Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

К УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

В. И. Жуковский

(Москва)

Рассматривается (§ 2, 3) задача построения областей условной устойчивости ([1], п. 1) в указанном критическом случае при помощи двух функций Ляпунова — Четаева [2, 3]. Использован новый вид уравнений возмущенного движения, полученный в работе Г. В. Каменкова [4]. В § 4 предлагается метод построения областей условной устойчивости для систем с запаздыванием. Рассмотрен пример (§ 5).

§ 1. Невозмущенное движение обладает условной устойчивостью, если оно устойчиво для начальных возмущений, подчиненных условиям вида

$$f(x_1,\ldots, x_n) = 0 \quad \text{или} \quad f(x_1,\ldots, x_n) > 0$$

где f — функция возмущений $x_1,\ldots, x_n$, причем $f(0,\ldots,0) = 0$ ([1], п. 1).

Особый интерес представляет выделение областей условной устойчивости в критических случаях, когда либо невозмущенное движение неустойчиво, либо имеющиеся критерии не решают задачу устойчивости. В этих случаях возникает задача о стабилизации невозмущенного движения подходящим выбором начальных возмущений. Впервые доказал существование ([1], п. 24) и осуществил построение областей условной устойчивости Ляпунов при исследовании критического случая двойного нулевого корня с одной группой решений [5, 6]. Вопросы существования таких областей рассматривались в работах [7–10]. Возможность эффективного построения областей условной устойчивости в критических случаях, на наш взгляд, следует из фундаментальной теоремы Четаева [2], где впервые указана возможность решения задач устойчивости с помощью нескольких функций Ляпунова [3]. В ряде критических случаев при помощи двух функций Ляпунова — Четаева осуществлено построение областей условной устойчивости [11, 12]. Ниже тем же методом исследуется условная устойчивость в критическом случае k пар простых чисто мнимых корней, причем новый вид уравнений, предложенный в работе [4], позволяет эти области получить достаточно «широкими».

§ 2. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения в случае, когда характеристическое уравнение линейной системы первого приближения имеет $n+1$ пару простых чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$, $\lambda_s = \text{const} > 0$ $(s = 0, 1,\ldots, n)$ и l корней с отрицательными вещественными частями. Предположим также, что коэффициенты при нелинейных слагаемых правых частей периодические функции t с одним и тем же периодом 2π. Возможный вид системы в рассматриваемом случае (предполагаем, что переменные выбраны так, что «критическая» часть системы имеет каноническую форму)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = Q\mathbf{x} + X(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = P\mathbf{y} + Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \tag{2.1}$$

Постоянная матрица Q порядка $2(n+1)\times 2(n+1)$ имеет вид:

$$Q=\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}, \qquad Q_s=\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_s \\ \lambda_s & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — $2(n+1)$-мерный вектор и $\mathbf{y}$ — l-вектор; матрица P порядка $l\times l$ — постоянная, устойчивая; вектор-функции $X(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ соответствующих размерностей, их компоненты — ряды по степеням координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с периодическими по t периода 2π коэффициентами, начинающиеся с членов не ниже второго порядка и сходящиеся в области

$$|\mathbf{x}|\leqslant H, \quad |\mathbf{y}|\leqslant H, \quad t\geqslant t_0 \quad (H=\mathrm{const}>0,\ |\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{2n+1}^2})$$

Пусть задача построения областей условной устойчивости для «укороченной» системы решается [11] вне зависимости от членов порядка выше N.

Предполагается, что между иррациональными числами λ_s не существует соотношения $m_0\lambda_0+\ldots+m_n\lambda_n=0$ для $|m_0|+\ldots+|m_n|\leqslant N$, где m_s — целые числа. Преобразованиями ([13], § 97) систему (2.1) можно привести к подобному же виду, но разложение вектор-функции $Y(\mathbf{x}, 0, t)$ начинается с членов не ниже $N+1$-го порядка, а члены разложения $X(\mathbf{x}, 0, t)$ до N-го порядка включительно не содержат явно t. Применяя далее принцип сведения в случае условной устойчивости [11], сведем задачу построения областей условной устойчивости к аналогичной задаче для «укороченной» части системы (2.1) (2.2)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=Q\mathbf{x}+X^{(2)}(\mathbf{x})+\cdots+X^{(N)}(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{x}, t), \quad |\varphi(\mathbf{x}, t)|<A|\mathbf{x}|^{N+1}$$

Здесь компоненты вектора $X^{(r)}(\mathbf{x})$ — формы r-го порядка относительно координат вектора $\mathbf{x}$, A — некоторое целое положительное число. Рядом преобразований, приведенных в работе [4], задача устойчивости системы (2.2) в случае, когда вопрос об устойчивости решается конечным числом членов, сводится к исследованию устойчивости невозмущенного движения системы

$$\frac{dr_s}{dt}=r_s\sum_{i=0}^{n}a_{si}r_i^2+r_s\sum a_s r_0^{2k_0}\cdots r_n^{2k_n}+R_s(r_0, \ldots, r_n, \vartheta_0, \ldots, \vartheta_n, t)$$

$$\left(4\leqslant\sum_{i=0}^{n}2k_i\leqslant N, \ s=0, 1, \ldots, n\right) \tag{2.3}$$

Здесь a_{si}, a_s — вещественные постоянные, разложения R_s по r_i начинаются с членов не ниже $N+1$-го порядка. В дальнейшем построение областей условной устойчивости проводим для системы (2.3). В случае построения таких областей для системы (2.3) вопрос существования аналогичных областей для исходной системы сводится к нахождению решения системы нелинейных неравенств, решение которых, как известно, представляет трудность. Поэтому при построении областей условной устойчивости в рассматриваемом критическом случае желательно исходную систему привести к виду (2.3).

§ 3. Не ограничивая общности, проведем построение областей условной устойчивости в окрестности оси r_0. Для системы (2.3) функции Ляпунова — Четаева можно взять в виде

$$2V = r_0^2 + r_1^2 + \ldots + r_n^2, \qquad 2W(k) = r_0^2 - k(r_1^2 + \ldots + r_n^2) \tag{3.1}$$

постоянную $k \geqslant 0$ определим ниже.

Производные функции (3.1) по t в силу уравнений (2.3) имеют вид

$$\frac{dV}{dt} = r_0^2 \sum_{s=0}^{n} a_{0s} r_s^2 + r_0^2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} r_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i^2 r_j^2 + R^{(1)}(r_0^2, \ldots, r_n^2, t)$$

$$\frac{dW}{dt} = r_0^2 \sum_{s=0}^{n} a_{0s} r_s^2 - k r_0^2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} r_i^2 - k \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i^2 r_j^2 + R^{(2)}(r_0^2, \ldots, r_n^2, t)$$

Здесь $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ начинаются с членов не ниже шестого порядка относительно r_s. Тогда

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{W(k)=0} = a_{00} k^2 \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)^2 + k \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \sum_{j=1}^{n} (a_{0j} + a_{j0}) r_j^2 +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i^2 r_j^2 + R^{(3)}(r_1^2, \ldots, r_n^2, t) \tag{3.2}$$

Функция $R^{(3)}$ подобна $R^{(1)}$, $R^{(2)}$. Пусть функция (3.2) принимает неположительные значения при $k \in [0, k_1]$ и r_0^2, достаточно малом. Достаточные условия этого можно получить следующим образом.

Введем n-мерный вектор $\mathbf{r} = \{r_1^2, \ldots, r_n^2\}$ и $B(k) = \| b_{ij}(k) \|^n_1$ матрицу, элементы которой

$$b_{ij}(k) = {}^1/{}_2 \, [2a_{00}k^2 + k(a_{0i} + a_{i0} + a_{0j} + a_{j0}) + (a_{ij} + a_{ji})]$$

Главные миноры матрицы $B(k)$ обозначим через

$$B_1(k), \ B_2(k), \ldots, \ B_n(k)$$

Обозначим через k_1 максимальное значение k такое, что при $k \in [0, k_1]$

$$(-1)^i B_i(k) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Очевидно, для выполнения условий (3.3) достаточно потребовать, чтобы форма $\Sigma a_{ij} r_i^2 r_j^2$ была определенно-отрицательной. Тогда, вследствие непрерывности, существует интервал $[0, k_1]$ такой, что при $k \in [0, k_1]$ форма $\mathbf{r}' B(k) \mathbf{r}$ определенно-отрицательна. Пусть выполнены (3.3), тогда можно указать достаточно малое $h_1 = \mathrm{const} > 0$ такое, что

$$\operatorname{sign} \left(\frac{dV}{dt}\right)_{W(k)=0} = \operatorname{sign} [\mathbf{r}' B(k) \mathbf{r}] \tag{3.4}$$

при $k \in [0, k_1]$ и $r_0^2 \leqslant h_1$. Функция (3.2) будет определенно-отрицательна. При $W(k_1) = 0$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{W(k_1)=0} = \mathbf{r}' C(k_1) \mathbf{r} + R^{(4)}(r_1^2, \ldots, r_n^2, t) \tag{3.5}$$

Вид функции $R^{(4)}$ аналогичен $R^{(3)}$. Матрица

$$C(k_1) = \| c_{ij}(k_1) \|_1^n$$

$$c_{ij}(k_1) = {}^1/_2 k_1 [k_1 (2a_{00} - a_{i0} - a_{j0}) + (a_{0i} + a_{0j} - a_{ij} - a_{ji})]$$

Потребуем, чтобы функция (3.5) принимала положительные значения. Для этого достаточно, чтобы главные миноры $C_1(k_1), C_2(k_1), \ldots, C_n(k_1)$ матрицы $C(k_1)$ удовлетворяли неравенствам

$$C_i(k_1) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.6}$$

и $r_0^2 \leqslant h_2$, где $h_2 = \mathrm{const} > 0$ достаточно мало. Тогда при выполнении (3.3), (3.6) и $r_0^2 \leqslant h = \min(h_1, h_2)$ функции (3.2) и (3.5) знакоопределены, причем первая определенно-отрицательна, вторая — определенно-положительна. В силу [3] невозмущенное движение системы (2.3), а следовательно [11], и системы (2.1) асимптотически устойчиво для начальных возмущений, удовлетворяющих условиям

$$r_0^2(t_0) - k_1 [r_1^2(t_0) + \ldots + r_n^2(t_0)] > 0, \qquad r_0^2(t_0) \leqslant h \tag{3.7}$$

Если функция (3.2) принимает неположительные значения, а (3.5) — положительна при $r_0^2 \leqslant h$, то невозмущенное движение системы (2.3) устойчиво для начальных возмущений (3.7).

Таким образом, построение областей условной устойчивости (например, в окрестности оси r_0) сводится к следующему:

1. Находим максимальное значение k_1 такое, чтобы при $k \in [0, k_1]$, $r_0^2 \leqslant h$ функция (3.2) была определенно-отрицательной (например, выполнены условия (3.3)).

2. Потребуем, чтобы при $k = k_1, r_0^2 \leqslant h$ функция (3.5) была положительной (например, условия (3.6)). Тогда невозмущенное движение системы (2.3) асимптотически устойчиво для начальных возмущений (3.7).

Если функция (3.2) постоянно-положительна, то невозмущенное движение системы (2.3) устойчиво для начальных возмущений (3.7).

Замечание 3.1. Если функция (3.5) положительна при $0 < k_2 < k_1$, то в качестве области условной устойчивости нужно выбрать область $W(k_2) > 0$. Очевидно, чем больше k, при которых выполнены приведенные выше условия, тем «шире» область устойчивости.

Замечание 3.2. В случае, когда $a_{00} > 0$ и форма $\Sigma a_{ij} r_i^2 r_j^2$ определенно-отрицательна, для k_1 можно предложить следующую оценку:

$$0 < k_1 < \frac{1}{2a_{00}} [\min_i (a_{0i} + a_{i0}) + \sqrt{(\min_i | a_{i0} + a_{i0} |)^2 - 4a_{00}\lambda_{\max}}] \tag{3.8}$$

при условии, что выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно ($\lambda_{\max}$ — наибольшее характеристическое число матрицы $\|a_{ij}\|_1^n$).

Действительно, решая относительно k уравнение

$$a_{00}k^2 \Big(\sum_{i=1}^n r_i^2 \Big)^2 + k \sum_{i=1}^n r_i^2 \sum_{j=1}^n (a_{0j} + a_{j0}) r_j^2 + \sum_{i,\, j=1}^n a_{ij} r_i^2 r_j^2 = 0$$

и применяя оценки ([14], гл. X, § 7), получаем (3.8).

§ 4. Пусть возмущенное движение системы описывается уравнением с запаздыванием времени:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) + A_\tau \mathbf{x}(t-\tau) + X[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)] \tag{4.1}$$

Далее не указывается смысл использованных величин, ибо это подробно рассмотрено в статье [15]. В монографии ([16], § 29) показано, что в пространстве $C_{[-\tau,0]}$ уравнению (4.1) соответствует дифференциально-операторное уравнение

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = P\mathbf{x}_t(\vartheta) + R[\mathbf{x}_t(0), \mathbf{x}_t(-\tau)] \tag{4.2}$$

Пусть уравнение

$$\det[A - \lambda E + A_\tau e^{-\lambda\tau}] = 0 \tag{4.3}$$

определяющее спектр оператора P, имеет $n+1$ пару простых чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательными вещественными частями. Тогда преобразованиями [15] систему (4.2) приведем к виду

$$d\mathbf{v}/dt = Q\mathbf{v} + F[\mathbf{v}, \mathbf{z}_t(0), \mathbf{z}_t(-\tau)] \tag{4.4}$$

$$\frac{d\mathbf{z}_t(\vartheta)}{dt} = P\mathbf{z}_t(\vartheta) + Z[\mathbf{v}, \mathbf{z}_t(0), \mathbf{z}_t(-\tau), \vartheta]$$

где оператор $Z[\mathbf{v}, \mathbf{z}_t(0), \mathbf{z}_t(-\tau), \vartheta]$ удовлетворяет оценке

$$|Z(\mathbf{v}, 0, 0, \vartheta)| < L|\mathbf{v}|^{N+1} \tag{4.5}$$

Здесь $L = \text{const} > 0$, целое число N определено ниже. Допустим, что невозмущенное движение системы

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = Q\mathbf{v} + F(\mathbf{v}, 0, 0) \tag{4.6}$$

устойчиво или асимптотически устойчиво для начальных возмущений $\mathbf{v}(t_0) \in G$ (замыкание области G содержит точку покоя) и вне зависимости от членов порядка выше, чем N (в смысле [11]). Тогда, если оператор Z удовлетворяет оценке (4.5), то невозмущенное движение системы (4.4) соответственно устойчиво или асимптотически устойчиво для начальных возмущений $\mathbf{v}(t_0) \in G$. Доказательство этого положения аналогично [15]. Отсюда следует, что при построении областей условной устойчивости в критических случаях для систем с запаздыванием времени можно использовать результаты работ [5,11,12] и § 3 предлагаемой работы.

Замечание 4.1. Пусть уравнение (4.3) имеет один нулевой корень и остальные корни с отрицательными вещественными частями. Уравнение (4.6) в этом случае имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = gv^m + g_1 v^{m+1} + \ldots$$

Здесь v — скаляр, g, $g_1, \ldots$ — постоянные. Пусть $g \neq 0$ и оператор Z удовлетворяет условию (4.5) ($N = m$).

При m — четном невозмущенное движение неустойчиво [17], но одновременно обладает условной устойчивостью: асимптотически устойчиво для начальных возмущений $gv(t_0) < 0$.

§ 5. *Пример*. 1. Исследуем условную устойчивость главной оси ротора гирогоризонта к местной вертикали. Центр тяжести гирогоризонта смещен относительно оси подвеса. Так как до включения в работу прибор был заарретирован, то естественно предположить, что углы отклонения главной оси гироскопа от местной вертикали Ψ, ϑ малы в момент разарретирования. Уравнения движения главной оси ротора гирогоризонта имеют вид [18, 19]

$$
\begin{aligned}
I_B\vartheta^{\cdot\cdot} + I\Omega(\Psi^{\cdot} + \omega_c) &= -Gl\vartheta + M_+^{(1)} - M_-^{(1)}\operatorname{sign}\vartheta^{\cdot}\\
I_c\Psi^{\cdot\cdot} - I\Omega(\vartheta^{\cdot} + \omega_B) &= Gl\Psi + M_+^{(2)} - M_-^{(2)}\operatorname{sign}\Psi^{\cdot}\\
I_1\varepsilon_1^{\cdot\cdot} + k_1\varepsilon_1 &= -M^{(3)}\operatorname{sign}\varepsilon_1^{\cdot}\\
I_2\varepsilon_2^{\cdot\cdot} + k_2\varepsilon_2 &= -M^{(4)}\operatorname{sign}\varepsilon_2^{\cdot}
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

В виду того, что моменты трения малы по сравнению с моментами корректирующих двигателей $M_+^{(1)}$ и $M_+^{(2)}$ и на характер движения главной оси не оказывают влияния, в дальнейшем ими пренебрегаем. Учет вращения земли приводит к появлению в системе (5.1) малых постоянных членов, которые можно уничтожить заменой

$$\Psi_1 = \Psi + a,\quad \vartheta_1 = \vartheta + в\quad (a,\ в = \mathrm{const}).$$

Ошибка при таких предположениях тем меньше, чем меньше трение. Пренебрегая нутационными членами и аппроксимируя $M_+^{(1)}$ и $M_+^{(2)}$, как

$$M_+^{(1)} = -[q_1(\Psi-\varepsilon_1)^3 + q_2(\Psi-\varepsilon_1)^5 + \ldots],\qquad M_+^{(2)} = h_1(\vartheta-\varepsilon_2)^3 + h_2(\vartheta-\varepsilon_2)^5 + \ldots$$

($q_1, q_2, \ldots, h_1, h_2$ — постоянные), после ряда преобразований получаем систему уравнений[1]

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{3}{4}r_1\left[\frac{1}{2}(a_1+a_2)r_1^2 + a_1r_2^2 + a_2r_3^2\right] + \ldots\quad \frac{dr_2}{dt} = 0,\qquad \frac{dr_3}{dt} = 0 \qquad (5.2)$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{q_1}{I\Omega},\qquad a_2 = -\frac{h_1}{I\Omega}$$

Так как правая часть первого уравнения (5.2) уничтожается при $r_1 = 0$, то r_1 либо сохраняет свой первоначальный знак, либо $r_1(t) \equiv 0$ при $t \geqslant T \geqslant t_0$, $r_1(T) = 0$.

Случай $r_1(t) \equiv 0$, с точки зрения условной устойчивости интереса не представляет (невозмущенное движение устойчиво при $t \geqslant T$). Поэтому в дальнейшем рассматриваем случай, когда $r_1(t) > 0$ при $r_1(t_0) > 0$, $t \geqslant t_0$.

Ищем область условной устойчивости, примыкающей к оси r_3

$$2W(k) = r_3^2 - k(r_1^2 + r_2^2)$$

Выражения (3.2) и (3.5) в этом случае имеют вид

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{W(k)=0} = \frac{3}{4}r_1^2\left\{\frac{1}{2}[a_1 + (1+2k)a_2]r_1^2 + (a_1+ka_2)r_2^2\right\} + \ldots \qquad (5.3)$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{W(k)=0} = -\frac{3k}{4}r_1^2\left\{\frac{1}{2}[a_1 + (1+2k)a_2]r_1^2 + (a_1+ka_2)r_2^2\right\} + \ldots \qquad (5.4)$$

Пусть

$$a_1 < -a_2 < 0 \qquad (5.5)$$

Выберем

$$0 < k_1 < -\frac{1}{2}\left[\frac{a_1}{a_2} + 1\right] \qquad (5.6)$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем звездочкой отмечены результаты, полученные В.Г. Веретенниковым в кандидатской диссертации «Об устойчивости движения при наличии трех пар чисто мнимых корней». Москва. Университет Дружбы народов им. Лумумбы, 1966 г.

Вид слагаемых в (5.3) и (5.4), содержащих члены более высокого порядка, таков, что знаки (5.3) и (5.4) определяются выписанными слагаемыми при $r_3^2 \leqslant h$, $r_1(t_0) > 0$, $h = \text{const} > 0$. Тогда при (5.5), (5.6), $k \in [0, k_1]$ выполняются неравенства

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{W(k)\geqslant 0} < 0, \quad \left(\frac{dW}{dt}\right)_{W(k_1)=0} > 0$$

Следовательно, невозмущенное движение системы (5.2), при выполнении условий (5.5) и (5.6) устойчиво для начальных возмущений

$$r_3^2(t_0) - k_1[r_1^2(t_0) + r_2^2(t_0)] > 0, \qquad r_3^2(t_0) \leqslant h$$

Отметим, что условная устойчивость имеет место за счет перекрестных связей*.

2. Область условной устойчивости, совпадающую с указанной В. Г. Веретенниковым, можно получить следующим образом. Рассмотрим функции

$$2V = \sum_{i=1}^{3} r_i^2, \qquad 2W(k) = r_3^2 - kr_2^2$$

В силу (5.2)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{W(k)=0} = \frac{3}{4} r_1^2 \left[\frac{1}{2}(a_1 + a_2) r_1^2 + (a_1 + ka_2) r_2^2\right] + \ldots, \quad \frac{dW}{dt} \equiv 0$$

Примем $k = 1$. При $W(t_0) = r_3^2(t_0) - r_2^2(t_0) > 0$ траектория решения системы (5.2) не может пересечь поверхность $W = r_3^2 - r_2^2 = 0$, так как вдоль траектории $W' \equiv 0$. Следовательно, при $a_1 < -a_2 < 0$, невозмущенное движение системы (5.2) устойчиво для начальных возмущений $r_3(t_0) > r_2(t_0)$.

Поступила 23 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.,Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанск. ун-та, Математика, 1938, кн. 98, вып. 3.
3. Кузьмин П. А. К теории устойчивости движения. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
4. Каменков Г. В. К задаче об устойчивости в критических случаях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч. Изд. АН СССР, М.— Л., т. II, 1956.
6. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд-во Ленинград. ун-та, 1963.
7. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zeitschrift, 1930, t. 32.
8. Petronsky J. Über das Verchalten der Jntegralkurven eines Sistems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes. Мат, сб., 1934, т. 41.
9. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит., 1958.
10. Плисс В. А., К условной устойчивости в критических случаях. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
11. Жуковский В. И. К условной устойчивости в критическом случае двойного нулевого с корня. Изв. вузов, Математика, 1966, № 4 (53).
12. Жуковский В. И. Неустойчивость и условная устойчивость в критическом случае n нулевых корней. Дифференциальные уравнения, 1965, т. I, № 12.
13. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд-во Наука, 1966.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд-во Наука, 1966.
15. Осипов Ю. С. О принципе сведения в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
16. Красовский Н. Н. Некоторые задачи устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
17. Шиманов С. Н. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последствием. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
18. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов, М., ГИТТЛ, 1955.
19. Павлов В. А. Теория гироскопа и гироскопических приборов. Изд-во Судостроения, 1964.