметим, что в заметке [18] ошибочно утверждается разрешимость рассмотренной там задачи во *всяком* случае, когда векторы b и Ab удовлетворяют условию общего положения. На самом деле в отдельных вырожденных случаях (когда $h_2(\vartheta) \equiv 0$) этого условия недостаточно, например, это случается при

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{12} = -1$$

Поэтому упомянутые достаточные условия следует дополнить таким условием, которое обеспечивает неравенство $h_2(\vartheta) \not\equiv 0$. Как сообщил авторам А. Б. Куржанский, аналогичная неточность имеется и в заметке [19].

Поступила 12 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. La Salle. J. P. Time optimal control sistems. Proc. of National Acad. Sci., 1959, vol. 45, No 4, pp. 573—577.
3. Kulikowski R. On Optimum Control with Constraints. Bull. Acad. Polonaise sci. Serie sci. techniques, 1961, vol. 7, No 4, pp. 285—294.
4. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control. Proc. Mexico City Symposium of Ord. Diff. Equations, Bol. Soc. Mat. Mex., Mexico City, 1961.
5. Neustadt Lucien W. Optimization,a moment problem,and nonlinear programming I. Soc. Industr. and Appl. Math, 1964,A2,N1, стр. 33—53
6. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5, стр. 670—677.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2, Гостехиздат, 1949.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. М., Физматгиз, 1958, вып. 1, 2.
9. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, стр. 625—639.
10. Барбашин Е. А. Об устойчивости по отношению к импульсным воздействиям. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, вып. 7, стр. 863—871.
11. Завалищин С. Т. Устойчивость обобщенных процессов I. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, вып. 7, стр. 872—881.
12. Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
14. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 3—14.
15. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
16. Antosiewitcz H. A. Linear control systems. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1963, vol. 12, No 4, pp. 313—324.
17. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Оптимизация выпуклых функционалов на траекториях линейных систем. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 5.
18. Красовский Н. Н. Об управлении объектом с последействием. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
19. Куржанский А. Б. К задаче об управлении для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.